

УДК 796.012

**Загrevский Владимир Иннокентьевич**

Могилевский государственный университет им. А.А.Кулешова  
Могилев, Белоруссия

**Масловский Евгений Александрович**

Полесский государственный университет  
Пинск, Белоруссия

**Загrevский Олег Иннокентьевич**

Национальный исследовательский Томский государственный университет  
Томск, Россия.

**Яковлев Анатолий Николаевич**

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса  
Владивосток, Россия

## **Кинематика пространственной модели неразветленной биомеханической системы с жесткими связями в условиях упругой фиксированной опоры**

Рассматриваются периодические методы построения уравнений кинематики для изучения методов трехмерного движения спортсмена в условиях упругой неподвижной опоры. Вывод уравнений основан на методах аналитической и дифференциальной геометрии, определение декартовой и сферической координаты точки в трехмерном пространстве.

**Ключевые слова и словосочетания:** кинематика, пространственная модель, система с жесткими связями, упругие фиксированные опоры, декартовые и сферические координаты точки, трехмерное пространство.

Бурное развитие средств вычислительной техники, прикладной математики, теории оптимальных процессов и небывалый рост спортивных достижений на международной арене обусловили повышенный интерес специалистов к вопросам биомеханических закономерностей построения двигательных действий человека. В настоящее время в биомеханических исследованиях можно выделить 2 основных направления, по которым осуществляется исследование техники спортивных упражнений. К первому относится достаточно широко распространенный метод анализа кинематической и динамической структуры двигательных действий, ко второму – синтез движений человека в имитационном мо-

делировании на ЭВМ. Актуальность решения задач второго класса заключается в возможности конструирования различных вариантов техники двигательных действий с произвольными ограничениями на кинематические и динамические ресурсы исполнителя, что практически невозможно реализовать в натурном эксперименте. В данном случае модели синтеза движений биомеханических систем выступают, по существу, единственным инструментом исследования сложных систем, а возможность их функционирования связана с идеей имитационного моделирования движений человека на ЭВМ [7].

Исследования в области построения конструктивных математических моделей синтеза движений человека начались в СССР в период 1970 – 1975 гг. Их число недостаточно обширно, что объясняется большой сложностью проблемы, находящейся на пересечении многих наук. К числу публикаций, достаточно полно освещающих данный вопрос, можно отнести работы [2, 3, 6, 9, 11], в которых дается формализованное описание движений человека средствами математического аппарата. Из наиболее значимых зарубежных исследований по рассматриваемой теме можно отнести работу [4]. Однако реальная ценность конструктивных математических моделей синтеза движений человека заключается в их практическом приложении, реализованном на уровне разработанных для данных моделей компьютерных программ, позволяющих получить расчетные данные синтеза движений человека на ПЭВМ. И здесь их число существенно снижается [3, 7, 8, 10].

Исследование техники спортивных упражнений немислимо без биомеханического анализа кинематики движений спортсмена. С этой целью используют модель опорно-двигательного аппарата (ОДА) тела спортсмена, совершающего перемещение в опорном положении или в безопорном состоянии. Поступательное и вращательное движение модели ОДА тела человека в опорном положении описывают методом сдвига и поворота прямоугольных (декартовых) координат на плоскости [1, 12]. На пространственном уровне кинематических характеристик рассматривается геометрия движения, определяются координаты точек, их перемещения, углы в суставах, траекторные положения звеньев тела и т.д. Исходными данными для определения различных кинематических характеристик и их параметров в спортивных упражнениях являются координаты точки, тела и системы тел. Для численной интерпретации этих показателей движения используют геометрические методы определения координат системы тел на плоскости.

Описание кинематического состояния движений спортсмена в трехмерном пространстве требует привлечения иного механико-математического аппарата: методов аналитической и дифференциальной геометрии, аналитической механики. Здесь следует учесть, что методы, широко используемые в математике, для описания пространственных кинематических изменений системы тел не адаптированы к биомеханическим исследованиям целенаправленных движений человека, что и определяет актуальность выполненного исследования. Имеется ограниченный круг работ [1, 9], посвященных вопросам пространственного изучения движений человека и кинематического описания спортивных упражнений в трехмерном пространстве. Проблема обостряется фрагментарностью разработок автоматизированного вывода уравнений движения для многозвенных биомеханических систем с произвольным числом степеней свободы с помощью ЭВМ и дополнительно усугубляется введением в уравнения движения упругой опоры, что сдерживает биомеханические исследования в области построения оптимальной техники спортивных упражнений.

Цель исследования – построение математической модели кинематики пространственного движения спортсмена в условиях упругой опоры.

Методы исследования. Для создания пространственной модели неразветвленной биомеханической системы с жесткими связями в условиях упругой фиксированной опоры использовались математические методы описания координат точки, тела и системы тел в трехмерном пространстве.

Результаты исследования и их обсуждение. Рассмотрим координаты маркера (точка  $C$ ) в сферической (рис. 1а) и декартовой (рис. 1б) системе координат [5, 12].

В биомеханических исследованиях техники спортивных упражнений за точку обычно принимают суставы или центр масс сегментов. В данном случае в качестве такой маркерной точки возьмем место контакта опорного звена с опорой, в которой и разместим начало подвижной системы координат. Введем обозначения компонентов радиус-вектора ( $R$ ) точки  $C$  в сферической и декартовой системах координат.

Для сферической системы координат введем обозначения:

$O$  – полюс сферической системы координат;

$R$  – радиус сферы (полярное расстояние) с центром в полюсе сферической системы координат;

$C$  – маркерная точка;

$S_{xy}$  – проекция маркерной точки  $S$  на плоскость  $Oxy$ ;  
 $Oxz$  – полуплоскость нулевого меридиана;  
 $\varphi$  – угол, образованный полуплоскостью полярного расстояния  $Oz$  и полуплоскостью нулевого меридиана (географическая долгота);  
 $Q$  – угол между осью  $Oz$  и образующей ( $Os$ ) боковой поверхности конуса – угол раствора (географическая широта).  
 Введем обозначения для элементов декартовой системы координат:  
 $Oxyz$  – декартова система координат;  
 $R$  – радиус-вектор маркерной точки  $S$ ;  
 $S_{xy}$  – проекция маркерной точки  $S$  на плоскость  $Oxy$ ;  
 $S_{xz}$  – проекция маркерной точки  $S$  на плоскость  $Oxz$ ;  
 $S_{yz}$  – проекция маркерной точки  $S$  на плоскость  $Oyz$ ;  
 $R_{xy}$  – проекция радиус-вектора  $R$  на плоскость  $Oxy$ ;  
 $R_{xz}$  – проекция радиус-вектора  $R$  на плоскость  $Oxz$ ;  
 $R_{yz}$  – проекция радиус-вектора  $R$  на плоскость  $Oyz$ ;  
 $x$  – координата маркерной точки  $S$  на оси  $Ox$  декартовой системы координат  $Oxyz$ ;  
 $y$  – координата маркерной точки  $S$  на оси  $Oy$  декартовой системы координат  $Oxyz$ ;  
 $z$  – координата маркерной точки  $S$  на оси  $Oz$  декартовой системы координат  $Oxyz$ ;  
 $\dot{x}, \ddot{x}$  – декартовы компоненты вектора скорости и ускорения радиус-вектора  $R$  по оси  $Ox$ ;  
 $\dot{y}, \ddot{y}$  – декартовы компоненты вектора скорости и ускорения радиус-вектора  $R$  по оси  $Oy$ ;  
 $\dot{z}, \ddot{z}$  – декартовы компоненты вектора скорости и ускорения радиус-вектора  $R$  по оси  $Oz$ ;  
 $\alpha$  – угол, образованный линией  $R_{yz}$  и осью  $Oy$ ;  
 $\beta$  – угол, образованный линией  $R_{xz}$  и осью  $Oz$ ;  
 $\varphi$  – угол, образованный линией  $R_{xy}$  и осью  $Ox$ ;  
 $Q$  – угол, образованный линиями между радиус-вектором  $R$  и осью  $Oz$ ;  
 $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$  – угловая скорость и угловое ускорение, возникающие во вращательном движении радиус-вектора  $R$  относительно оси  $Ox$ ;  
 $\dot{\beta}, \ddot{\beta}$  – угловая скорость и угловое ускорение, возникающие во вращательном движении радиус-вектора  $R$  относительно оси  $Oy$ ;  
 $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$  – угловая скорость и угловое ускорение, возникающие во вращательном движении радиус-вектора  $R$  относительно оси  $Oz$ .

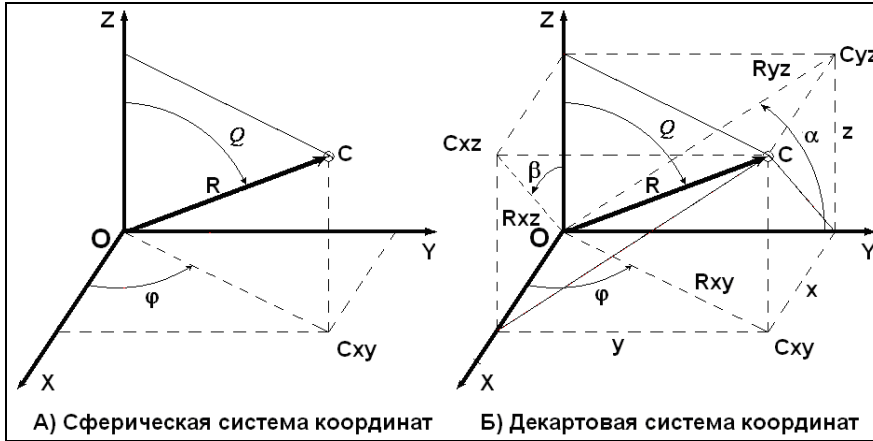


Рис. 1. Пространственные системы координат

Запишем уравнения точки по осям координат. Требуется определить компоненты векторов скорости и ускорения начала подвижной системы координат (маркерная точка С – место контакта опорного звена биомеханической системы и упругой опоры, рис. 1).

Начало подвижной системы координат в силу упругой (деформируемой) связи находится в точке, определяемой следующими компонентами сферических и декартовых координат

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad Q = \arctg\left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right), \quad \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1)$$

$$x = R \sin Q \cos \varphi, \quad y = R \sin Q \sin \varphi, \quad z = R \cos Q.$$

Декартовы компоненты вектора скорости ( $\dot{R}$ ) начала подвижной системы координат (маркерная точка С) равны соответственно [12]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{R} \sin Q \cos \varphi + R \dot{Q} \cos Q \cos \varphi - R \dot{\varphi} \sin Q \sin \varphi, \\ \dot{y} &= \dot{R} \sin Q \sin \varphi + R \dot{Q} \cos Q \sin \varphi + R \dot{\varphi} \sin Q \cos \varphi, \\ \dot{z} &= \dot{R} \cos Q - R \dot{Q} \sin Q. \end{aligned} \quad (2)$$

Сферические компоненты вектора скорости начала подвижной системы координат (маркерная точка С) определяются из уравнений [12]

$$\dot{R} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \quad \dot{Q} = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})z - \dot{z}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)}, \quad \dot{\varphi} = (y\dot{y} - y\dot{x})(x^2 + y^2)^{-1/2}. \quad (3)$$

Декартовы и сферические компоненты вектора ускорения маркерной точки С соответственно равны

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (\ddot{R} - R\dot{Q}^2 - R\dot{\varphi}^2) \sin Q \cos \varphi + (2\dot{R}\dot{Q} + R\ddot{Q}) \cos Q \cos \varphi - (R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi}) \sin Q \sin \varphi \\ &\quad - 2R\dot{Q}\dot{\varphi} \cos Q \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= (\ddot{R} - R\dot{Q}^2 - R\dot{\varphi}^2) \sin Q \sin \varphi + (2\dot{R}\dot{Q} + R\ddot{Q}) \cos Q \sin \varphi + (R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi}) \sin Q \cos \varphi \\ &\quad + 2R\dot{Q}\dot{\varphi} \cos Q \cos \varphi, \\ \ddot{z} &= (\ddot{R} - R\dot{Q}^2) \cos Q - (R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi}) \sin Q,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{R} &= (\ddot{x} + \dot{x}^2 + \ddot{y} + \dot{y}^2 + \ddot{z} + \dot{z}^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - (\dot{x}\dot{y} + \dot{y}\dot{z} + \dot{z}\dot{x})(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, \\ \ddot{Q} &= \left[ (\ddot{x} + \dot{x}^2 + \ddot{y} + \dot{y}^2)z - \dot{z}(\dot{x}\dot{y}) - \dot{z}(x^2 + y^2) \right] \times (x^2 + y^2)^{1/2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} + \\ &\quad + \left[ (\dot{x}\dot{y})z - \dot{z}(x^2 + y^2) \right] \times \left[ -(\dot{x}\dot{y})(x^2 + y^2)^{-3/2} (x^2 + y^2 + z^2) \right] - \\ &\quad - 2(x^2 + y^2)^{-1/2} (\dot{x}\dot{y} + \dot{z}\dot{z}), \\ \ddot{\varphi} &= (\ddot{y} - \dot{y}\dot{x})(x^2 + y^2)^{-1} - 2(\dot{x}\dot{y})(x^2 + y^2)^{-3/2} (\dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y}).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Радиальные и тангенциальные компоненты скорости ( $\mathbf{V}$ ) и ускорения ( $\mathbf{a}$ ) соответственно выражаются в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \dot{R}\mathbf{e}_r + R\dot{Q}\mathbf{e}_Q + (R \sin Q)\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{a} &= (\ddot{R} - R\dot{Q}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin^2 Q)\mathbf{e}_r + (R\ddot{Q} + 2\dot{R}\dot{Q}^2 - R\dot{\varphi}^2 \sin Q \cos Q)\mathbf{e}_Q + \\ &\quad + \left[ (R \sin Q)\ddot{\varphi} + (2\dot{R} \sin Q)\dot{\varphi} + (2R \cos Q)\dot{Q}\dot{\varphi} \right] \mathbf{e}_\varphi,\end{aligned}\tag{4}$$

где  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_Q$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  – единичные векторы радиального и тангенциального направлений.

Применим уравнения (1–4) для описания кинематики суставов неразветвленной многозвенной пространственной модели биомеханической системы с жесткими связями в условиях фиксированной опоры. Жесткие связи предполагают абсолютно твердые звенья модели с неизменяемой геометрией и длиной звена в процессе движения. Неразветвленная модель описывает последовательное соединение звеньев биомеханической системы, исключая узлы ветвления на кинематические цепи. Введем обозначения:

$N$  – количество звеньев модели;

$i, j$  – буквенные индексы, обозначающие номер звена ( $i = 1, 2, 3, \dots N; j = 1, 2, 3, \dots N$ );

$L_i$  – длина  $i$ -го звена;

$X_i, Y_i, Z_i$  – координаты  $i$ -го сустава на оси  $Ox, Oy, Oz$  декартовой системы координат  $Oxyz$  ( $i = 1, 2, \dots N$ );

$\dot{X}_i, \ddot{X}_i$  – декартовы компоненты вектора скорости и ускорения радиус-вектора  $L_i$  по оси  $Ox$  ( $i = 1, 2, 3, \dots N$ );

$\dot{Y}_i, \ddot{Y}_i$  – декартовы компоненты вектора скорости и ускорения радиус-вектора  $L_i$  по оси  $Oy$  ( $i = 1, 2, 3, \dots N$ );

$\dot{Z}_i, \ddot{Z}_i$  – декартовы компоненты вектора скорости и ускорения радиус-вектора  $L_i$  по оси  $Oz$  ( $i = 1, 2, 3, \dots N$ ).

Остальные обозначения остаются прежними, но в соответствии с принятыми соглашениями для обозначения кинематических характеристик движения  $N$ -звенной биомеханической системы декартовы и сферические компоненты координат и вектора скорости и ускорения радиус-вектора  $R$  (маркерная точка  $C$  – место контакта упругой опоры и опорного звена биомеханической системы) целесообразно представить в виде:

$X_0, Y_0, Z_0$  – координаты маркерной точки  $C$  на оси  $Ox, Oy, Oz$  декартовой системы координат  $Oxyz$  (определяются соотношениями из уравнения 1:  $X_0 = x, Y_0 = y, Z_0 = z$ );

$\dot{X}_0, \ddot{X}_0$  – декартовы компоненты вектора скорости и ускорения маркерной точки  $C$  по оси  $Ox$ ;

$\dot{Y}_0, \ddot{Y}_0$  – декартовы компоненты вектора скорости и ускорения маркерной точки  $C$  по оси  $Oy$ ;

$\dot{Z}_0, \ddot{Z}_0$  – декартовы компоненты вектора скорости и ускорения маркерной точки  $C$  по оси  $Oz$ ;

$R_0$  – радиус-вектор маркерной точки  $C$  (определяется соотношением  $R_0 = R$  из уравнения 1);

$Q_0, \varphi_0$  – сферические компоненты радиус-вектора  $R_0$  (из уравнения 1 следует, что  $Q_0 = Q, \varphi_0 = \varphi$ );

$\dot{Q}_0, \ddot{Q}_0, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0$  – сферические компоненты скорости и ускорения радиус-вектора  $R_0$ , определяемые соотношениями (2, 3) и устанавливающие зависимость:  $\dot{Q}_0 = \dot{Q}, \ddot{Q}_0 = \ddot{Q}, \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}_0 = \ddot{\varphi}$ .

По существу для описания кинематики маркерной точки  $C$  мы вводим цифровой индекс 0, соответствующий всем кинематическим харак-

теристикам радиус-вектора  $R_0$ , одновременно отражающим кинематическое состояние как места контакта опорного звена биомеханической системы с упругой опорой, так и начала подвижной системы координат.

Для описания кинематического состояния биомеханической системы с жесткими связями воспользуемся методикой рекуррентного формирования уравнений для цепочки звеньев, изложенной в работе [7]. В принятых обозначениях, при условии расположения точки контакта опорного звена в начале подвижной системы координат имеем следующие уравнения для определения координат произвольно взятого  $i$ -го сустава биомеханической системы ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ )

$$X_i = X_0 + \sum_{j=1}^i L_j \sin(Q_j) \cos(\varphi_j), \quad Y_i = Y_0 + \sum_{j=1}^i L_j \sin(Q_j) \sin(\varphi_j), \quad Z_i = Z_0 + \sum_{j=1}^i L_j \cos(Q_j). \quad (5)$$

По уравнениям (5) определяются координаты  $i$ -го сустава модели ОДА тела спортсмена при выполнении упражнений в условиях упругой опоры. Уравнения компонентных составляющих линейной скорости  $i$ -го сустава по осям  $Ox$  ( $\dot{X}_i$ ),  $Oy$  ( $\dot{Y}_i$ ),  $Oz$  ( $\dot{Z}_i$ ) декартовой системы координат Охуз имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= \dot{X}_0 + \sum_{j=1}^i L_j \dot{Q}_j \cos(Q_j) \cos(\varphi_j) - \sum_{j=1}^i L_j \dot{\varphi}_j \sin(Q_j) \sin(\varphi_j), \\ \dot{Y}_i &= \dot{Y}_0 + \sum_{j=1}^i L_j \dot{Q}_j \cos(Q_j) \sin(\varphi_j) + \sum_{j=1}^i L_j \dot{\varphi}_j \sin(Q_j) \cos(\varphi_j), \\ \dot{Z}_i &= \dot{Z}_0 - \sum_{j=1}^i L_j \dot{Q}_j \sin(Q_j). \end{aligned} \quad (6)$$

Сферические компоненты вектора скорости  $i$ -го звена равны

$$\dot{Q}_i = \frac{(x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i) z_i - \dot{z}_i (x_i^2 + y_i^2)}{(x_i^2 + y_i^2)^{1/2} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)}, \quad (7)$$

$$\dot{\varphi}_i = (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) (x_i^2 + y_i^2)^{-1/2}.$$

В уравнениях (7) учитывается кинематическое состояние упругой опоры, описываемое радиус-вектором  $R_0$  и входящее в состав уравнений (5, 7). Декартовы компоненты вектора ускорения  $i$ -го сустава ( $\ddot{X}_i, \ddot{Y}_i, \ddot{Z}_i$ ) найдем из уравнений (8).



$$\begin{aligned}
 \ddot{X}_i &= \ddot{X}_0 + \sum_{j=1}^i L_j [(-\dot{Q}_j^2 - \dot{\varphi}_j^2) \sin Q_j \cos \varphi_j + \ddot{Q}_j \cos Q_j \cos \varphi_j - \ddot{\varphi}_j \sin Q_j \sin \varphi_j - 2\dot{Q}_j \dot{\varphi}_j \cos Q_j \sin \varphi_j], \\
 \ddot{Y}_i &= \ddot{Y}_0 + \sum_{j=1}^i L_j [(-\dot{Q}_j^2 - \dot{\varphi}_j^2) \sin Q_j \sin \varphi_j + \ddot{Q}_j \cos Q_j \sin \varphi_j + \ddot{\varphi}_j \sin Q_j \cos \varphi_j + 2\dot{Q}_j \dot{\varphi}_j \cos Q_j \cos \varphi_j], \\
 \ddot{Z}_i &= \ddot{Z}_0 - \sum_{j=1}^i L_j (\dot{Q}_j^2 \cos \varphi_j + \ddot{\varphi}_j \sin Q_j).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь следует обратить внимание на то, что в качестве исходных данных для расчета трех декартовых координат суставов и их производных используются лишь две угловые характеристики движения звеньев:  $Q_i$ ,  $\varphi_i$ . В дальнейшем это позволит выполнить необходимые преобразования формульных выражений и снизить количество регистрируемых показателей движения до двух обобщенных координат для каждого звена модели в каждом видеокадре упражнения. При этом массив  $Q_i$  не регистрируется, а вычисляется. Регистрации подлежит совокупность звеньев тела спортсмена с параметрами:  $\alpha$  – угол, образованный линией Ryz и осью Oy;  $\beta$  – угол, образованный линией Rxz и осью Oz;  $\varphi$  – угол, образованный линией Rxu и осью Ox.

Для сферических компонентов вектора ускорения  $i$ -го звена имеем

$$\begin{aligned}
 \ddot{Q}_i &= \left[ (x_i \ddot{x}_i + \dot{x}_i^2 + y_i \ddot{y}_i + \dot{y}_i^2) z_i - \dot{z}_i (x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i) - \ddot{z}_i (x_i^2 + y_i^2) \right] \times (x_i^2 + y_i^2)^{1/2} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{-1} + \\
 &+ \left[ (x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i) z_i - \dot{z}_i (x_i^2 + y_i^2) \right] \times \left[ -(x_i \ddot{x}_i + y_i \ddot{y}_i) (x_i^2 + y_i^2)^{-3/2} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \right] - \\
 &- 2(x_i^2 + y_i^2)^{-1/2} (x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \dot{z}_i),
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\ddot{\varphi}_i = (x_i \ddot{y}_i - \ddot{x}_i y_i) (x_i^2 + y_i^2)^{-1} - 2(x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i) (x_i^2 + y_i^2)^{-3/2} (x_i \dot{y}_i - \dot{y}_i x_i). \tag{10}$$

При выполнении расчетов по материалам видеосъемки в качестве исходных данных формируется массив значений обобщенных координат  $(\alpha_k, \beta_k, \varphi_k)$  звеньев тела спортсмена для каждого  $k$ -го видеокадра исследуемого упражнения. Так как при видеосъемке упражнения используют три плоскости (Oxy, Oxz, Oyz) регистрации изображения, то соответственно необходимо иметь три синхронизированные видеокамеры.

Вычисление  $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$  можно выполнить по результатам промера упражнения с применением широко используемого в математике численного метода дифференцирования табличных данных – метода разностей. После получения данных по обобщенным координатам определяется одномерный массив  $Q_k$ , вычисляемый в соответствии с любым из выражений

$$Q_i = \arctg\left(\frac{\sin \beta_i}{\cos \beta_i \cos \varphi_i}\right), \quad Q_i = \arctg\left(\frac{\cos \alpha_i}{\sin \alpha_i \sin \varphi_i}\right). \quad (11)$$

Результаты вычисленных по формуле (11) значений массива  $Q_i$  используются в дальнейшем для проведения расчетов по определению декартовых координат суставов и их первых и вторых производных, реализуемые в вычислительных алгоритмах уравнений (5, 6, 8). Применение уравнений (11) в процедуре расчетов кинематических характеристик спортивных упражнений, выполняемых в трех плоскостях декартовой системы координат, позволяет снизить количество камер, используемых в видеосъемке, до двух единиц. В этом случае для регистрации берут плоскости  $Oxz$  и  $Oxy$ , когда для расчетов применяется первое из уравнений (11), или плоскости  $Oyz$  и  $Oxy$  в том случае, если в вычислительных процедурах используется второе уравнение из (1).

Выполненное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. На основе рекуррентного способа записи уравнений связи получены кинематические уравнения пространственного движения неразветвленной многозвенной биомеханической системы в условиях фиксированной опоры. Уравнения пространственного движения позволяют получить цифровые данные кинематических характеристик спортивных упражнений и являются основой для построения уравнений целенаправленного движения человека в трехмерном пространстве.

2. Рекуррентный способ записи уравнений кинематики пространственной модели неразветвленной биомеханической системы с жесткими связями в условиях фиксированной опоры позволяет автоматизировать процесс вывода искомым уравнений для многозвенных биомеханических систем и поручить процедуры построения необходимых уравнений ЭВМ. Компьютер в этом случае выступает в роли не только вычислительного инструмента, но и создателя и конструктора алгоритмов вычислений кинематического состояния спортсмена. Пользователю достаточно указать лишь количество звеньев модели, а все остальные проце-

дуры по составлению уравнений принимает на себя ЭВМ, что освобождает исследователя от вывода необходимых уравнений и предотвращает возможность возникновения технических ошибок в процессе составления формульных зависимостей.

3. Исходные данные траектории пространственного движения звеньев тела спортсмена можно получить по материалам видеосъемки исследуемых упражнений. С этой целью не обязательно проводить трехплоскостную видеосъемку, а достаточно выполнить двухплоскостную видеосъемку, так как преобразование обобщенных координат биомеханической системы в декартовы координаты и их производные осуществляется по зафиксированным данным любых из двух плоскостей движения. При проведении съемки следует учесть необходимость синхронизации видеокамер, чтобы обеспечить синхронность считывания координат звеньев тела спортсмена по времени при выполнении промера упражнения.

4. Вычисление декартовых координат суставов и их первой и второй производных по обобщенным координатам и длинам звеньев модели снижает погрешность определения координат суставов, так как в этом случае не используются результаты промера упражнения, которые с учетом масштаба промера могут привести к большим погрешностям в результатах вычислений.

5. Рассмотренный подход формирования уравнений кинематики пространственного движения спортсмена во вращательных движениях в условиях неподвижной фиксированной оси можно распространить и на разветвленные многозвенные биомеханические системы, что позволит приблизиться к решению проблемы оценки кинематического и динамического состояния спортсмена в сложных упражнениях с вращением спортсмена относительно всех трех декартовых координат одновременно. Особенно часто подобные вращательные движения встречаются в полетном периоде упражнений в спортивной гимнастике, прыжках в воду, акробатике, прыжках на батуте и в других видах спорта, связанных с искусством движений.

6. Упругая опора фиксирована лишь в месте ее контакта с неподвижной опорой. Поэтому приведенные уравнения можно использовать в биомеханическом исследовании техники упражнений в тех видах спорта, в которых опорная часть упражнения выполняется на спортивном снаряде в условиях упругой опоры. Это имеет место, например, в легкой атлетике (прыжок с шестом), в гимнастике (опорный прыжок, упражне-

ния на брусках, перекладине), акробатике (прыжковые упражнения на акробатической дорожке), прыжки с трамплина в воду и т.д.

1. Алешинский, С.Ю. Моделирование пространственного движения человека / С.Ю. Алешинский, В.М. Зациорский // Биофизика. – М.: Наука, 1975. – Т. 20. – Вып. 6. – С. 1121–1126.
2. Алешинский, С.Ю. Определение межзвенных моментов и внутренних сил, возникающих при движении человека / С.Ю. Алешинский, В.М. Зациорский // Теория и практика физической культуры. – 1974. – № 11. – С. 5–9.
3. Бордовский, П.Г. Содержание и методика учебно-исследовательской деятельности студентов институтов физической культуры на занятиях по специализации (На примере УИРС по гимнастике) / П.Г. Бордовский: дис. ... канд. пед. наук. – Л., 1985. – 167 с.
4. Вукобратович, М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы / М. Вукобратович; пер. с англ. канд. техн. наук А.Ю. Шнейдера; под ред. д-ра мед. наук В.С.Гурфинкеля. – М.: Мир, 1976. – 541 с.
5. Виноградов, М.И. Аналитическая геометрия / И.М. Виноградов. – М.: Наука, 1988. – 176 с.
6. Евсеев, С.П. Изучение общих закономерностей техники гимнастических упражнений с помощью метода механо-математического моделирования / С.П. Евсеев, П.Г. Бордовский, А.Г. Конопелько // Техническая подготовка в современной спортивной гимнастике: сб. науч. тр. / под ред. С.А. Алекперова, Ю.И. Наклонова. – Л.: Изд-во ГДОИФК им П.Ф. Лесгафта, 1985. – С. 71 – 82.
7. Загrevский, В.И. Программирование обучающей деятельности спортсменов на основе имитационного моделирования движений человека на ЭВМ: автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 01.02.08, 13.00.04 / В.И. Загrevский. – М., 1994. – 48 с.
8. Загrevский, О.И. Построение техники гимнастических упражнений на основе математического моделирования на ЭВМ: автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.04 / О.И. Загrevский; ТГПУ. – Омск, 2000. – 52 с.
9. Зинковский, А.В. Динамическая модель техники спортивных упражнений / А.В. Зинковский, А.М. Кулаков, С.И. Новаченко, В.А. Павлов // Теория и практика физической культуры. – 1977. – № 2. – С. 59–62.
10. Зинковский, А.В. Пакет программ анализа, синтеза и оптимизации движений человека для ПЭВМ типа IBM PC / А.В. Зинковский, В.А. Шолуха // Биомеханика на защите жизни и здоровья человека: тез.

докл. Всерос. конф.-ярмарки. 9 – 12 ноября 1992 г. – Н. Новгород. Т. 2. – С. 110.

11. Назаров, В.Т. Биомеханические основы программирования обучающей деятельности при освоении ациклических упражнений (на примере спортивной гимнастики): дис. ... д-ра пед. наук / В.Т. Назаров. – М., 1974. – 322 с.
12. Шахинпур, М. Курс робототехники / М. Шахинпур; пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 557 с.