

УДК 531.19

С.В. Сёмкин¹
В.П. Смагин²

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Владивосток, Россия

Модель Поттса на решетке Бете во внешнем поле*

Получено решение для модели Поттса с произвольным числом состояний на решетке Бете в ненулевом внешнем поле. Построена линия фазовых переходов первого рода на плоскости «температура – внешнее поле», заканчивающаяся точкой фазового перехода второго рода. Найдена величина скачка «намагниченности» на линии фазовых переходов.

Ключевые слова и словосочетания: фазовые переходы, модель Поттса, решетка Бете.

S.V. Semkin
V.P. Smagin

Vladivostok State University of Economics and Service
Vladivostok, Russia

Potts model on a Bethe lattice in the external field

The solution for the Potts model with an arbitrary number of states on the Bethe lattice in a non-zero external field is obtained. The line of phase transitions of the first order on the plane “temperature - external field” is found. This line has the ends point of a phase transition of the second order. The “magnetization” jump on the line of phase transitions is found.

Keywords: phase transitions, Potts model, Bethe lattice.

Введение

Модель Поттса [1] – одна из наиболее часто используемых моделей в статистической физике, является теоретическим инструментом, применяемым для изучения широкого класса явлений в физике конденсированных сред [2, 3]. Кроме того, модель Поттса используется в задачах, возникающих в ядерной физике [4–6]. Точных результатов для модели Поттса существует немного. Известно, что если число спиновых состояний в модели Поттса больше некоторого критического

¹ Сёмкин Сергей Викторович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий и систем; e-mail: Lil5@rambler.ru.

² Смагин Виктор Павлович – д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией геофизических полей.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по заданию № 2014/292 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания.

значения (зависящего от размерности решетки), то в отсутствии внешнего поля наблюдается фазовый переход первого рода, а если меньше – второго рода [1, 3, 4]. Фазовый переход в модели Поттса в отсутствии внешнего поля неоднократно рассматривался как для чистого магнетика [1–4], так и для магнетика с немагнитными примесями [7, 8].

Однако несомненный интерес представляет и критическое поведение модели Поттса в присутствии внешнего поля [5, 6]. Поэтому в настоящей работе мы рассмотрим модель Поттса с произвольным числом состояний на решетке Бете во внешнем поле. И хотя решетка Бете лишь условно сопоставима с реальными кристаллическими решетками, она обладает тем преимуществом, что модель Поттса во внешнем поле может быть решена на этой решетке точно.

Фазовые переходы в модели Поттса во внешнем поле

Модель Поттса [1] формулируется следующим образом. Рассмотрим некоторую регулярную решетку. Каждому узлу поставим в соответствие величину σ_i («спин»), которая может принимать s различных значений, скажем $1, 2, \dots, s$. Два соседних спина σ_i и σ_j взаимодействуют с энергией $-J_p \delta(\sigma_i, \sigma_j)$, где

$$\delta(\sigma_i, \sigma_j) = \begin{cases} 1, & \sigma_i = \sigma_j \\ 0, & \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases}.$$

Пусть есть внешнее поле $H > 0$, которое действует на состояние 1. Тогда полная энергия равна

$$E = -J_p \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j) - H \sum_i \delta(\sigma_i, 1). \quad (1)$$

Решение задачи с гамильтонианом (1) заключается, в частности, в определении величин p_i – доли спинов, находящихся при тепловом равновесии, в состоянии i . Эту задачу сравнительно просто можно решить для решетки Бете – дерева без замкнутых путей, воспользовавшись методом, описанным в [1]. Решетку Бете с произвольным координационным числом q построим следующим образом. Рассмотрим «центральный» узел решетки со спином σ_0 . q соседей этого узла образуют первую оболочку, $q - 1$ «внешних» (кроме центрального) соседей каждого узла первой оболочки образуют вторую оболочку и так далее до i -й оболочки. Тогда

$$p_i = \frac{\sum_{\{\sigma\}} \delta(\sigma_0, i) P(\{\sigma\})}{Z}, \quad (2)$$

где $Z = \sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\})$, $P(\{\sigma\}) = \exp(K \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j) + h \sum_i \delta(\sigma_i, 1))$,

$K = J_p/kT$, $h = H/kT$, k – постоянная Больцмана, T – температура.

Представим $P(\{\sigma\})$ в виде:

$$P(\{\sigma\}) = e^{h\delta(\sigma_0, 1)} \prod_{j=1}^q \exp(K\delta(\sigma_0, \sigma_1^{(j)}) + K \sum_{(l,n)} \delta(\sigma_l^{(j)}, \sigma_n^{(j)}) + h \sum_l \delta(\sigma_l^{(j)}, 1)),$$

где $\sigma^{(j)}$ – совокупность спинов j -ой ветви. Тогда

$$Z = \sum_{\sigma_0} e^{h\delta(\sigma_0, 1)} (G_N(\sigma_0))^q, \quad (3)$$

$$G_N(\sigma_0) = \sum_{\sigma^{(j)}} \exp(K\delta(\sigma_0, \sigma_1^{(j)}) + K \sum_{(l,n)} \delta(\sigma_l^{(j)}, \sigma_n^{(j)}) + h \sum_l \delta(\sigma_l^{(j)}, 1)).$$

Используя эти выражения в (2) и обозначив $x_{N,k} = G_N(k)/G_N(1)$, ($k = 2, 3, \dots, s$), получим

$$p_1 = \frac{e^h}{e^{h+\sum_k x_{N,k}^q}}, \quad p_j = \frac{x_{N,j}^q}{e^{h+\sum_k x_{N,k}^q}}, \quad j > 1, \quad (4)$$

а представив (3) в виде

$$G_N(\sigma_0) = \sum_{\sigma_1} e^{K\delta(\sigma_0, \sigma_1) + h\delta(\sigma_1, 1)} (G_{N-1}(\sigma_1))^{q-1},$$

получим рекуррентное соотношение для величин $x_{N,k}$

$$x_{N,k} = \frac{e^{h+e^K x_{N-1,k}^{q-1} + \sum_{j \neq k} x_{N-1,j}^{q-1}}}{e^{K+h+\sum_j x_{N-1,j}^{q-1}}} \quad (5)$$

Рассмотрим теперь предельный переход $N \rightarrow \infty$. Как известно, такой переход на решетке Бете осложняется тем, что число граничных узлов решетки пропорционально при больших полном числу узлов [1]. Поэтому следует различать задачи для полной решетки Бете вместе с граничными узлами (дерево Кейли) и внутренней части решетки – собственно решетки Бете. Мы рассмотрим решение для внутренней части и в связи с этим будем полагать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_{N,k} = \lim_{N \rightarrow \infty} x_{N-1,k} = x_k.$$

Кроме того, будем искать такое решение, когда все p_j при $j > 1$ равны между собой. Согласно (4) это значит, что $x_k = x$ для всех k . Тогда из (4) и (5) получим

$$p_1 = \frac{e^h}{e^{h+(s-1)x^q}}, \quad (6)$$

$$x = F(K, h, x) = \frac{e^{h+(e^K+s-2)x^{q-1}}}{e^{K+h+(s-1)x^{q-1}}}. \quad (7)$$

Таким образом, значение p_1 определяется корнем уравнения (7) $x(K, h)$. Поскольку уравнение (7) получено предельным переходом из рекуррентного уравнения (5), его решение должно быть устойчивым в том смысле, что рекуррентная процедура $x_n = F(K, h, x_{n-1})$ должна сходиться к решению. Иначе говоря, при $x = x(K, h)$ должно выполняться условие $\frac{\partial F(K, h, x)}{\partial x} \leq 1$. Если у уравнения (7) существует несколько устойчивых решений, следует выбрать то из них, которое ближе к единице, поскольку $x_{0,k} = 1$. Анализ (7) показывает, что этот критерий выбора корня дает функцию $x(K, h)$, непрерывную на плоскости (K, h) всюду, кроме точек некоторой кривой $h = h_c(K)$. Эта кривая и является линией фазовых переходов первого рода, поскольку $p_1 = -\frac{\partial f}{\partial H}$, где f – свободная энергия на один узел решетки, а скачок $x(K, h)$ означает, согласно (6), скачок p_1 . Она начинается в точке $(K_0, 0)$, где K_0 – точка фазового перехода для модели Поттса на решетке Бете без внешнего магнитного поля [2], и заканчивается в точке (K_e, h_e) , в которой фазовый переход является переходом второго рода.

В соответствии со сказанным выше для точек линии $h = h_c(K)$ должны выполняться условия

$$x = F(K, h, x), \quad \frac{\partial F(K, h, x)}{\partial x} = 1.$$

Используя (7), получим

$$\begin{aligned} e^h + (e^K + (s-2))x^{q-1} &= xe^{K+h} + (s-1)x^q, \\ (q-1)(e^K + (s-2))x^{q-2} - (q-1)(s-1)x^{q-1} &= e^{K+h} + (s-1)x^{q-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x^2 - \left(\frac{(q-2)(e^K+s-2)}{q-1} + \frac{q}{q-1} e^{-K} \right) x + \frac{e^K+s-2}{s-1} e^{-K} = 0 \quad (8)$$

и

$$e^h = \frac{(s-1)x^q - (e^K+(s-2))x^{q-1}}{1-xe^K} \quad (9)$$

Начальная точка линии (K_0, h_0) определяется условием $h_0 = 0$. Это приводит к $x_0 = 1$ и

$$e^{K_0} = \frac{s}{q-2} + 1, \quad (10)$$

что совпадает с известным результатом [2] для модели Поттса на решетке Бете в отсутствие внешнего поля. Конечная точка линии определяется условием исчезновения вещественных корней у квадратного уравнения (8). Это условие приводит к

$$e^{K_e} = \frac{1}{2} \left[-(s-2) + \sqrt{(s-2)^2 + \frac{4q^2(s-1)}{(q-2)^2}} \right], \quad (11)$$

$$e^{h_e} = (s-1) \left(\frac{(q-2)(e^{K_e}+s-2)}{q(s-1)} \right)^q, \quad (12)$$

а из (6) следует, что в точке (K_e, h_e) $p_1 = 1/2$.

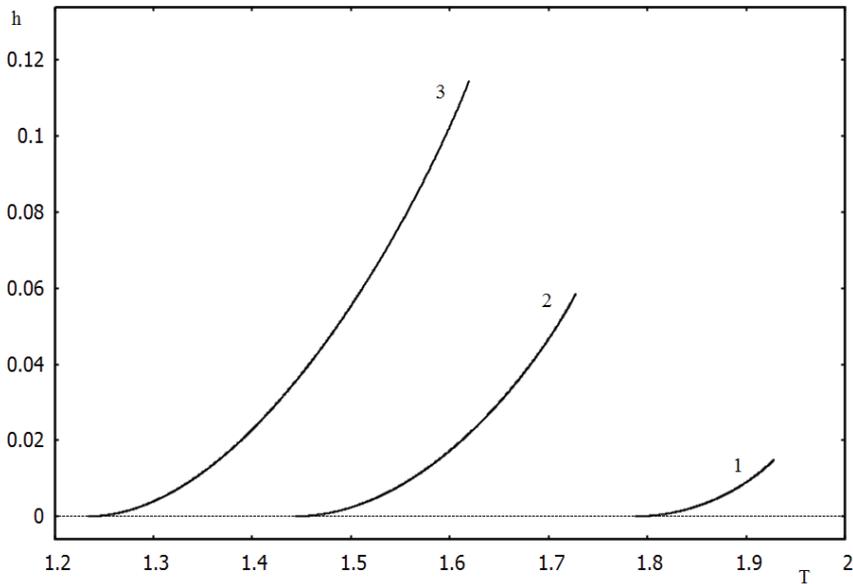


Рис. 1. Линии фазовых переходов первого рода для модели Поттса с s состояниями на решетке Бете с координационным числом $q = 6$. Кривая 1 – $s = 3$, кривая 2 – $s = 4$ и кривая 3 – $s = 5$. По горизонтальной оси температура $T = 1/K$, по вертикальной – внешнее поле h

В работе [6] найдена конечная точка линии фазовых переходов первого рода на плоскости (K, h) для модели Поттса с тремя состояниями на трехмерной кубической решетке $(K_e, h_e) = (0.54938(2), 0.000775(10))$. Вычисление по формулам (11), (12) при $s = 3$ и $q = 6$ дает $(K_e, h_e) = (0.51847, 0.01514)$, то есть значение K_e довольно близко к полученному в [6], но значение h_e заметно отличается. В более ранней работе [5] положение конечной точки линии фазовых переходов первого рода

для модели Поттса с тремя состояниями было найдено в приближении среднего поля. Для кубической решетки было получено $K_e = 4/9$ и $h_e = \ln 2 - 2/3 \approx 0,02648$.

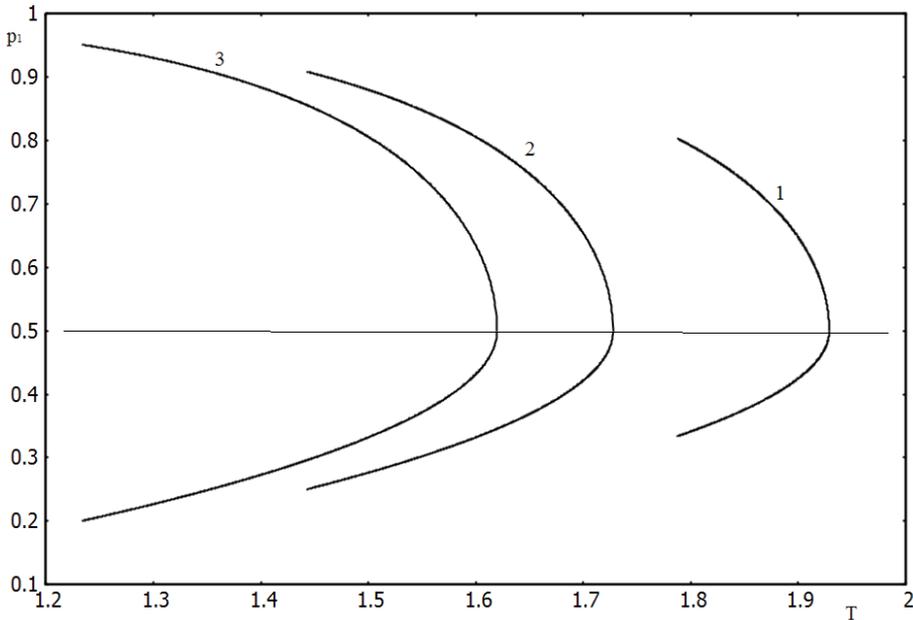


Рис. 2. Скачок вероятности p_1 на линиях фазовых переходов в модели Поттса с s состояниями на решетке Бете с координационным числом $q = 6$ в зависимости от температуры. Кривая 1 – $s = 3$, кривая 2 – $s = 4$ и кривая 3 – $s = 5$. По горизонтальной оси температура $T = 1/K$, по вертикальной – вероятность p_1

На рисунке 1 показаны линии $h = h_c(T)$ ($T = 1/K$) для $q = 6$ и $s = 3, 4, 5$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Видно, что T_0 и T_e – температуры начальной и конечной точек линии уменьшаются с ростом s , а величина h_e растет. (При $s = 2$, когда модель Поттса переходит в модель Изинга, вся кривая $h = h_c(T)$ вырождается в единственную точку фазового перехода второго рода.)

На рисунке 2 показаны значения p_1 вблизи линии $h = h_c(T)$ при $q = 6$ и $s = 3, 4, 5$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) в зависимости от $T \in [T_0, T_e]$. Каждая из кривых имеет две ветви: нижняя ($p_1 < 1/2$) соответствует $h = h_c(T) - 0$, а верхняя ($p_1 > 1/2$) – $h = h_c(T) + 0$. Величина скачка p_1 падает от максимального значения при $T = T_0$ до нуля при $T = T_e$.

1. Бэкстер, Р. Точно решаемые модели в статистической механике / Р. Бэкстер. – М.: Мир, 1985.
2. Wu, F.Y. The Potts model / F.Y. Wu // Reviews of Modern Physics. – 1982. – Vol. 54, Issue 1. – P. 235.
3. Муртазаев, А.К. Исследование влияния замороженных немагнитных примесей на фазовые переходы в трехмерной модели Поттса / А.К. Муртазаев, А.Б. Бабаев, Г.Я. Азнаурова // Физика твердого тела. – 2008. – Т. 50(4). – С. 703.

4. Janke, W. Three-dimensional 3-state Potts model revisited / W. Janke, R. Villanova // Nuclear Physics. – 1997. – Vol. 489, Issue 3. – P. 679–696.
5. DeGrand, T.A. Phase structure of QCD at high temperature with massive quarks and finite quark density: A $Z(3)$ paradigm / T.A. DeGrand, C. DeTar // Nuclear Physics. – 1983. – Vol. 225, Issue 4. – P. 590–620.
6. Karsch, F. The three-dimensional, three-state Potts model in an external field / F. Karsch, S. Stickan // Physics Letters. – 2000. – В. 488. – P. 319–325.
7. Сёмкин, С.В. Приближение Бете в модели Изинга с подвижными примесями / С.В. Сёмкин, В.П. Смагин // Физика твердого тела. – 2015. – Т.57 (5). – С. 926.
8. Сёмкин, С.В. Модель Поттса на решетке Бете с немагнитными примесями / С.В. Сёмкин, В.П. Смагин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2015. – Т. 148, Вып. 4 (10). – С. 729.

© Сёмкин, С.В., 2016

© Смагин, В.П., 2016

Для цитирования: Сёмкин, С.В. Модель Поттса на решетке Бете во внешнем поле / С.В. Сёмкин, В.П. Смагин // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса. – 2016. – №3. – С. 103–108.

For citation: Semkin, S.V. Potts model on a Bethe lattice in the external field / S.V. Semkin, V.P. Smagin // The Territory Of New Opportunities. The Herald of Vladivostok State University of Economics and Service. – 2016. – № 3. – P. 103–108.

Дата поступления: 20.06.2016.