

ВЛАДИВОСТОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА  
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

---

На правах рукописи



ЗАВЕРТАН Александр Викторович

ЛУЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ В  
КАЧЕСТВЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО СРЕДСТВА ВЫДЕЛЕНИЯ  
РАЗРЫВОВ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
А.А. Буренин

Владивосток – 2012

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Некоторые положения нелинейной теории упругости</b>	<b>19</b>
1.1 Модель нелинейно упругого тела. . . . .	19
1.2 Ударные волны в нелинейно упругой среде. . . . .	22
1.3 Возможные типы и скорости ударных волн . . . . .	23
1.4 Лучевой метод решения задач ударного деформирования . . . . .	35
<b>2 Одномерные задачи нелинейной динамической теории упругости</b>	<b>38</b>
2.1 Задачи об ударном деформировании несжимаемой упругой среды с плоскими волнами . . . . .	38
2.1.1 Аналитическое решение одномерной задачи об ударном нагружении упругого полупространства . . . . .	38
2.1.2 Аналитическое решение одномерной задачи об ударном нагружении слоя, имеющего предварительные деформации . . . . .	43
2.1.3 Численно-аналитическая схема решения задач об ударном деформировании несжимаемой упругой среды . . . . .	50
2.2 Плоские волны в сжимаемой упругой среде . . . . .	55
2.2.1 Аналитическое решение задачи о нормальном ударе по плоской границе упругого полупространства . . . . .	55
2.2.2 Задача о косом ударе по плоской границе упругого полупространства . . . . .	57
2.2.3 Примеры численного решения задач об ударном нагружении сжимаемой среды. . . . .	61

2.3	Задачи об антиплоском и скручивающем ударе с цилиндрическими ударными волнами . . . . .	66
2.3.1	Антиплоское ударное деформирование несжимаемой нелинейно-упругой среды . . . . .	66
2.3.2	Скручивающее ударное деформирование несжимаемой упругой среды . . . . .	68
2.3.3	Использование прифронтowych асимптотик в численной схеме расчетов. . . . .	70
<b>3</b>	<b>Плоские задачи</b>	<b>77</b>
3.1	Задача об антиплоском движении среды с цилиндрической полостью . . . . .	77
3.1.1	Постановка задачи. Основные уравнения . . . . .	77
3.1.2	Лучевой метод решения двумерной задачи . . . . .	79
3.1.3	Численно-аналитическая схема решения задачи об антиплоском движении среды с цилиндрической полостью . . . . .	84
3.2	Задача об ударном нагружении сжимаемого упругого полупространства с цилиндрической границей. . . . .	94
3.2.1	Постановка краевой задачи. Общие модельные соотношения. . . . .	94
3.2.2	Лучевой метод решения задачи плоской деформации. . . . .	97
3.2.3	Конструирование численной схемы расчетов . . . . .	104
	<b>Заключение</b>	<b>106</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>108</b>

# Введение

Импульсная, или ударная, обработка материалов является одним из фундаментов современной промышленности. Ковка, высокоскоростная штамповка и другие технологии обработки материалов, основанные на ударном воздействии на них, известны и используются продолжительное время. Тем не менее, по настоящий момент сохраняется ряд трудностей в области математического моделирования подобных процессов. Вызваны они не только преградами расчетного характера, связанными с количественным описанием процессов интенсивного деформирования, но и с постановочными проблемами. Среди них следует особо выделить явление возникновения и распространения поверхностей разрывов деформаций (ударных волн). В отличие от газовой динамики, где это явление наиболее изучено, в механике деформируемого тела помимо характерных для газообразных сред деформаций изменения объема присутствуют также изменения формы. Процесс распространения последних имеет ряд отличий от процесса распространения объемных деформаций. Кроме того, в общем случае эти процессы взаимосвязаны. Явление возникновения ударных волн в твердых телах в процессе их интенсивного деформирования является принципиально нелинейным и должно изучаться на основании нелинейных математических моделей. Таким образом, простейшей моделью, в рамках которой имеется возможность изучить взаимовлияние процессов распространения различных видов деформаций, является модель нелинейной упругой среды.

К настоящему моменту в газовой динамике наработан ряд методов для выделения поверхностей разрывов при численных расчетах гиперзвуковых течений газа, и созданы специальные алгоритмические приемы, включаемые в программы расчетов. Однако, взаимосвязанность процессов распространения деформаций формы и объема не позволяет осуществить их прямой

перенос в задачи динамики деформирования. Вследствие этого, численное моделирование ударных процессов в твердых телах основывается главным образом на использовании схем сквозного счета, в известной степени игнорирующих наличие поверхностей разрывов в среде. При существенной нестационарности задачи (взаимодействие ударных волн между собой и с преградами) алгоритмические эффекты схем сквозного счета, такие, как вносимая в математическую модель движения среды искусственная вязкость, появление осцилляций в окрестности волновых фронтов и собственно размывание поверхностей разрывов, могут приводить к недопустимым количественным и качественным погрешностям. Вследствие этого, сохраняется потребность в разработке эффективных вычислительных методик, избавленных от указанных недостатков. Одна из возможностей состоит в использовании современных достижений нелинейной динамической теории упругости для отслеживания положений волновых фронтов и конструирования вычислительных схем с выделением поверхностей разрывов.

Основы механики сплошных сред, и, в частности, теории упругости, заложены в XIX веке Л.Эйлером, Г.Кирхгофом, О.Коши, Дж.Грином и др. При этом теория упругости (как, впрочем, и другие разделы механики сплошных сред) нелинейна по своей сути, однако до начала прошлого столетия развивался ее линейный вариант (Навье, Пуассон, Бетти, Митчелл, Галеркин, Релей и др.).

В начале XX века линейная теория упругости приобретает классическую форму. Основное направление исследований в этот период – разработка математических методов решения краевых задач. Необходимо отметить выдающийся вклад отечественных ученых: Г.В. Колосова, Н.И. Мухелишвили, Г.Н. Савина, С.К. Соболева, М.А. Лаврентьева.

Авторство первой фундаментальной работы по нелинейной теории упругости принадлежит Ф.Д. Мурнагану [154]. Огромный вклад в детальную разработку нелинейной теории упругости внесли В.В. Новожилов [99], Л.И. Седов

[115, 116], А.А. Ишлюшин [77], В. Прагер [102], А. Грин и Д. Адкинс [57], Л.А. Толоконников [118], Е.М. Черных [128, 126, 129], А.И. Лурье [93], Д.Д. Ивлев [75, 76], К. Трудделл [121], Л. Треалор [120], Г.С. Тарасьев [117]. Здесь не упомянуты работы по теории нелинейно-упругих конструкционных элементов (стержни, пластины, оболочки). Часть таких результатов указана в обзоре В.В. Новожилова, Л.А. Толоконникова и К.Ф. Черных [100]. Отметим области теории упругости, где учет нелинейности лежит в основе. Это прежде всего теория устойчивости деформируемых тел и элементов конструкций [22, 25], нелинейная акустика [66, 111] и проблема изучения переходных процессов деформирования в нестационарных краевых задачах распространения граничных возмущений. В дальнейшем обзоре уделим внимание последней проблеме.

К первым работам, направленным на исследование ударных волн, необходимо отнести работы Д.Бленда [139, 140, 141], Чжу Бо-Те [144, 145] и Е.М.Черных [128, 126, 129]. Д.Бленд рассмотрел условия существования ударных волн в недеформированной упругой среде на примере плоских адиабатических и изоэнтропических волн при линеаризации определяющей системы уравнений. Рассмотрены продольные ударные волны со сферической симметрией. Решена задача с ударной волной постоянной интенсивности. В [141] рассмотрены цилиндрические продольные волны в случае изоэнтропического приближения и при отсутствии предварительных деформаций. Все полученные результаты опубликованы в монографии [16], в которых проведено изучение ударных волн в переменных Лагранжа. В случае плоских поверхностей разрывов показана невозможность существования чисто поперечных ударных волн в недеформированной упругой среде.

В нашей стране также проводились подобные исследования, первыми из них следует отметить работы Е.М. Черных [128, 126, 129]. Им также рассмотрены условия существования ударных волн [128] и получено решение автомодельной задачи для материала, подчиняющегося закону Гука, но до-

пускающего большие деформации. Геометрически нелинейная модель получалась путем замены в законе Гука тензора малых деформаций на тензор деформаций Альманси и учетом нелинейности во всех кинематических соотношениях. Развитием данного направления исследований послужили работы А.Д.Чернышова [130] и Г.Ф.Филатова [124, 122, 123]. В них получены условия существования поверхностей сильных разрывов с учетом предварительных деформаций и скорости распространения возможных типов ударных волн. Все эти исследования относятся к шестидесятым годам прошлого века.

В семидесятые-восемидесятые годы получен ряд новых важных результатов. Их основное отличие от предыдущих заключается в отказе от ограничений, с помощью которых строились первые математические модели. В более общей форме выбираются основные соотношения рассматриваются задачи с учетом предварительных деформаций, указываются условия существования продольных, квазипродольных и квазипоперечных ударных волн, вычисляются скорости их распространения, проводится термодинамический анализ необратимого процесса в ударной волне, рассматривается вопрос о поляризации волн. Решен ряд задач, допускающих автомодельный подход [59]. Здесь необходимо отметить работы А.А.Буренина и А.Д.Чернышова [35, 36, 38], которые показали, что производство энтропии в квазипродольных ударных волнах не зависит от предварительных деформаций, для некоторых материалов получен аналог теоремы Цемплена для идеального газа, т.е. показано, что и в упругой среде существуют только квазипродольные волны сжатия. Обнаружено, что в большинстве случаев на квазипродольных ударных волнах происходит уменьшение предварительных сдвиговых деформаций, а на квазипоперечных всегда присутствует уменьшение предварительного сжатия. Отметим работы [50, 59, 58, 65, 94, 124, 122, 123, 140, 147, 152, 164, 166]. В них рассмотрены особенности распространения ударных волн в нелинейной динамической теории упругости.

Чжу-Бо-Те [144, 145] рассмотрел распространение ударной волны в случае

несжимаемой упругой среды. Им впервые получена замкнутая система уравнений в разрывах, вычислены скорости распространения волн, зависящие от предварительных деформаций, разрыва касательного напряжения и деформаций. На примере идеальной несжимаемой резины получено условие существования ударной волны нагрузки, как следствие термодинамических ограничений на возможные разрывы. Проблемам распространения ударных волн в несжимаемой упругой среде посвящены работы [25, 91, 90, 103, 104, 146].

Важный вклад в развитие нелинейной теории упругости внесли А.Г. Куликовский и Е.И. Свешникова [89, 87, 86, 88, 113]. Система уравнений в разрывах в их работах записывается в переменных Лагранжа. В результате авторы детально изучили плоские ударные волны, условия их существования и условия эволюционности разрывов, а также ряд других вопросов, которые ставит математическая физика в краевых задачах с плоскими ударными волнами. Аналогичный метод исследования применялся в [167].

Э.В. Ленский изучал свойства комбинированных сильных разрывов для упругой среды, определяемой упругим потенциалом, зависящим от первых двух инвариантов тензора деформаций. В [150] рассматривались поверхности разрывов в материалах. В [132] рассматривались квазистационарные плоские разрывы в условиях плоской деформации при наличии анизотропии в свойствах материалов. Поверхностные разрывы на плоских границах нелинейно-упругих тел изучались Г.И. Быковцевым и его учениками [14, 15]. В [113] исследуются свойства упругой среды, имеющей слабую анизотропию, в [125] рассматриваются материалы, по-разному сопротивляющиеся сжатию и растяжению. Решению краевых задач динамики упругой среды с ударными волнами посвящены работы [1, 2, 33, 34, 35, 41, 113, 62, 78, 26], в которых рассматривались автомодельные задачи. В числе последних достижений в данной области следует отметить работы О.В. Дудко и Д.А. Потянихина [63]

Для решения неавтомодельных задач используются, в основном, различные модификации метода возмущений и лучевой метод.



Метод возмущений в динамике упругой среды впервые использовал У.К. Нигул [96] и А.Н. Гузь [60]. Нелинейные волновые уравнения [96] заменялись последовательностью линейных неоднородных уравнений. Обобщение данного метода на случай, когда в среде присутствуют поверхности разрывов деформаций, провели А.А. Буренин и В.А. Шаруда [41, 39]. Более того, было показано, что динамическая задача нелинейной теории упругости сбодится к сингулярной задаче метода возмущений, в которой в качестве внутреннего разложения выступает прифронтальная асимптотика. Данное асимптотическое разложение может быть построено на основе эволюционного уравнения [24, 68, 69, 70, 97, 103]. В [104] продемонстрированы приемы численного сращивания прифронтальных асимптотик с конечно-разностной аппроксимацией уравнений в областях, удаленных от ударных волн, на основе построения неявной конечно-разностной схемы.

Другой возможностью для построения приближенных решений является лучевой метод. Лучевой метод известен с 50-х гг прошлого века и является признанным мощным инструментом решения волновых задач, включающих нестационарные поверхности (объемные волны) или линии (поверхностные волны) сильных и слабых разрывов. Для этого используются одночленные или многочленные степенные ряды, коэффициентами которых служат скачки производных искомым функций. Обстоятельный обзор работ данного направления содержится в статье Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой [155]. Эту статью они посвятили светлой памяти своего учителя, выдающегося ученого-механика, профессора Г.И. Быковцева.

Лучевые разложения можно разделить на два основных типа. Первые используются преимущественно для аппроксимации физических полей регулярных функций, вторые - для аппроксимации физических полей сингулярных функций. В России разработкой лучевого метода, основанного на разложениях первого типа, активно занимались ученые-механики Ленинградской научной школы, идейным руководителем которой был Г.И.Петрашень. Этот

метод используется главным образом в задачах отражения, преломления и дифракции волн, популярен в сейсмологии и сейсморазведке. Метод развивался в работах В.М. Бабича и А.С. Алексеева при вычислении интенсивностей волновых фронтов в нестационарных задачах теории упругости [4, 3], включая случай неоднородной анизотропной среды [7] для определения напряжений. Впоследствии В.М. Бабич, В.С. Булдырев и И.А. Молотков [9] использовали разложения первого типа при исследовании волновых процессов различной природы.

Второй тип лучевых разложений используется при решении одномерных, плоских и трехмерных краевых задач, включающих поверхности сильных и слабых разрывов. Метод основан на теории условий совместности разрывов на движущихся поверхностях. Разработка теории таких поверхностей берет начало с работ Дж.Адамара [149], который заметил, что разрывы величин на движущихся поверхностях не могут быть произвольными, но связаны ограничениями, следующими из геометрии и кинематики таких поверхностей. Обобщение соотношений Дж.Адамара на случай разрывов производных от функций, терпящих разрыв на движущихся поверхностях, осуществил Т.Томас [119]. Выписанные им ограничения на разрывы производных были названы им геометрическими и кинематическими условиями совместности первого порядка. С их помощью Т.Томас [119] исследовал распространение и затухание криволинейных волн в однородной упругой изотропной среде. Теория рекуррентных условий совместности разрывов функций и их производных, обобщающая представления Т.Томаса, была разработана Г.И. Быковцевым и его учениками при параметрическом задании движения поверхности в прямоугольной декартовой системе координат [45]. В работах Е.А. Герасименко и В.Е. Рагозиной построена законченная теория рекуррентных условий совместности, включая случай декартовых [54] и произвольных криволинейных [55] координат. Объединение лучевой теории и теории разрывов Т.Томаса позволило двум группам исследователей, Дж. Ахенбаху и Д.Редди [137, 136] и Воронеж-

ской школе под руководством Г.И.Быковцева [11], независимо друг от друга и в различных формах предложить метод построения приближенных решений за поверхностями разрывов в линейных средах, названной авторами лучевым методом по аналогии с [8]. Способ построения лучевых разложений решения за фронтом волны разрывов основан на представлении его в виде степенного ряда по типу ряда Тейлора, коэффициентами которого являются неизвестные разрывы. Для последних, следуя условиям совместности, получают рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых уравнениями затухания. Подход, предложенный Г.И. Быковцевым, оказался наиболее перспективным. В дальнейшем Г.И. Быковцеву и его ученикам удалось таким способом решить целый ряд нестационарных динамических задач механики деформируемого твердого тела [11, 14, 15, 65, 107, 142, 160, 133, 44].

Н.А.Заварзина и В.М.Бабич развили лучевой метод для динамических задач в гипоупругой среде [10, 64]. Г.И. Быковцев и А.Г. Шаталов рассмотрели задачу о влиянии теплового потока на границу термоупругого полупространства с учетом конечной скорости распространения тепла и термоупругой связи [47]. Для трех типов термоупругих волн были получены рекуррентные соотношения на коэффициенты лучевого ряда. В работах Ю.А. Россихина и др. рассмотрены задачи о распространении плоских волн сильных разрывов в анизотропном термоупругом пространстве [110] и анизотропной пластине постоянной толщины [161], об ударе абсолютно жесткой сферы по границе упругого изотропного полупространства [156]. Таким образом, лучевые разложения второго типа удобны при решении задач, связанных с кратковременным приложением нагрузки к границам рассматриваемых тел, а также ударным воздействием, термическим ударом и т.д.

А.В. Чигарев [131] рассматривал распространение ударных волн в стохастически неоднородной упругой среде. Ю.А. Россихин [157, 106] изучал распространение поверхностей сильных разрывов произвольной формы в упругой слабо анизотропной среде с произвольной симметрией, в т. ч. с кубической

и гексагональной. В 1989 г. Ю.А. Россихин [108] указал способ регуляризации волновых характеристик, которые оказались неравномерно пригодными в области существования волнового решения. Дж. Ахенбах [135] изучал движение поверхностей сильных разрывов в термоупругой среде с конечной скоростью распространения тепла. Было показано, что две поверхности сильных разрывов: квазиупругая и квазитермическая, обладают экспоненциальным характером затухания.

Дж. Эриксен [148] изучал распространение эквиволюминальных поверхностей слабых разрывов в несжимаемых упругих материалах и показал, что для гладко изменяющихся полей внешних сил и тепловых источников, волны третьего и более высоких порядков в несжимаемой упругой среде подчиняются тем же законам, что и волны ускорений. К. Трусделл [165] обобщил этот результат на весь класс упругих материалов. Волнам ускорений в упругих средах посвящена также работа Р. Хилла [151] и др.

М.А. Гринфельд [58] рассматривал поверхности слабых разрывов (волны ускорений) и слабые ударные волны в нелинейном гипотупругом теле. Для таких волн были получены нормальные скорости и уравнения переноса, описывающие изменения разрывов производных произвольного порядка от исходных функций по нормали к волновой поверхности вдоль лучей. Слабые ударные волны в деформированной нелинейно-упругой среде рассматривали также Н.А. Заварзина и Г.Ф. Филатов [65]. Авторы получили систему рекуррентных уравнений, определяющую характер распространения и затухания слабых ударных волн.

Исследования, посвященные распространению и затуханию слабых и сильных разрывов в упруговязкопластической среде, проводили Г.И. Быковцев и Н.Д. Вервейко [42], а также Ю.А. Россихин [109]. Позднее Г.И. Быковцев и др. [43] рассматривали движение ступенчатой нагрузки со сверхзвуковой скоростью по границе упруговязкопластического полупространства. Исследованию лучевым методом пространственных динамических задач упруговязко-

пластичности и одномерных динамических задач течения реальной жидкости в трубах посвящена монография Н.Д. Вервейко [48]. В ней изложены основы лучевого метода решения пространственных задач и приведены примеры применения лучевого метода к распространению пластических волн нагрузки и разгрузки, волн гидроудара в гидролиниях переменного сечения. В [84, 85] рассматривались вопросы построения аналитического или численного решений динамических волновых задач в упруговязкопластических средах.

Распространение волн ускорений в трехмерных упругопластических телах рассматривали Т.Томас [119], Р.Хилл [151], Г.И. Быковцев и др. [46]. Были получены три типа волн ускорений и вычислены их скорости. Также исследованы процессы распространения и изменения со временем интенсивности пластических волн, волны разгрузки и волны нагрузки. Теория разрывов применялась для исследования волн разрывов в стержнях, слоях, пластинах и оболочках [153, 49], а также поверхностных волн сильных и слабых разрывов в нелинейно-упругих и упругопластических средах [13, 14] и поверхностных волн вдоль поверхностей кристаллических тел с конечной анизотропией [158]. Также одночленные лучевые разложения часто применяются в задачах об ударном взаимодействии, например в [162].

В краевых задачах, в которых решение необходимо строить во всей области движения волны, т.е. от фронта волны до граничной поверхности в фиксированный момент времени, или когда необходимо определить временную зависимость интересующих нас величин в фиксированной точке поля в данный момент времени, необходимо использовать многочленные лучевые разложения. Ю.Н.Подильчук и Ю.К.Рубцов [101] рассматривали задачи о распространении нестационарных волн в бесконечной изотропной упругой среде, возникающих при мгновенном нормальном нагружении на границе сферических и цилиндрических полостей в среде. В данном случае для построения временных зависимостей напряжений в каждой фиксированной точке граничной поверхности понадобилось вычислить около 20 членов лучевого

ряда. Что касается приближения по пространственной переменной в фиксированный момент времени, то этот вопрос изучался в работах Дж.Ахенбаха и Д.Редди [137], С.Т.Сун [163], Ю.А.Россихина и М.В.Шитиковой [162] и др.

Лучевой метод, предложенный в [11], непригоден для нелинейных сред при наличии ударных волн. Связано это, главным образом, с тем, что ударная волна имеет скорость, отличную от скорости распространения возмущений в среде, в силу чего не удастся получить обыкновенные дифференциальные уравнения для коэффициентов лучевого ряда на каждом шаге. Однако видоизменение методики, предложенное в [37], позволяет использовать лучевой метод и в этом случае. Идея заключалась в разложении коэффициентов лучевого ряда в степенные ряды в окрестности начального момента времени. На основе этого предположения был решен целый ряд одномерных задач динамики деформирования [142, 24, 159]. Построенные таким способом приближенные прифронтные разложения могут использоваться в схемах численных расчетов краевых задач динамики деформирования с целью выделения поверхностей разрывов. Разработкой этого направления активно занимаются А.А. Буренин, Е.А. Герасименко, П.В. Зиновьев, В.Е. Рагозина [28, 30] и интерес к этим задачам все возрастает.

Метод выделения разрыва, позволяющий рассчитывать разрывные решения без размывания скачков, изначально был предложен С.К.Годуновым и основан на использовании подвижных сеток. В расчетной области, с помощью известного соотношения на скачке, выделяется поверхность разрыва. Течение за фронтом является гладким и расчет его по явным или неявным схемам не вызывает больших проблем. Метод широко известен и эффективно используется при расчете газодинамических течений, для которых характерно присутствие различных поверхностей разрыва, положения которых неизвестны.

При выборе численной схемы сквозного счета для исследования распространения ударных волн и их взаимодействия нужно отдавать предпочте-

ние схемам повышенного порядка точности, позволяющим точнее описать картину решения, экономить время решения задач на ЭВМ. Однако, линейные разностные схемы второго и выше порядка аппроксимации немонокотонны: возникающие при расчетах нефизические осцилляции существенно искажают картину решения. Помехи, вызванные немонокотонностью, для ряда задач принципиальны. Это приводит к необходимости разработки приемов борьбы с ними. Таким приемом является, например, процедура введения в дифференциальные уравнения дополнительных членов, называемых искусственной вязкостью.

Другой способ основан на процедуре монотонизации, т.е. подстройки численного алгоритма в зависимости от характера решения на предыдущем временном слое. В результате строится нелинейная разностная схема, сохраняющая высокий порядок точности. К этому семейству методов можно отнести алгоритмы, предложенные И.О. Богульским [17, 18, 20]

С.К. Годунов предложил метод для расчета одномерных и многомерных задач газовой динамики. На каждом слое решение рассматривается как кусочно-постоянное, а для вычисления некоторых вспомогательных величин на промежуточных этапах используются формулы распада произвольного разрыва. На основе метода Годунова и его модификаций получено решение ряда задач динамической теории упругости как в плоской геометрии, так и в криволинейных системах координат [105]. Существенная сложность определяющих уравнений твердого тела и специфика этих задач не позволяют непосредственно переносить результаты из области гидромеханики на задачи твердого тела. Подробный обзор и анализ различных подходов к решению задач динамической упругости и пластичности можно найти в работе С.Б.Афанасьева и В.Г.Баженова [5]. Существующие методы решения задач динамики твердых тел можно представить в виде трех направлений: методы конечных элементов, характеристические и сеточно-характеристические методы, сеточные и конечно-разностные методы.

Под методами конечных элементов понимают подходы, основанные на дискретизации расчетной области и формировании конечных соотношений между искомыми величинами на основе механики в вариационной форме, минуя стадию формулирования краевых задач для систем дифференциальных уравнений. Такой подход дает определенные преимущества при описании процесса деформирования тел со сложной геометрией. Метод зарекомендовал себя для решения статических задач и интенсивно используется при исследовании нестационарных процессов в деформируемых твердых телах. Среди отечественных работ этого направления отметим работы С.Б. Афанасьева, В.Г. Баженова, А.В. Кочеткова и др. [6], И.О. Богульского [19], Н.Г.Бураго и В.Н. Кукуджанова [23], С.Н. Коробейникова [83]. Как сочетание и обобщение методов конечных элементов и вариационно-разностных методов можно упомянуть дискретно-вариационный метод, разработанный для исследования нестационарных процессов в слоистых и композитных средах. Характеристические и сеточно-характеристические методы основаны на записи системы дифференциальных уравнений в характеристической форме с последующей их конечно-разностной аппроксимацией. Различают прямой и обратный характеристический метод. Среди работ, посвященных применению сеточно-характеристического метода для решения динамических задач деформирования упругих и упругопластических тел, можно указать работы В.И. Кондаурова и В.Н. Кукуджанова [80], В.И. Кондаурова, И.Б. Петрова, А.С. Холодова [82, 81].

Сеточные методы решения нестационарных задач механики деформируемого твердого тела основаны на аппроксимации гиперболической системы дифференциальных уравнений, описывающей движение среды, краевых и начальных условий для нее. В настоящее время это один из наиболее разработанных способов численного интегрирования задачи. Алгоритм представляет собой последовательный пересчет известного решения с нижнего слоя по времени на следующий верхний слой, начиная с известных начальных условий.



Известны и многослойные методы, когда в вычислении решения на каждом временном шаге участвуют несколько предыдущих слоев.

В зависимости от того, дает ли такое вычисление непосредственно значения величин на очередном слое, или же для их определения необходимо решить систему алгебраических уравнений, различают явные и неявные схемы. Явные схемы имеют следующие преимущества: решение получается сразу, в явном виде, не нужно решать дополнительные системы уравнений, в силу этого упрощается оценка решения, получаемого на очередном шаге метода.

Преимущество неявных схем состоит в том, что они в большинстве случаев абсолютно устойчивы, а значит, допускают больший шаг по времени, что позволяет значительно сократить количество вычислений.

Сеточным методам посвящены работы И.О.Богульского, Ю.М.Волчкова, Г.В.Иванова, В.Д.Кургузова [51, 52, 53]. В [112] В.М. Садовский провел численное моделирование разрывных решений задач динамики упругопластических сред на основе теории вариационных неравенств. Преимущество такого подхода в том, что в виде вариационных неравенств единообразно формулируются как ограничения, содержащиеся в определяющих соотношениях упругопластических тел, так и кинематические ограничения на контактных границах. В [112] предложен ряд численных алгоритмов решения задач, допускающих постановку в виде вариационных неравенств. Полный обзор работ, посвященный численному моделированию динамических задач, приводится в [71].

В настоящей работе предлагается использовать специально построенные прифронтные лучевые разложения для расчета краевых задач динамики деформирования с целью выделения разрывов. Она состоит из трех глав.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней обсуждаются особенности постановок краевых задач динамики нелинейно упругой среды. Приводятся основные соотношения, выписаны условия существования ударных волн, вычислены скорости их распространения.

Во второй главе рассматриваются решения ряда одномерных задач динамики деформируемого тела. Для получения приближенных аналитических решений используется лучевой метод. Рассматриваются особенности конструирования конечно-разностных схем решения, основанных на сращивании прифронтальных лучевых разложений и сеточных методов интегрирования уравнений движения среды в областях деформирования.

В третьей главе рассматривается решение лучевым методом плоских задач с поверхностями разрывов ненулевой кривизны, а также изложены особенности сращивания численного и аналитического решений в данном случае. Построены конечно-разностные схемы расчетов ударного деформирования упругого полупространства, которые за счет включения в них прифронтальных лучевых асимптотик позволяют отслеживать на каждом временном слое положения ударных волн.

В главах используется двойная нумерация формул. Первый номер обозначает главу. На протяжении главы нумерация сквозная. Рисунки и формулы размещены в тексте.

# Глава 1

## Некоторые положения нелинейной теории упругости

### 1.1 Модель нелинейно упругого тела.

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат. В этой системе движение точки сплошной среды некоторого выделенного объема определяется зависимостями

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t). \quad (1.1)$$

Здесь  $a_i$  – координаты Лагранжа,  $x_i$  – координаты Эйлера,  $t$  – время. В дальнейшем считаем, что все латинские индексы принимают значения 1,2,3, а греческие – 1,2. Условие, при котором возможно задание движения точки в виде (1.1), формулируется посредством гипотезы сплошности:

$$\det\{a_{i,j}\} \neq 0. \quad (1.2)$$

Здесь и далее запятой обозначено дифференцирование по соответствующей эйлеровой координате.

Введем меру деформации среды. Для этого рассмотрим две близкие точки среды  $A$  и  $B$ . Их положения в недеформированном состоянии обозначим соответственно  $A_0$  и  $B_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= dS^2 = dx_i dx_i, & |A_0 B_0|^2 &= dS_0^2 = da_i da_i, \\ dS^2 - dS_0^2 &= dx_i dx_i - da_i da_i = \\ &= (\delta_{kj} - a_{i,j} a_{i,k}) dx_i dx_k = 2\alpha_{jk} l_j l_k dS^2, \\ l_j &= \frac{dx_j}{dS}, \alpha_{jk} = \frac{1}{2}(\delta_{jk} - a_{i,k} a_{i,j}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тензор с компонентами  $\alpha_{jk}$  называется тензором деформации Альманси. Он характеризует деформацию элементарного отрезка в точке  $A$  с направляющими косинусами  $l_j$ . По повторяющимся индексам  $i$  и  $j$  производится суммирование. Используя вектор перемещений  $u_i = x_i - a_i$ , перепишем компоненты тензора Альманси в виде:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}). \quad (1.4)$$

Вектор скорости  $v_i$  вычислим как полную производную по времени от вектора перемещений  $u_i$ . В пространственных переменных Эйлера для компонент  $v_i$  получим:

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}. \quad (1.5)$$

Аналогично формуле (1.5) определим вектор ускорения точки:

$$w_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} \quad (1.6)$$

Движение нелинейно-упругой среды подчиняется законам сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV &= \int_S \sigma_{ij} \nu_j dS, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{v_i v_i}{2} + e \right) dV &= \int_S (\sigma_{ij,j} v_i \nu_j - q_i \nu_j) dS, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $\rho$  – плотность среды в текущий момент,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений Коши,  $\nu_i$  – компоненты внешней нормали к  $S$  – поверхности, ограничивающей объем  $V$ ,  $q_i$  – компоненты теплового потока,  $e = e(\alpha_{ij}, S)$  – плотность распределения внутренней энергии. Таким образом, любое состояние нелинейно-упругой среды описывается тензором деформаций  $\alpha_{ij}$  и плотностью распределения энтропии  $s = s(x_1, x_2, x_3, t)$ , причем  $\frac{\partial e}{\partial s} = T$ , где  $T$  – абсолютная температура.

Если записать (1.7) в локальной форме, получим уравнения неразрывно-

сти, движения и баланса внутренней энергии:

$$\dot{\rho} + (\rho v_i)_{,i} = 0, \quad (1.8)$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho w_i, \quad (1.9)$$

$$\rho \left( \dot{E} + E_{,j} v_j \right) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - q_{j,j}, \quad (1.10)$$

где  $\varepsilon = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$  – тензор скоростей деформаций Эйлера. Закон сохранения массы (1.8) можно представить в виде

$$\rho = \rho_0 \sqrt{1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - \frac{8}{3}I_3}, \quad (1.11)$$

где  $\rho_0$  – плотность среды в свободном состоянии,  $I_1 = \alpha_{ii}$ ,  $I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}$ ,  $I_3 = \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}$  – инварианты тензора деформаций.

Уравнение (1.10) с учетом закона баланса энтропии

$$\rho T \frac{dS}{dt} + q_{j,j} = 0 \quad (1.12)$$

приводит к известной формуле Мурнагана

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ki}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad \rho_0 W = E. \quad (1.13)$$

Для несжимаемой среды в (1.13) следует ввести неизвестную функцию добавочного гидростатического давления  $p = p(\alpha_{ij}, \theta)$ ,  $\theta = T_0^{-1}(T - T_0)$ ,  $T_0$  – температура в свободном состоянии:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ki}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}). \quad (1.14)$$

Соотношения, выписанные выше, недостаточны для определения всех входящих в них функций. Для замыкания системы уравнений нелинейно-упругой среды необходимо дополнительно задать вид функции  $W$  и закон теплопроводности. Последние выбираются экспериментально и определяют конкретную модель изучаемого вещества.

Далее будем рассматривать изотропную среду, заданную упругим потенциалом  $W = W(I_1, I_2, I_3)$  вида:

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \dots \quad (1.15)$$

Здесь  $\lambda, \mu, l, m, n$  – упругие модули среды, при этом  $\lambda, \mu$  отождествляем с коэффициентами Ламе.

В случае несжимаемой среды ( $\rho = \rho_0$ ) соотношение (1.11) можно привести к виду

$$I_1 - I_2^2 + I_2 + \frac{2}{3}I_1^3 - 2I_1I_2 + \frac{4}{3}I_3 = 0, \quad (1.16)$$

откуда следует, что лишь два инварианта тензора деформаций остаются независимыми. В этом случае упругий потенциал можно задать соотношением

$$W = (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1I_2 - \theta I_1^3 + \dots \quad (1.17)$$

Здесь  $\mu$  – модуль сдвига,  $a, b, \kappa, \theta$  – упругие модули более высокого порядка.

## 1.2 Ударные волны в нелинейно упругой среде.

Ударной волной называется движущаяся поверхность  $\Sigma$ , на которой функции, описывающие движение среды, могут претерпевать разрыв первого рода, т.е. менять свои значения скачкообразно. В этом случае на  $\Sigma$  законы сохранения в дифференциальной форме (1.8) - (1.10) не выполняются. Однако, из выполнения на ударной волне уравнений (1.7) следуют ограничения на возможные разрывы функций, которые называются динамическими условиями совместности разрывов. Следствием закона сохранения массы на  $\Sigma$  является соотношение

$$[\rho(v_i\nu_i - G)] = 0 \quad (1.18)$$

Закон сохранения импульса требует, чтобы на  $\Sigma$  выполнялось равенство

$$[\sigma_{ij}]\nu_j = \rho^+(v_j^+\nu_j - G)[v_i] \quad (1.19)$$

Следствие закона сохранения энергии записывается в виде:

$$\sigma_{ij}^+[v_i]\nu_j = \rho^+(v_j^+\nu_j - G)\left(\frac{[v_i][v_i]}{2} - [e]\right) - [q_j]\nu_j \quad (1.20)$$

Кроме того, на ударных волнах выполняются геометрические и кинематические условия совместности разрывов. Если  $x_i = x_i(t, y^1, y^2)$  – параметрическое уравнение поверхности разрывов, то данные условия записываются в

форме:

$$[f_{,i}] = \left[ \frac{\partial f}{\partial \nu} \right] \nu_i + a^{\alpha\beta} [f]_{,\beta} x_{i,\alpha} \quad (1.21)$$

$$[f] = \frac{\delta [f]}{\delta t} - G \left[ \frac{\partial f}{\partial \nu} \right] \quad (1.22)$$

$$[f] = f^+ - f^-, \frac{\partial f}{\partial \nu} = f_{,i} \nu^i \quad (1.23)$$

Здесь  $\nu_i$  – единичная нормаль к поверхности разрывов  $\Sigma$ , направленная в сторону движения  $\Sigma$ ; индексы “+” и “-” соответствуют предельным значениям величин перед фронтом волны и за ним соответственно;  $a^{\alpha\beta}$  – компоненты поверхностной метрики на  $\Sigma$ ;  $G$  – скорость движения  $\Sigma$  в направлении нормали; обозначению “ $f$ ” могут соответствовать компоненты любого тензорного поля на  $\Sigma$  или в пространстве; латинскими или греческими индексами после запятой обозначена операция ковариантного дифференцирования по пространственной или поверхностной координате  $y^\alpha$ ;  $\frac{\delta}{\delta t}$  – операция дифференцирования по времени в данной точке  $\Sigma$  (дельта-производная). Геометрические и кинематические условия совместности произвольного порядка можно найти в [54] и [55] для прямоугольной декартовой и криволинейной пространственных систем координат соответственно. Их использование в лучевом методе позволяет строить сколь угодно точное приближение к решению в окрестности волновых фронтов.

### 1.3 Возможные типы и скорости ударных волн

Исследование условий разрешимости уравнений (1.19) позволяет установить возможные типы поверхностей сильных разрывов, которые могут распространяться в среде, а также условия их возникновения и скорости распространения. Представим разрыв компоненты тензора градиента перемещений в форме

$$[u_{i,j}] = \tau \nu_i \nu_j + \gamma \mu_i \nu_j, \quad (1.24)$$

$$\gamma = (\tau^\beta \tau_\beta)^{\frac{1}{2}}; \mu_i \mu_i = 1; \mu_i \nu_j = 0.$$

где  $\tau$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  – компоненты волнового вектора.

С использованием (1.24), подстановкой в динамическое условие совместности (1.19) напряжений, вычисленных согласно (1.13), (1.15), геометрических и кинематических условий совместности (1.21) и (1.22) возможно получить систему уравнений

$$\begin{aligned}
& A\tau + B\gamma^2 + z_{st}\gamma\mu_s\nu_t + \omega_{st}\gamma^2\mu_s\mu_t = 0, \\
& [C\gamma\mu_s + (p_{st}\tau + n_{st}\gamma^2)\nu_t + q_{st}\gamma\mu_t + r_{kt}\gamma^2\mu_k\mu_s\nu_t] x_{s,\gamma} = 0, \\
& \gamma^2 = \tau^\beta\tau_\beta, \mu_s = \gamma^{-1}\tau^\beta x_{s,\beta}, \\
& \mu_s\mu_s = 1, \mu_s\nu_s = 0, \\
& A = \lambda + 2\mu - \rho_0G^2 + (2l + 6m - 4\lambda - 2\mu + \rho_0G^2)u_{k,k} + \\
& \quad + (4l + 6n - 3\lambda - 12\mu - \rho_0G^2)u_{s,t}\nu_s\nu_t - \\
& \quad - \left[ 3(l + m + n) - \frac{7}{2}\lambda - 7\mu - \rho_0G^2 \right] \tau + 2\rho_0Gv_j\nu_j + \dots, \\
& B = \frac{\lambda}{2} + 2\mu - \frac{l}{2} - \left( \frac{3}{2}\lambda + 2\mu - \frac{5}{2}l - 3m - \frac{3}{4}n \right) u_{k,k} - \\
& \quad - (\lambda + 4\mu - 3l - 6n)u_{s,t}\nu_s\nu_t + \\
& \quad + \left( \frac{5}{2}\lambda + 6\mu - \frac{11}{2}l - 3m - \frac{27}{4}n \right) \tau + \dots, \\
& C = \mu - \rho_0G^2 + (l - \lambda - \mu + \rho_0G^2) u_{k,k} + \left( \frac{3}{2}n - 2\mu \right) u_{s,t}\nu_s\nu_t - \\
& \quad - \left( l + \frac{3}{2}n - \lambda - 3\mu - \rho_0G^2 \right) \tau + 2\rho_0v_j\nu_j + \dots, \\
& \quad n_{st} = - \left( \frac{\lambda}{2} + \mu - l - \frac{3}{2}n \right) (u_{s,t} + u_{t,s}) + \dots, \\
& p_{st} = \left( l + \frac{3}{2}n - \lambda - 3\mu - \rho_0G^2 \right) u_{s,t} + \left( l + \frac{3}{2}n - \lambda - 4\mu \right) u_{t,s} + \dots, \\
& \quad q_{st} = \left( \frac{3}{4}n - \mu - \rho_0G^2 \right) u_{s,t} + \left( \frac{3}{4}n - \mu \right) u_{t,s} + \dots, \\
& r_{st} = (2l + 3n - \lambda - 2\mu)u_{s,t} + \left( l + \frac{3}{2}n + \mu - \rho_0G^2 \right) u_{t,s} + \dots, \\
& \quad \omega_{st} = \frac{3}{4}n(u_{s,t} + u_{t,s}) + \dots,
\end{aligned}$$



$$z_{st} = \left( l + \frac{3}{2}n - \lambda - 4\mu \right) u_{s,t} + \left( l + \frac{3}{2}n - 2\mu - \rho_0 G^2 \right) u_{ts} + \dots$$

Здесь и далее индексы “+” у компонент тензора градиента перемещений опущены.

Эту систему можно переписать в форме, не зависящей от выбора поверхностных координат:

$$\begin{aligned} A\tau + B\gamma^2 + z_{st}\gamma\mu_s\nu_t + \omega_{st}\gamma^2\mu_s\mu_t &= 0, \\ C\gamma + (p_{st}\tau + m_{st}\gamma^2)\mu_s\nu_t + q_{st}\gamma\mu_s\mu_t &= 0, \\ (p_{st}\tau + n_{st}\gamma^2)\lambda_s\nu_t + q_{st}\gamma\lambda_s\mu_t &= 0, \\ \mu_s\nu_s = 0, \mu_s\mu_s = 1, \lambda_i = \epsilon_{ijk}\nu_j\mu_k, & \end{aligned} \quad (1.25)$$

где  $\epsilon_{ijk}$  – компоненты тензора, составленного из символов Леви-Чивита.

Данная система пяти уравнений относительно шести неизвестных  $G$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$  и  $\mu_s$  может быть исследована на разрешимость, если положить интенсивность продольного разрыва  $\tau$  или поперечного разрыва  $\gamma$  заданными. При этом деформации  $u_{i,j}$  и движение  $\dot{u}_i$  среды перед поверхностью разрывов  $\Sigma$  считаем известными. Также полагаем известной геометрию поверхности разрывов, т.е. считаем вектор нормали  $\nu_i$  заданным.

Рассмотрим случай плоских одномерных ударных волн. Пусть ось  $x_1$  направлена ортогонально поверхности разрывов, тогда из всех компонент тензора градиента перемещений только  $u_{1,1}$ ,  $u_{2,1}$  и  $u_{3,1}$  могут быть отличными от нуля. Следствием (1.25) в данном случае будут следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A\tau + D\psi &= 0, \\ C\mu_2\gamma + Su_{2,1}\tau + P_2\psi &= 0, \\ C\mu_3\gamma + Su_{3,1}\tau + P_3\psi &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь величина  $A$  вычисляется с учетом ограничений на компоненты тензора градиента перемещений и  $\nu_i$ , и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\psi &= [u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2], \quad D = \beta + \phi_1 (u_{1,1} - \tau) + \dots, \\
S &= 2\beta + \mu - \rho_0 G^2 + 2(\phi_1 - \mu) u_{1,1} - (\phi_1 - \mu - 2\rho_0 G^2) \tau + \\
&\quad + 3\rho + 0G^2 m_1 + \dots, \\
\phi_1 &= \frac{5}{2}\lambda + 6\mu - \frac{11}{2}l - 3m - \frac{27}{4}n, \\
P_i &= \left( \frac{\lambda}{2} + \mu - l - \frac{3}{2}n \right) (u_{i,1} - \mu_i \gamma) + \dots, \quad i = 2, 3.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Система (1.26) разрешима в трех случаях.

1. Квазипродольная ударная волна. Полагая  $\tau$  заданным, получим

$$\begin{aligned}
G_1 &= C_1 \left( 1 + a_1 u_{1,1} + m_1 + a_2 \tau + \frac{1}{4} \left( \frac{6\theta_1}{\lambda + 2\mu} - 2a_1 - 1 \right) u_{1,1}^2 - \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{3\theta_1}{\lambda + 2\mu} - 2a_1 + 2a_1 a_2 - 1 \right) u_{1,1} \tau + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\theta_1}{\lambda + 2\mu} + a_2 - \frac{a_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \tau^2 + \dots \right),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$a_1 = 3 \frac{l + m + n}{\lambda + 2\mu} - \frac{7}{2}, \quad a_2 = \frac{1 - a_1}{2},$$

$$\theta_1 = -12(l + m + n) + \frac{9}{2}(\lambda + 2\mu),$$

$$C_1 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m_1 = \frac{\dot{u}_1}{C_1},$$

При отсутствии сдвиговых деформаций перед  $\Sigma$  квазипродольная волна становится продольной. В частности, передним фронтом деформаций, распространяющихся в недеформированной среде, если это поверхность разрывов деформаций, является продольная ударная волна.

Квазипродольная волна всегда плоскополяризована, то есть не меняет направленность предварительного сдвига, но может менять его интенсивность наряду с интенсивностью объемных деформаций. На такой волне составляющие волнового вектора  $\gamma$  и  $\tau$  связаны соотношением:

$$\gamma = \delta (u_{2,1} \mu_2 + u_{3,1} \mu_3) \tau + \dots, \quad \delta = \frac{2\beta}{\lambda + 2\mu} - 1. \tag{1.29}$$

2. Квазипоперечная ударная волна. Полагая заданным  $\gamma$ , имеем:

$$\begin{aligned}
G_2 = C_2 & \left( 1 + b_1 u_{1,1} + m_2 + \left( \frac{\phi_1}{2\mu} + b_1 - \frac{b_1^2}{2} - \frac{1}{4} \right) u_{1,1}^2 + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\eta_1}{2\mu} + 2b \right) u_{2,1}^2 - 3b u_{2,1} \gamma + \right. \\
& \left. + b\gamma^2 + (b+1) u_{1,1} m_1 + m_1^2 + \dots \right), \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad b = \frac{\eta_1}{2\mu} - \frac{\beta^2}{\mu(\lambda + \mu)}, \quad (1.30) \\
& b_1 = \frac{\beta}{\mu} + 1, \\
\phi_1 = & \frac{5}{2}\lambda + 6\mu - \frac{11}{2}l - 3m - \frac{27}{4}n, \\
\eta_1 = & \frac{\lambda}{2} + \mu - l - \frac{3}{2}n, \\
\beta = & \frac{l}{2} + \frac{3}{4}n - \frac{\lambda}{2} - 2\mu, \quad m_2 = \frac{\dot{u}_1}{C_2}.
\end{aligned}$$

Квазипоперечная волна не изменяет направленность предварительного сдвига, но на ней скачкообразно изменяется его интенсивность. Она и только она может быть передним фронтом распространяющихся в недеформированную среду деформаций изменения формы.

3. Ударная волна изменения направления сдвига. Положив  $\tau = 0$ , получим решение

$$\begin{aligned}
G_3 = C_2 & \left( 1 + b_1 u_{1,1} + m_1 + \frac{1}{4} \left( \frac{2\phi_1}{\mu} + 4b_1 - 2b_1^2 - 1 \right) u_{1,1}^2 + \right. \\
& \left. + \frac{\eta_1}{2\mu} \gamma + (b+1) u_{1,1} m_1 + m_1^2 + \dots \right) \quad (1.31)
\end{aligned}$$

Данная поверхность разрывов возможна в среде только при наличии предварительных деформаций. Интенсивность предварительного сдвига на такой волне не меняется, но изменяется скачкообразно его направленность. Скорость распространения данной волны определяется только предварительными деформациями.

Рассмотрим случай несжимаемой упругой среды. Следствиями условий (1.19), (1.22) на плоской ударной волне будут следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
[\sigma_{11}] = 0, \quad [\sigma_{i1}] = -\rho G [v_i], \quad [v_i] = -G\tau_i, \\
\tau_i = [u_{i,1}], \quad [v_1] = 0, \quad i = 2, 3. \quad (1.32)
\end{aligned}$$

Из формулы Мурнагана для несжимаемой упругой среды (1.14) в одномерном случае можно получить

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= a - \mu - p - \beta_1 m - \beta_2 m^2 - \dots, \\
\sigma_{i,1} &= u_{i,1} (\mu + \gamma_1 m + \gamma_2 m^2 + \dots), \quad i = 2, 3, \\
m &= u_{2,1}^2 + u_{2,2}^2,
\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= a + \mu + b + \frac{\kappa}{2}, \quad \beta_2 = a + b + \frac{3}{4}\theta + \frac{7}{4}\kappa, \\
\gamma_1 &= a + b + \kappa, \quad \gamma_2 = \frac{3}{4}(\theta + \kappa).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Подстановка (1.33) в (1.32) позволяет получить

$$\begin{aligned}
(u_{i,1} - \tau_i) (\gamma_1 [m] + \gamma_2 (2m[m] + [m]^2) + \dots) + \\
\tau_i (\mu + \gamma_1 m + \gamma_2 m^2 + \dots) = \rho G^2 \tau_i, \quad i = 2, 3.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Умножим первое уравнение из (1.35) ( $i = 2$ ) на  $\tau_3$ , второе ( $i = 3$ ) – на  $\tau_2$ , и вычтем одно из другого. В результате получим условие существования плоской одномерной ударной волны в несжимаемой упругой среде:

$$(\tau_3 (u_{2,1} - \tau_2) - \tau_2 (u_{3,1} - \tau_3)) [m] = 0. \tag{1.36}$$

Соотношение (1.36) может выполняться в двух случаях.

1. В случае  $\tau_3 (u_{2,1} - \tau_2) - \tau_2 (u_{3,1} - \tau_3) = 0$ ,  $[m] \neq 0$  имеем

$$\frac{u_{3,1}}{u_{2,1}} = \frac{u_{3,1}^-}{u_{2,1}^-} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \tag{1.37}$$

Из (1.37) следует, что поверхность разрывов является плоскополяризованной, и на такой ударной волне может изменяться только интенсивность предварительного сдвига  $m$  без изменения его направленности. Скорость распространения такой волны, согласно (1.35) и (1.37), можно представить в виде

$$\begin{aligned}
G = \left\{ \frac{1}{\rho} (\mu + \gamma_1 m + \gamma_2 m^2 + \dots) + \right. \\
\left. + \frac{1}{\rho \tau_2} (u_{2,1} - \tau_2) [m] (\gamma_1 + \gamma_2 (2m + [m]) + \dots) \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

2. Случай  $[m] = 0$  соответствует нейтральной волне, не изменяющей интенсивность предварительных сдвиговых деформаций, а меняющей лишь их направленность. Для скорости такой волны из (1.35) получаем

$$G = \left\{ \frac{1}{\rho} (\mu + \gamma_1 m + \gamma_2 m^2 + \dots) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.39)$$

Отметим, что скорость такой поверхности разрывов, распространяющейся в несжимаемой среде, всегда меньше скорости плоскополяризованной ударной волны.

Пусть теперь на деформированное состояние не наложено ограничение его одномерности. Тогда систему (1.25) можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_1 \tau + D\psi + S_1 \gamma &= 0 \\ (E_2 \mu_2 + T_2 \mu_3) \gamma + S_2 \tau + k_2 \psi &= 0, \\ (E_3 \mu_3 + T_3 \mu_2) \gamma + S_3 \tau + k_3 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

В (1.40) предполагается, что ось  $x_1$  направлена перпендикулярно поверхности разрывов в направлении ее распространения, оси  $x_2$  и  $x_3$  в плоскости, касательной к  $\Sigma$ , и введены обозначения

$$\begin{aligned} S_1 &= (2\beta + \lambda + 2\mu + \phi_3 (u_{1,1} - \tau) + \rho_0 G^2 (m_1 + \tau)) (u_{1,2} \mu_2 + u_{1,3} \mu_3) + \\ &+ (\phi_4 u_{2,2} + \phi_7 u_{3,3}) (2u_{2,1} \mu_2 - \mu_2^2 \gamma) + (\phi_4 u_{3,3} + \phi_7 u_{2,2}) (2u_{3,1} \mu_3 - \mu_3^2 \gamma) + \\ &+ \zeta_1 ((u_{2,3} + u_{3,2}) (u_{2,1} \mu_3 + u_{3,1} \mu_2 - \mu_2 \mu_3 \gamma) + u_{1,2} u_{3,2} \mu_3 + u_{1,3} u_{2,3} \mu_2) + \\ &+ \zeta_2 (u_{1,2} u_{2,3} \mu_3 + u_{1,3} u_{3,2} \mu_2) + \phi_5 (u_{2,2} u_{1,2} \mu_2 + u_{3,3} u_{1,3} \mu_3) + \\ &+ \phi_6 (u_{3,3} u_{1,2} \mu_2 + u_{2,2} u_{1,3} \mu_3) + \dots, \\ E_2 &= \mu - \rho_0 G^2 + 2\beta u_{i,i} + (2\beta + \mu + \rho_0 G^2) u_{1,1} - (2\beta + \mu - \rho_0 G^2) \tau + \\ &+ (l - \lambda - \mu + \rho_0 G^2) u_{3,3} + \left( \alpha_2 + \frac{3}{2} \rho_0 G^2 \right) u_{2,2}^2 + \\ &+ \left( \alpha_1 + \frac{1}{2} \rho_0 G^2 \right) u_{1,1}^2 - 2\alpha_1 u_{1,1} \tau + (\alpha_1 - \rho_0 G^2) \tau^2 - \\ &- (\alpha_5 - \rho_0 G^2) u_{3,3} \tau + (\alpha_5 - l + \lambda + \mu + \rho_0 G^2) u_{2,2} u_{3,3} + \\ &+ \eta_1 (\gamma + u_{1,2}^2 + u_{1,3}^2) + \eta_2 u_{1,2}^2 + (2\eta_2 + \rho_0 G^2) u_{1,2} u_{2,1} - \eta_2 \mu_2 u_{1,2} \gamma + \\ &+ \eta_3 (u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2) + (\eta_2 + \rho_0 G^2) (u_{1,3} u_{3,1} + u_{2,3} u_{3,2}) + \eta_4 u_{2,3} (u_{2,3} + u_{3,2}) + \\ &+ 2\rho_0 G^2 \left( m_1 \left( 1 - u_{3,3} - \tau - \frac{m_1}{2} \right) + m_2 u_{1,2} + m_3 u_{1,3} \right) + \dots, \\ T_2 &= \left( \frac{3}{4} n - 2\mu \right) u_{3,2} + \left( \frac{3}{4} n - \mu - \rho_0 G^2 \right) u_{2,3} + \eta_2 (u_{1,2} + u_{2,1} - \mu_2 \gamma) u_{1,3} + \\ &+ \eta_4 u_{1,2} u_{1,3} + \xi_1 u_{3,2} (u_{1,1} + u_{2,2} - \tau) + \xi_2 u_{3,2} u_{3,3} + \rho_0 G^2 (m_1 + \tau) u_{2,3} + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 = & 2\beta u_{1,2} + (2\beta + \mu - \rho_0 G^2) u_{2,1} + \alpha_2 u_{1,2} (2u_{1,1} - \tau) + 2\alpha_1 u_{2,1} u_{1,1} - \\
& - (\alpha_1 - 2\rho_0 G^2) \tau u_{2,1} + \alpha_3 u_{2,2} (u_{1,2} + u_{2,1}) + (\alpha_5 + \rho_0 G^2) u_{3,3} u_{2,1} + \\
& + (\alpha_5 - l + \lambda + \mu) u_{3,3} u_{1,2} + (\xi_1 u_{3,2} - \rho_0 G^2 u_{2,3}) u_{3,1} + 3\rho_0 G^2 m_1 u_{2,1} + \dots,
\end{aligned}$$

$$k_2 = \eta_1 (u_{1,2} + u_{2,1} - \mu_2 \gamma) + \dots,$$

$$\phi_1 = \frac{5}{2}\lambda + 6\mu - \frac{11}{2}l - 3m - \frac{27}{4}n,$$

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{3}{2}l + \frac{3}{4}n - \lambda - 3\mu,$$

$$\phi_4 = \frac{3}{2}\lambda + 4\mu - 3l - 3m - \frac{15}{4}n,$$

$$\phi_5 = -\lambda + 4\mu - \frac{7}{2}l - 6n,$$

$$\phi_6 = \frac{3}{2}\lambda + 2\mu - 3l - \frac{3}{2}n,$$

$$\phi_7 = \frac{3}{2}\lambda + 2\mu - \frac{5}{2}l - 3m - \frac{3}{4}n,$$

$$\alpha_1 = \phi_2 - \frac{l}{2}, \alpha_2 = \phi_1 - \mu, \alpha_3 = \phi_5 + 4\lambda + 2\mu - \frac{7}{2}l - 6m - \frac{3}{2}n,$$

$$\alpha_4 = \theta_5 - l, \alpha_5 = \phi_6 + 3\lambda + \mu - l - 6m,$$

$$\theta_1 = \frac{9}{2}(\lambda + 2\mu) - 12(l + m + n),$$

$$\theta_2 = \frac{13}{2}\lambda + 7\mu - 10l - 24m - 3n,$$

$$\theta_3 = \frac{7}{2}\lambda + \mu - 3l - 18m,$$

$$\theta_4 = 7\lambda + 2\mu - 4l - 30m,$$

$$\theta_5 = \frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2}l - 3m,$$

$$\zeta_1 = 2\mu - \frac{l}{2} - 3n, \zeta_2 = -\frac{3}{2}n,$$

$$\eta_1 = \frac{\lambda}{2} + \mu - l - \frac{3}{2}n, \eta_2 = -\mu - l - \frac{3}{2}n,$$

$$\eta_3 = \eta_1 - \mu + \frac{3}{4}n,$$

$$\eta_4 = \mu - \frac{3}{4}n,$$

$$\xi_1 = \lambda + 4\mu - 2l - \frac{15}{2}n,$$

$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{9}{4}n - \mu.$$

Коэффициенты  $E_3$ ,  $T_3$ ,  $S_3$ ,  $k_3$  получаются из  $E_2$ ,  $T_2$ ,  $S_2$ ,  $k_2$  заменой индексов 2 на 3.

Аналогию с одномерным случаем получаем, положив  $u_{2,3} = u_{3,2} = 0$ . Оказывается, что, как и в одномерном случае (1.26), система (1.40) допускает три различных семейства решений, соответствующих случаю квазипродольных, квазипоперечных и нейтральных волн.

Выберем локальную систему координат таким образом, чтобы  $\mu_2 = 1$ ,  $\mu_3 = 0$ . Тогда при выполнении условия  $u_{1,3} = u_{3,1} = 0$  в среде возникает квазипродольная волна. Скорость ее определяется интенсивностью  $\tau$  и деформированным состоянием перед волной. Она подчиняется следующему закону:

$$\begin{aligned}
G = & C_1 (1 + a_1 u_{1,1} + a_2 \tau + a_3 (u_{2,2} + u_{3,3}) + m_1 + \\
& + \left( \frac{3\theta_1}{2(\lambda + 2\mu)} - \frac{a_1^2}{2} - \frac{1}{4} \right) u_{1,1}^2 + \\
& + \left( \frac{\theta_3}{2(\lambda + 2\mu)} + a_3 - \frac{a_3^2}{2} + \frac{1}{4} \right) (u_{2,2}^2 + u_{3,3}^2) + \\
& + \left( \frac{\theta_2}{\lambda + 2\mu} + a_1 - a_1 a_3 \right) u_{1,1} (u_{2,2} + u_{3,3}) - \\
& - \left( \frac{3\theta_1}{2(\lambda + 2\mu)} - a_2 - a_1 a_2 - \frac{1}{2} \right) u_{1,1} \tau + \\
& + \left( \frac{\theta_1}{2(\lambda + 2\mu)} + a_2 - \frac{a_2^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \tau^2 - \\
& - \left( \frac{3\theta_2}{2(\lambda + 2\mu)} - a_2 - a_3 + a_2 a_3 \right) (u_{2,2} + u_{3,3}) \tau + \\
& + \left( \frac{\theta_4}{2(\lambda + 2\mu)} + 2a_3 - a_3^2 \right) u_{2,2} u_{3,3} + \frac{\phi_1 + \psi_1}{2(\lambda + 2\mu)} u_{2,1}^2 + \\
& + \frac{\phi_2 + \psi_2}{2(\lambda + 2\mu)} u_{1,2}^2 + \frac{\phi_3 + \psi_3}{2(\lambda + 2\mu)} u_{2,1} u_{1,2} + \\
& + \left( \left( a_1 + \frac{3}{2} \right) u_{1,1} + a_3 (u_{2,2} + u_{3,3}) + \right. \\
& \left. + (a_2 + 1) \tau + m_1 \right) m_1 + m_2 u_{1,2} + \dots), \\
a_1 = & \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, a_2 = \frac{1 - a_1}{2}, a_3 = \frac{2l + 6m - 3\lambda}{\lambda + 2\mu}, \\
\psi_1 = & 2\beta \frac{2\beta + \lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \psi_2 = 2\beta \frac{2\beta - \lambda - \mu}{\lambda + \mu}, \\
\psi_3 = & 4\beta^2 + (2\beta + \lambda + 2\mu)(2\beta - \lambda - \mu)\lambda + \mu.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Поперечная и продольная составляющие разрыва на такой волне связаны

соотношением

$$\gamma = \tau((\delta + 1)u_{1,2} + \delta u_{2,1}) + \dots \quad (1.42)$$

Квазипоперечная волна возникает при тех же условиях на деформированное состояние перед плоскостью разрывов, что и квазипродольная. Скорость распространения квазипоперечной ударной волны может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} G = & C_2 (1 + b_1 u_{1,1} + b_2 u_{2,2} + b_3 u_{3,3} + m_1 + \\ & + \left( \frac{\alpha_1}{2\mu} + b_1 - \frac{b_1^2}{2} + \frac{1}{4} \right) u_{1,1}^2 + \left( \frac{\alpha_2}{2\mu} - \right. \\ & \left. - \frac{b_2^2}{2} + \frac{3}{4} u_{2,2}^2 + \left( \frac{\alpha_4}{2\mu} + b_3 - \frac{b_3^2}{2} + \frac{1}{4} \right) u_{3,3}^2 + \right. \\ & + \left( \frac{\alpha_3}{2\mu} + b_2 - b_1 b_2 + \frac{1}{2} \right) u_{1,1} u_{2,2} + \left( \frac{\alpha_5}{2\mu} + b_1 + b_3 - b_1 b_3 \right) u_{1,1} u_{3,3} + \\ & + \left( \frac{\alpha_5}{2\mu} + b_2 - b_2 b_3 - \frac{l - \lambda}{2\mu} + 1 \right) u_{2,2} u_{3,3} + \\ & + \left( \frac{3\eta_1}{2\mu} - \frac{2\beta^2}{\mu(\lambda + \mu)} \right) u_{2,1}^2 + \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{2\mu} - \frac{\beta(2\beta + \lambda + \mu)}{\mu(\lambda + \mu)} \right) u_{1,2}^2 + \\ & + \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{\mu} - \frac{\beta(4\beta + \lambda + 2\mu)}{\mu} + \frac{1}{2} \right) u_{1,2} u_{2,1} - \frac{3}{2\mu} \left( \eta_1 + \frac{2\beta^2}{\lambda + \mu} \right) u_{2,1} \gamma - \\ & - \left( \frac{\eta_1}{2\mu} - \frac{3\beta^2 - 2\beta(\lambda + 2\mu)}{\mu(\lambda + \mu)} \right) u_{1,2} \gamma + \left( \frac{\eta_1}{2\mu} - \frac{\beta^2}{\mu(\lambda + \mu)} \right) \gamma^2 + (b_1 + 1) u_{1,1} m_1 + \\ & + b_2 u_{2,2} m_1 + (b_3 + 1) u_{3,3} m_1 + u_{1,2} m_2 + m_1^2 + \dots), \\ & b_1 = \frac{\beta}{\mu} + 1, b_2 = b_1 - 1, b_3 = \frac{l - \lambda}{2\mu} \end{aligned} \quad (1.43)$$

На данной волне выполняется соотношение

$$\tau = -\gamma \frac{(2\beta + \lambda + 2\mu)u_{1,2} + 2\beta u_{2,1}}{\lambda + \mu} + \gamma^2 \frac{\beta}{\lambda + \mu} + \dots \quad (1.44)$$

Третье возможное решение (1.40) является аналогом нейтральной волны, полученной в случае плоского деформирования. Для ее существования необходимо дополнительно потребовать  $u_{1,2} = 0$ . Скорость данной поверхности разрывов не зависит от интенсивности волны:



$$\begin{aligned}
G = & C_2 (1 + b_1 u_{1,1} + b_2 u_{2,2} + b_3 u_{3,3} + m_1 + \\
& + \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\alpha_1}{\mu} + 4b_1 - 2b_1^2 + 1 \right) u_{1,1}^2 + \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\alpha_2}{\mu} - 2b_2^2 + 3 \right) u_{2,2}^2 + \\
& + \frac{1}{4} \left( 2 \frac{\alpha_4}{\mu} + 4b_3 - 2b_3^2 + 1 \right) u_{3,3}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_5}{\mu} + 2(b_1 + b_3) - 2b_1 b_3 \right) u_{1,1} u_{3,3} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\eta_1}{\mu} (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) + \frac{1}{2} \frac{\eta_1 + \eta_3}{\mu} u_{1,3}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_4}{\mu} + 1 \right) u_{1,3} u_{3,1} + \\
& + (b_1 + 1) m_1 u_{1,1} + b_2 m_1 u_{2,2} + (b_3 + 1) m_1 u_{3,3} + m_3 u_{1,3} + m_1^2 + \dots
\end{aligned} \tag{1.45}$$

В дальнейшем также потребуются скорости ударных волн, возникающих в задачах о нагружении несжимаемой среды с осевой симметрией, т.е. цилиндрических ударных волн. Насколько известно, такие поверхности разрывов до настоящего времени не изучались. Рассмотрим неограниченное пространство, занятое несжимаемой упругой средой с цилиндрической полостью. Введем цилиндрическую систему координат  $r, \phi, z$ , начало которой расположено на оси цилиндрической полости, а ось  $z$  направлена вдоль этой оси. Граница полости в цилиндрической системе координат задается уравнением  $r = r_0$ . Движение границы подчиняется закону:

$$\begin{aligned}
r = r_0 = \text{const}, \phi = \phi_0(t), u_z = u_0(t), \\
\phi_0(0) = u_0(0) = 0, \phi_0'(0) u_0'(0) \neq 0
\end{aligned}$$

Следствия законов сохранения на разрывах в данном случае имеют вид:

$$[\sigma_{rr}] = 0, [\sigma_{\phi r}] = -\rho G [\nu_\phi], [\sigma_{zr}] = -\rho G [\nu_z]. \tag{1.46}$$

В (1.46) первое соотношение служит краевым условием для вычисления добавочного гидростатического давления  $p(r, t)$ . Остальные условия системы (1.46) позволяют записать

$$\begin{aligned}
[H] \phi_{,r} + (H - [H] - \rho G^2) [\phi_{,r}] &= 0, \\
[H] u_{,r} + (H - [H] - \rho G^2) [u_{,r}] &= 0, \\
H = \frac{\partial W}{\partial I_2} - \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \tau &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \tau^k, \\
2\tau = r^2 (\phi_{,r})^2 + (u_{,r})^2, \beta_0 = \mu, \beta_1 = 2(\alpha + b + \kappa + d), \dots
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Здесь многоточием обозначены невыписанные коэффициенты ряда для функции  $H$ , зависящие от упругих модулей среды. Из полученной системы следует, что в несжимаемой упругой среде возможно распространение цилиндрических поверхностей разрывов двух типов. Если  $[H] \neq 0$  ( $[\tau] \neq 0$ ), приходим к возможности распространения по среде плоскополяризованного разрыва, для которого

$$\frac{\phi_{,r}^-}{\phi_{,r}^+} = \frac{u_{,r}^-}{u_{,r}^+}, \quad (1.48)$$

$$G = \left( \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} (\tau^+)^k \left( \beta_k + \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j (-1)^j (\tau^+)^{1-j} [\tau]^j \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следуя полученным формулам, на цилиндрической поверхности разрывов, распространяющейся со скоростью  $G$ , не меняется направление предварительного сдвига, а меняется только его интенсивность. Таким образом, для данной поверхности разрывов следует вполне однозначная аналогия с плоскими одномерными ударными волнами. Термодинамический анализ ударного перехода на этой поверхности показывает, что достаточным условием возникновения данного разрыва является увеличение на нем предварительного сдвига, т.е. на нем выполняется соотношение  $[\tau] < 0$ . Это требование вполне согласуется с условием эволюционности плоскополяризованного разрыва.

Следствием системы (1.47) будет возможность возникновения еще одного типа поверхности разрывов, для которого  $[\tau] = 0$ , т.е. на этой волне не меняется интенсивность предварительного сдвига, меняется только его направление при  $[\phi_{,r}] \neq 0$  и  $[u_{,r}] \neq 0$ . А.Г. Куликовский называет такие поверхности разрывов ударными волнами круговой поляризации, т.к. направленность последующего сдвига задается только граничным воздействием. При рассмотрении плоских одномерных ударных волн ранее вслед за А.А. Бурениным такие поверхности разрывов назывались нейтральными ударными волнами. Скорость движения этого разрыва определяется формулой

$$G = \left( \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (\tau^+)^k \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.49)$$

Данная поверхность разрывов является изоэнтропической. Волна круговой поляризации, если ее присутствие диктуется краевыми условиями, распространяется вслед за плоскополяризованной волной, которая движется по недеформированной среде первой. Образование второй волны зависит от отношения функций  $\phi'_0(t)$  и  $u'_0(t)$ . Именно оно определяет, как со временем изменяется направление сдвига на граничной плоскости. Передача по среде информации об изменении направления сдвига тоже является нелинейным волновым процессом. Одним из итогов этого процесса становится, в частности, появление второй ударной волны.

## 1.4 Лучевой метод решения задач ударного деформирования

Для исследования поверхностей нестационарных сильных и слабых разрывов в задачах динамики деформируемого тела, а также построения приближенных решений соответствующих краевых задач широко используется метод лучевых рядов. Наиболее полный обзор работ, посвященный этому методу, представлен в [155].

Основная идея лучевого метода заключается в замене точного решения в прифронтной области рядом типа Тейлора за подвижной поверхностью разрывов. Ряд включает зависимость как от времени, так и от лучевой координаты, которая представляет собой расстояние, отсчитываемое от точки пространства до поверхности разрывов вдоль соответствующего этой точке луча:

$$u^{(n)}(s, t) = u^{(n-1)} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \omega_i^{(n)} (t - t_{\Sigma_n})^i, \quad \omega_i^{(n)} = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=t_{\Sigma_n}}, \quad (1.50)$$

где квадратные скобки, как и ранее, обозначают разрыв,  $\Sigma_n$  – ударные волны, причем меньшему значению индекса  $n$  соответствует волна с большей скоростью,  $u^{(n)}$  – решение в области за  $\Sigma_n$ ,  $t_{\Sigma_n} = t_{\Sigma_n}(s)$  – момент прохождения через рассматриваемую точку ударной волны  $\Sigma_n$ ,  $u^{(0)}$  соответствует области, которую передний фронт распространения возмущений еще не достиг.

В такой форме лучевой метод был впервые предложен в [137, 11] для построения приближенных решений краевых задач в линейных средах. Подход, разработанный Г.И. Быковцевым и его учениками, получил дальнейшее развитие в задачах идеальной пластичности [44], динамики линейной [160] и нелинейной [14] упругой среды.

Метод основан на использовании бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов лучевого ряда, полученной с помощью геометрических и кинематических условий совместности разрывов. Чтобы определить коэффициенты  $\omega_k^{(n)}$  в (1.50), необходимо  $k$  раз продифференцировать уравнение движения, всякий раз записывая результат в разрывах на  $\Sigma_n$  с учетом условий совместности (1.21), (1.22). В линеаризованном случае или же в задачах со слабыми волнами такая процедура немедленно приводит к системе рекуррентных обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений затухания), последовательное интегрирование которой завершает решение. Для задач с ударными волнами в нелинейной теории упругости прямое интегрирование невозможно, так как в этом случае система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\omega_1}{\delta t} &= f_1(\omega_1, \omega_2), \\
 \frac{\delta\omega_2}{\delta t} &= f_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{\delta\omega_k}{\delta t} &= f_k(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{k+1}), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{1.51}$$

С целью краткости записи (1.51) в них не отмечено, что функции  $f_i$  зави-

сят также от деформированного состояния перед фронтом волны, которое в данном случае полагается известным.

Предложенная А.А. Бурениным и Ю.А.Россихиным модификация метода [37, 24] позволяет даже в этом случае строить решение, при условии, что послеударное время мало. Она основана на представлении входящих в (1.51) величин  $\omega_i$  степенными рядами по времени вида

$$\omega_i = \omega_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k \omega_i t^k}{\delta t^k k!}, i = 1, 2, \dots \quad (1.52)$$

Необходимые для этого старшие производные по времени от величин  $\omega_i$  получаются  $\delta$ -дифференцированием по времени уравнений из (1.51) нужное число раз. В случаях, когда значения всех интенсивностей разрывов  $\omega_i$  в некоторый момент времени  $t$  известны, уравнения из (1.51) и их производные по времени играют роль рекуррентных зависимостей уже для коэффициентов (1.52). В свою очередь, подстановка (1.52) в (1.50) позволяет получить для  $u$  приближенное решение, справедливое в окрестности  $t$  за фронтом ударной волны.

Далее будет показано, что методика с успехом может применяться как для плоских, так и для криволинейных поверхностей разрывов.

## Глава 2

# Одномерные задачи нелинейной динамической теории упругости

### 2.1 Задачи об ударном деформировании несжимаемой упругой среды с плоскими волнами

#### 2.1.1 Аналитическое решение одномерной задачи об ударном нагружении упругого полупространства

Существо предлагаемого метода опишем в простейшем случае, рассмотрев распространение ударных волн в нелинейно упругой среде. Начнем со случая, когда среда несжимаема, не имеет предварительных деформаций и заполняет полупространство, ограниченное плоскостью. Нагрузку зададим на границе полупространства. Введем декартову прямоугольную систему координат, направив ось  $Ox_1$  внутрь среды ортогонально границе, а оси  $Ox_2$  и  $Ox_3$  расположив в граничной плоскости. Пусть вследствие ударного воздействия граница полупространства в некоторый момент времени  $t = t_0$  начала двигаться по закону:

$$\begin{aligned} u_2 &= g_1 t + \frac{g_2}{2} t^2, \\ u_1 &= u_3 = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $u_i$  – компоненты вектора перемещения точки среды,  $g_i$  – *const*, причем  $g_1 > 0$ . Условие, накладываемое на коэффициент  $g_1$ , необходимо для того, чтобы в начальный момент времени от граничной плоскости отделилась ударная волна нагрузки  $\Sigma$ . Эта волна играет роль второй, подвижной грани-

цы области деформирования. В силу одномерного характера движения среды поверхность разрывов далее обязана оставаться плоской.

Определим закон движения среды в деформируемой области. Для вычисления отличных от нуля компонент тензора напряжений используем формулу Мурнагана (1.14) с упругим потенциалом (1.17), как и в (1.33). Ограничиваясь слагаемыми третьего порядка по  $u_{2,1}$ , получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p - \mu + a - \left(a + \mu + \frac{\kappa}{2} + b\right) u_{2,1}^2, \\ \sigma_{22} &= -p - \mu + a - \left(a + \frac{\kappa}{2} + b\right) u_{2,1}^2, \\ \sigma_{33} &= -p - \mu + a - \left(\frac{\kappa}{2} + b\right) u_{2,1}^2, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \mu u_{2,1} + (a + b + \kappa) u_{2,1}^3,\end{aligned}\tag{2.2}$$

где  $p$  – функция добавочного гидростатического давления,  $a$ ,  $\mu$ ,  $b$ ,  $\kappa$ ,  $d$  – упругие модули среды.

Подстановка (2.2) в (1.9) позволяет получить систему уравнений движения для данной задачи. Если пренебречь слагаемыми, содержащими степени  $u_{2,1}$  выше второй, и учесть, что  $w_1 = w_3 = 0$ ,  $w_2 = \ddot{u}_2$ , то

$$\begin{aligned}p_{,1} + 2 \left(a + \mu + \frac{\kappa}{2} + b\right) u_{2,1} u_{2,11} &= 0, \\ u_{2,11} \left(\mu + 3(a + b + \kappa) u_{2,1}^2\right) &= \rho \ddot{u}_2.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Здесь  $\rho$  – плотность, которая в случае несжимаемой среды является постоянной величиной.

Первое уравнение системы устанавливает связь между перемещением  $u_2$  и добавочным гидростатическим давлением  $p$  и может быть использовано для вычисления последнего. Интегрирование обеих частей этого равенства по  $x_1$  позволяет получить

$$\begin{aligned}p &= -[p] \Big|_{\Sigma} - \beta_1 u_{2,1}^2, \\ \beta_1 &= a + \mu + \frac{\kappa}{2} + b.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Величина разрыва  $[p]$  может быть вычислена подстановкой выражения для

$\sigma_{11}$  из (2.2) в первое из соотношений (1.32):

$$[\sigma_{11}] = -[p] - \beta_1 [u_{2,1}^2] = 0, \quad (2.5)$$

откуда с учетом того, что  $u_{2,1}^+ = 0$ , окончательно получим

$$[p] = \beta [u_{2,1}]^2. \quad (2.6)$$

Далее будем искать решение второго уравнения системы. Обозначим  $C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ,  $\gamma = \frac{a+b+\kappa}{\mu}$ , тогда это уравнение примет вид

$$u_{2,11} (1 + 3\gamma u_{2,1}^2) = \frac{\ddot{u}_2}{C_2^2}. \quad (2.7)$$

Решение его будем искать в виде лучевого ряда (1.50). Для этого необходимо представить уравнение движения в разрывах на  $\Sigma$ . Приравнивая разрывы правой и левой частей уравнения и учитывая, что  $[ab] = a^+[b] + [a]b^+ - [a][b]$ , получим

$$[u_{2,11}] (1 + 3\gamma [u_{2,1}]^2) = C_2^{-2} [\ddot{u}_2]. \quad (2.8)$$

Следствиями условий совместности разрывов (1.22) на ударной волне являются соотношения:

$$\begin{aligned} [u_{2,1}] &= -\frac{\chi_1}{G}, \chi_1 = [\dot{u}_2], \\ [u_{2,11}] &= \frac{\chi_2}{G^2} - \frac{2}{G^2} \frac{\delta \chi_1}{\delta t} + \frac{\chi_1}{G^3} \frac{\delta G}{\delta t}, \chi_2 = [\ddot{u}_2], \end{aligned} \quad (2.9)$$

Кроме того, на  $\Sigma$  выполняются равенства (1.33) – следствия динамических условий совместности (1.19), (1.18). Согласно результатам, приведенным в п. 1.3, в данном случае  $\Sigma$  является передним фронтом распространяющихся в среду деформаций изменения формы, т.е. поперечной ударной волной, и ее скорость может быть вычислена с помощью (1.38). Подстановка (2.9) в (1.38) дает выражение скорости  $\Sigma$

$$G = C_2 \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\chi}{C_2} \right)^2 + \dots \right). \quad (2.10)$$

Полученные соотношения позволяют переписать уравнение (2.8) в виде



$$\left( \frac{\chi_2}{G^2} - 2 \frac{\chi_1}{G^2} \frac{\delta \chi_1}{\delta t} + \frac{\gamma}{C_2} \frac{\chi_1^2}{G^3} \frac{\delta \chi_1}{\delta t} \right) \left( 1 + 3\gamma \frac{\chi_1^2}{G^2} \right) = \frac{\chi_2}{C_2^2}, \quad (2.11)$$

где также использовано следующее из (2.10) соотношение

$$\frac{\delta G}{\delta t} = \gamma \frac{\chi_1}{C_2} \frac{\delta \chi_1}{\delta t}. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.11) устанавливает зависимость между разрывами скоростей и ускорений точек среды на ударной волне  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и  $\delta$ -производной  $\chi_1$  на  $\Sigma$ , справедливую в произвольный момент времени. Если ограничиться старшими нелинейными слагаемыми, то  $\delta$ -производная  $\chi_1$  оказывается связанной с  $\chi_1$  и  $\chi_2$  зависимостью

$$\frac{\delta \chi_1}{\delta t} = \gamma \frac{\chi_1^2}{C_2^2} \chi_2 + \dots, \quad (2.13)$$

Следуя общей схеме лучевого метода, будем искать решение (2.7) в виде ряда

$$u_2 = -\chi_1 (t - t_\Sigma) - \frac{1}{2} \chi_2 (t - t_\Sigma)^2 - \dots \quad (2.14)$$

где  $t_\Sigma$  – момент прохождения  $\Sigma$  через точку с координатой  $x$ , а величины  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  вычислены в момент  $t_\Sigma$ . Отметим, что положение поверхности разрывов  $x_\Sigma$  и величина  $t_\Sigma$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x_\Sigma(t) &= \int_0^t G(\tau) d\tau, \\ t_\Sigma(x) &= \int_0^x \frac{d\xi}{G(\xi)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Предположим, что в некоторый момент времени  $t_0$  значения  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  на  $\Sigma$  известны. Тогда в окрестности  $t_0$  величину  $\chi_1$  можно приближенно представить в виде

$$\chi_1 = \chi_{10} + \left. \frac{\delta \chi_1}{\delta t} \right|_{t=t_0} \Delta t + \dots, \quad (2.16)$$

где  $\chi_{10} = \chi_1|_{t=t_0}$ ,  $\Delta t = t - t_0$ . Подстановка (2.16) в (2.14) позволяет записать приближенное решение, справедливое при малом послеударном времени  $t$ :

$$u_2 = - \left( \chi_{10} + \frac{\delta\chi_1}{\delta t} \Big|_{t=0} t_\Sigma \right) (t - t_\Sigma) - \frac{1}{2} \chi_2 (t - t_\Sigma)^2 - \dots \quad (2.17)$$

Входящую в данное уравнение величину  $t_\Sigma$  также можно вычислить приближенно с помощью (2.15). Зависимость  $t_\Sigma(x)$  представим рядом

$$t_\Sigma = \frac{x}{G} + \frac{x^2}{2G} \frac{\delta G}{\delta x} \Big|_{x=0} + \dots, \quad (2.18)$$

где  $\frac{\delta G}{\delta x} = \frac{\delta G}{\delta t} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{G} \frac{\delta G}{\delta t}$ . Используя полученные ранее представления для  $G$  и  $\frac{\delta G}{\delta t}$  и полагая послеударное время малым, окончательно получим

$$t_\Sigma = \frac{x}{C_2} \left( 1 - \frac{\gamma \chi_{10}^2}{2 C_2^2} \right) + \frac{x^2}{C_2^2} \left( 1 - \gamma \frac{\chi_{10}^2}{C_2^2} \right) \frac{\chi_{10}}{C_2} \frac{\delta\chi_1}{\delta t} \Big|_{t=0} + \dots \quad (2.19)$$

Зависимость положения фронта ударной волны от времени  $x_\Sigma(t)$  найдем разложением в ряд первого из соотношений (2.15) и подстановкой в него выражений (2.10), (2.12). Для малых послеударных времен получим

$$x_\Sigma = G(0)t + \frac{t^2}{2} \frac{\delta G}{\delta t} \Big|_{t=0} + \dots = C_2 t \left( 1 + \frac{\gamma \chi_{10}^2}{2 C_2^2} \right) + \frac{\gamma t^2 \chi_{10}}{2 C_2} \frac{\delta\chi_1}{\delta t} \Big|_{t=0} + \dots \quad (2.20)$$

Входящая в соотношения (2.19) и (2.20)  $\delta$ -производная разрыва  $\chi_1$  вычисляется в начальный момент времени согласно (2.13):

$$\frac{\delta\chi_1}{\delta t} = \gamma \frac{\chi_{10}^2}{C_2^2} \chi_{20} + \dots, \quad (2.21)$$

Величины  $\chi_{10}$ ,  $\chi_{20}$  определим путем сопоставления рядов (2.17) и (2.1). Полагая в первом  $t_\Sigma(0) = 0$  и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получим

$$\chi_{10} = -g_1, \chi_{20} = -g_2. \quad (2.22)$$

Соотношения (2.17), (2.19), (2.20), (2.22) составляют приближенное решение задачи для случаев  $t \ll 1$ .

Когда последнее условие не выполняется, лучевой ряд также имеется возможность построить с тем только отличием, что его коэффициенты останутся неизвестными. Рассмотрим деформированное состояние в некоторый момент  $t = T > 0$ . Пусть в этот момент  $x_{\Sigma} = X$ ,  $\chi_1 = \chi_{11}$ ,  $\chi_2 = \chi_{21}$ . Подставляя в (2.17), (2.19), (2.20)  $x = X$  вместо  $x$ ,  $t = T$  вместо  $t$  и заменяя разрывы  $\chi_{10}$ ,  $\chi_{20}$  соответственно на  $\chi_{11}$ ,  $\chi_{21}$ , получим приближенное решение, справедливое в прифронтной области в достаточно малой окрестности момента  $t = T$  и при известных  $\chi_{11}$ ,  $\chi_{21}$ . Однако вычислить разрывы  $\chi_{11}$  и  $\chi_{21}$  с помощью граничного условия в данном случае невозможно.

### 2.1.2 Аналитическое решение одномерной задачи об ударном нагружении слоя, имеющего предварительные деформации

Предварительные деформации несколько меняют процедуру построения лучевого ряда. С целью демонстрации таких изменений, исследуем случай распространения ударных волн в среде, содержащей предварительные деформации. Пусть среда заполняет слой толщины  $H$  с плоскими границами. Введем прямоугольную декартову систему координат таким образом, чтобы уравнения граничных плоскостей приняли вид  $x = 0$  и  $x = H$ . Определим начальное деформированное состояние, задав компоненты вектора перемещений:  $u_1 = u_3 = 0$ ,  $u_2 = S(x - H)$ , где  $S$  – константа.

Пусть в результате динамического воздействия на границе  $x = 0$  эта граничная плоскость движется по закону:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= S(x - H) + v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2, \\ u_3 &= v_3 t + \frac{1}{2} a_3 t^2, \end{aligned} \tag{2.23}$$

причем  $v_2 \neq 0$ ,  $v_3 \neq 0$ . Согласно 1.3, в случае выполнения этих условий в начальный момент времени от граничной плоскости отделяются две плоскости разрывов деформаций  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ .

Волна  $\Sigma_1$  является плоскополяризованной, и на ней может меняться только интенсивность предварительного сдвига. Следовательно, в области за  $\Sigma_1$

$$u_1^{(1)} = u_3^{(1)} = 0. \quad (2.24)$$

Нейтральная волна  $\Sigma_2$  движется медленнее  $\Sigma_1$ , и на ней изменяется направленность предварительных деформаций без изменения интенсивности, т.е. выполняется соотношение

$$(u_{2,1}^+)^2 = (u_{2,1}^-)^2 + (u_{3,1}^-)^2. \quad (2.25)$$

Как и ранее, обозначим

$$\chi_1 = [\dot{u}_2], \chi_2 = [\ddot{u}_2]. \quad (2.26)$$

Скорость движения плоскости  $\Sigma_1$  определяется выражением (1.38), которое в силу соотношений (2.26), а также наличия в среде предварительных деформаций принимает вид

$$G_1 = C_2 \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\chi_1^2}{C_2^2} + 3 \frac{\chi_1}{C_2} S + 3S^2 \right) + \dots \right). \quad (2.27)$$

В области между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  система уравнений движения среды (1.9) после подстановки (1.33) и с учетом (2.24) сводится к аналогичным (2.7) соотношениям

$$\begin{aligned} p_{,1} + 2\beta_1 u_{2,11} u_{2,1} &= 0, \\ u_{2,11} (1 + 3\gamma u_{2,1}^2) &= \frac{\ddot{u}_2}{C_2^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Запишем второе из уравнений (2.28) в разрывах на  $\Sigma_1$ . Учитывая, что теперь  $u_{2,1}^+ = S$ ,

$$[u_{2,11}] (1 + 3\gamma(S - [u_{2,1}])^2) = C_2^{-2} [\ddot{u}_2]. \quad (2.29)$$

Заменяя разрывы  $[u_{2,1}]$ ,  $[u_{2,11}]$  согласно (2.9), перепишем его в виде

$$\left( \frac{\chi_2}{G_1^2} - \frac{2}{G_1^2} \frac{\delta \chi_1}{\delta t} + \frac{\chi_1}{G_1^3} \frac{\delta G}{\delta t} \right) \left( 1 + 3\gamma \left( S + \frac{\chi_1}{G} \right)^2 \right) = \frac{\chi_2}{C_2^2}. \quad (2.30)$$

Вычислим  $\delta$ -производную  $G_1$  дифференцированием (2.27):

$$\frac{\delta G}{\delta t} = \gamma \left( \frac{\chi_1}{C_2} + \frac{3}{2} S \right) \frac{\delta \chi_1}{\delta t} + \dots \quad (2.31)$$

Подстановка полученного выражения в (2.30) позволяет выразить  $\delta$ -производную  $\chi_1$ . Если пренебречь слагаемыми высших порядков, то

$$\frac{\delta \chi_1}{\delta t} = \gamma \chi_2 \left( \frac{\chi_1^2}{C_2^2} + \frac{3}{2} \frac{\chi_1}{C_2} S + \dots \right). \quad (2.32)$$

Решение в области между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  представим в виде лучевого разложения:

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} &= S(x - H) - \chi_1 (t - t_{\Sigma_1}) - \frac{\chi_2}{2} (t - t_{\Sigma_1})^2 + \dots, \\ t_{\Sigma_1} &= \int_0^x \frac{d\xi}{G_1(\xi)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Как и в предыдущей задаче, зависимость  $\chi_1(t)$  (и, следовательно, зависимость  $G_1(x)$ ) с помощью (2.32) может быть представлена степенным рядом вида (2.16), что позволяет записать (2.33) в виде

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} &= S(x - H) - \left( \chi_{10} + \gamma \chi_{20} \left( \frac{3}{2} \frac{\chi_{10} S}{C_2} + \frac{\chi_{10}^2}{C_2^2} \right) t_{\Sigma_1} \right) (t - t_{\Sigma_1}) - \\ &\quad - \frac{\chi_{20}}{2} (t - t_{\Sigma_1})^2 + \dots, \\ t_{\Sigma_1} &= \frac{x}{C_2} \left( 1 - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\chi_{10}^2}{C_2^2} + 3 \frac{\chi_{10}}{C_2} S + 3S^2 \right) \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Соотношение (2.34) является приближенным решением задачи в области между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ .

Перейдем к построению решения за  $\Sigma_2$ . Система уравнений движения среды (1.9), (1.33) в области за  $\Sigma_2$  с учетом (2.23) принимает вид

$$\begin{aligned} p_{,1} + 2\beta_1 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}) &= 0, \\ u_{2,11} (1 + 3\gamma u_{2,1}^2 + \gamma u_{3,1}^2) + 2\gamma u_{3,11} u_{2,1} u_{3,1} &= C_2^{-2} \ddot{u}_2, \\ u_{3,11} (1 + \gamma u_{2,1}^2 + 3\gamma u_{3,1}^2) + 2\gamma u_{2,11} u_{2,1} u_{3,1} &= C_2^{-2} \ddot{u}_3. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь и далее, если только это не оговорено особо, рассматриваются величины из области между поверхностями разрывов  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , и их разрывы на поверхности  $\Sigma_2$

Первое из уравнений (2.35) устанавливает связь между функцией добавочного гидростатического давления  $p(x)$  и компонентами вектора перемещений. Интегрируя его, устанавливаем, что

$$p = -[p]_{\Sigma_2} - \beta_1 (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2). \quad (2.36)$$

Далее будем работать со вторым и третьим уравнениями из (2.35). Запишем их в разрывах на поверхности  $\Sigma_2$ :

$$\begin{aligned} [u_{2,11}] (1 + 3\gamma u_{2,1}^2) + (u_{2,11} - [u_{2,11}]) \gamma \left( 6u_{2,1} [u_{2,1}] - 3[u_{2,1}]^2 - [u_{3,1}]^2 \right) + \\ + 2\gamma [u_{3,11}] [u_{3,1}] ([u_{2,1}] - u_{2,1}) = C_2^{-2} [\ddot{u}_2], \\ [u_{3,11}] \left( 1 + \gamma \left( (u_{2,1} - [u_{2,1}])^2 + 3[u_{3,1}]^2 \right) \right) + \\ + 2\gamma [u_{3,1}] (u_{2,11} - [u_{2,11}]) (u_{2,1} - [u_{2,1}]) = C_2^{-2} [\ddot{u}_3]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Условия совместности на  $\Sigma_2$  позволяют выразить  $[u_{2,1}]$ ,  $[u_{2,11}]$ ,  $[u_{3,1}]$ ,  $[u_{3,11}]$  в виде

$$\begin{aligned} [u_{2,1}] &= -\frac{\phi_1}{G_2}, \phi_1 = [\dot{u}_2], [u_{3,1}] = -\frac{\kappa_1}{G_2}, \kappa_1 = [\dot{u}_3], \\ [u_{2,11}] &= G_2^{-2} \left( \phi_2 - 2\frac{\delta\phi_1}{\delta t} + \frac{\phi_1}{G_2} \frac{\delta G_2}{\delta t} \right), \phi_2 = [\ddot{u}_2], \\ [u_{3,11}] &= G_2^{-2} \left( \kappa_2 - 2\frac{\delta\kappa_1}{\delta t} + \frac{\kappa_1}{G_2} \frac{\delta G_2}{\delta t} \right), \kappa_2 = [\ddot{u}_3], \end{aligned} \quad (2.38)$$

Скорость  $G_2$  поверхности  $\Sigma_2$  вычислим согласно (1.39):

$$G_2 = C_2 \left( 1 + \frac{\gamma}{2} u_{2,1}^2 + \dots \right), \quad (2.39)$$

где величина  $u_{2,1}$  относится к области между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , т.е.  $u_{2,1} = \left. \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right|_{\Sigma_2}$ .

Используем полученные соотношения для определения  $\delta$ -производных функций  $\phi_1$  и  $\kappa_1$  на  $\Sigma_2$ . Подстановкой (2.38) в (2.37) получим

$$\begin{aligned} \left( \phi_2 - 2\frac{\delta\phi_1}{\delta t} + \frac{\phi_1}{G_2} \frac{\delta G_2}{\delta t} \right) \left( 1 + 3\gamma \left( \frac{\phi_1}{G_2} + u_{2,1} \right)^2 + \gamma \frac{\kappa_1^2}{G_2^2} \right) + \\ + \left( \kappa_2 - 2\frac{\delta\kappa_1}{\delta t} + \frac{\kappa_1}{G_2} \frac{\delta G_2}{\delta t} \right) 2\gamma \frac{\kappa_1}{G_2} \left( u_{2,1} + \frac{\phi_1}{G_2} \right) = \\ = \frac{G_2^2}{C_2^2} \phi_2 + \gamma u_{2,11} (6u_{2,1} \phi_1 G_2 + 3\phi_1^2 + \kappa_1^2), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \phi_2 - 2 \frac{\delta \phi_1}{\delta t} + \frac{\phi_1}{G_2} \frac{\delta G_2}{\delta t} 2\gamma \frac{\kappa_1}{G_2} \left( \frac{\phi_1}{G_2} + u_{2,1} \right) + \right. \\
& \left. + \left( \kappa_2 - 2 \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} + \frac{\kappa_1}{G_2} \frac{\delta G_2}{\delta t} \right) \left( 1 + \gamma \left( u_{2,1} + \frac{\phi_1}{G_2} \right)^2 + 3\gamma \frac{\kappa_1^2}{G_2^2} \right) = \right. \\
& \left. = \frac{G_2^2}{C_2^2} \kappa_2 + 2\gamma u_{2,1} \kappa_1 (u_{2,1} G_2 + \phi_1) . \right.
\end{aligned}$$

Из (2.39) с помощью кинематического условия совместности на  $\Sigma_2$  получаем

$$\frac{\delta G_2}{\delta t} = \gamma C_2 u_{2,1} (\dot{u}_{2,1} + G_2 u_{2,11}) , \quad (2.41)$$

где величины  $u_{2,1}$  и  $u_{2,11}$  также относятся к области между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  и вычисляются на  $\Sigma_2$ .

Выразим  $\frac{\delta \phi_1}{\delta t}$  и  $\frac{\delta \kappa_1}{\delta t}$ , рассматривая (2.40) как систему линейных уравнений относительно искомых величин. Решая ее, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \phi_1}{\delta t} &= -\frac{1}{2\Delta} \left( (\phi_2 (1 + \gamma u_{2,1}^2) + \gamma u_{2,11} (\kappa_1^2 + 3\phi_1^2 + 6u_{2,1}\phi_1 G_2)) \times \right. \\
& \quad \times \left( 1 + \gamma \left( u_{2,1} + \frac{\phi_1}{G_2} \right)^2 + 3\gamma \frac{\kappa_1^2}{G_2^2} \right) - \\
& \quad \left. - (\kappa_2 (1 + \gamma u_{2,1}^2) + 2\gamma u_{2,11} \kappa_1 (\phi_1 + G_2 u_{2,1})) \times \right. \\
& \quad \left. \times 2\gamma \left( u_{2,1} + \frac{\phi_1}{G_2} \right) \frac{\kappa_1}{G_2} \right) + \frac{\phi_2}{2} + \frac{\gamma \phi_1}{2 G_2} C_2 u_{2,1} (\dot{u}_{2,1} + G_2 u_{2,11}) , \\
\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} &= -\frac{1}{2\Delta} \left( (\kappa_2 (1 + \gamma u_{2,1}^2) + 2\gamma u_{2,11} \kappa_1 (\phi_1 + G_2 u_{2,1})) \times \right. \\
& \quad \times \left( 1 + 3\gamma \left( u_{2,1} + \frac{\phi_1}{G_2} \right)^2 + \gamma \frac{\kappa_1^2}{G_2^2} \right) - \\
& \quad \left. - (\phi_2 (1 + \gamma u_{2,1}^2) + \gamma u_{2,11} (\kappa_1^2 + 3\phi_1^2 + 6u_{2,1}\phi_1 G_2)) \times \right. \\
& \quad \left. \times 2\gamma \left( u_{2,1} + \frac{\phi_1}{G_2} \right) \frac{\kappa_1}{G_2} \right) + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\gamma \kappa_1}{2 G_2} C_2 u_{2,1} (\dot{u}_{2,1} + G_2 u_{2,11}) , \\
\Delta &= 1 + 4\gamma \left( \left( u_{2,1} + \frac{\phi_1}{G_2} \right)^2 + \frac{\kappa_1^2}{G_2^2} \right) + 3\gamma^2 \left( \left( u_{2,1} + \frac{\phi_1}{G_2} \right)^2 + \frac{\kappa_1^2}{G_2^2} \right)^2 .
\end{aligned} \quad (2.42)$$

Входящие в (2.42) функции  $u_{2,1}$ ,  $\dot{u}_{2,1}$  и  $u_{2,11}$  можно получить дифференцированием (2.34). В случае, когда  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  не успели разойтись достаточно далеко друг от друга,

$$\begin{aligned}
u_{2,1} &= S + \frac{\chi_1}{C_2} + \frac{\chi_2}{C_2} \left( t - \frac{x}{C_2} \right) + \dots, \\
u_{2,11} &= -\frac{\chi_2}{C_2^2} + \dots, \\
\dot{u}_{2,1} &= \frac{\chi_2}{C_2} + \dots.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Таким образом, соотношения (2.42) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\phi_1}{\delta t} &= \frac{\gamma}{C_2^2} \left( \left( (C_2 S + \chi_1)^2 + 3\phi_1 (C_2 S + \chi_1) + \frac{3}{2}\phi_1^2 - \frac{1}{2}\kappa_1^2 \right) \phi_2 - \right. \\
&- (C_2 S + \chi_1 + \phi_1) \kappa_1 \kappa_2 + \left. \left( \frac{1}{2}\kappa_1^2 + \frac{3}{2}\phi_1^2 + 3\phi_1 (C_2 S + \chi_1) \right) \chi_2 \right) + \dots, \\
\frac{\delta\kappa_1}{\delta t} &= \frac{\gamma}{C_2^2} \left( \left( \frac{1}{2}\phi_1^2 + \phi_1 (C_2 S + \chi_1) + \frac{3}{2}\kappa_1^2 \right) \kappa_2 + \right. \\
&+ (C_2 S + \chi_1 + \phi_1) \kappa_1 \phi_2 + (C_2 S + \chi_1 + \phi_1) \kappa_1 \chi_2 \left. \right) + \dots
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Кроме того, равенство  $[m] = 0$ , справедливое на  $\Sigma_2$ , позволяет записать

$$2 \left( S + \frac{\chi_1}{C_2} + \frac{\chi_2}{C_2} \left( t - \frac{x}{C_2} \right) \right) \frac{\phi_1}{G_2} + \frac{\phi_1^2}{G_2^2} + \frac{\kappa_1^2}{G_2^2} = 0. \tag{2.45}$$

Выразим из полученного соотношения  $\phi_1$ . Пренебрегая малыми слагаемыми, получим

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= - \left( SC_2 + \chi_1 + \chi_2 \left( t - \frac{x_1}{C_2} \right) \right) - \\
&- \sqrt{\left( SC_2 + \chi_1 + \chi_2 \left( t - \frac{x_1}{C_2} \right) \right)^2 - \kappa_1^2}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Вычисляя  $\delta$ -производную величины  $[m]$  на  $\Sigma_2$  и приравнявая ее нулю, получим еще одно соотношение, связывающее интенсивности разрывов на  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Если вновь пренебречь нелинейными слагаемыми высших порядков, то

$$\frac{\delta\phi_1}{\delta t} \left( u_{2,1} + \frac{\phi_1}{C_2} \right) + \frac{\delta\kappa_1}{\delta t} \frac{\kappa_1}{C_2} + (\dot{u}_{2,1} + G_2 u_{2,11}) \phi_1 \left( 1 + \frac{3}{2} \gamma u_{2,1}^2 \right) = 0. \tag{2.47}$$

Полученное соотношение совместно с (2.44) устанавливает связь между  $\chi_2$ ,  $\phi_2$  и  $\kappa_2$ :



$$\begin{aligned}
& \phi_2 \left( (C_2 S + \chi_1)^3 + 3(C_2 S + \chi_1)^2 \phi_1 + \frac{9}{2}(C_2 S + \chi_1) \phi_1^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{2} \phi_1^3 + \frac{1}{2}(C_2 S + \chi_1) \kappa_1^2 + \frac{1}{2} \phi_1 \kappa_1^2 \right) + \\
& + \kappa_2 \left( \frac{3}{2} \kappa_1^3 - (C_2 S + \chi_1) \kappa_1 - (C_2 S + \chi_1) \phi_1 \kappa_1 - \frac{1}{2} \phi_1^2 \kappa_1 \right) + \\
& + \chi_2 \left( \frac{3}{2}(C_2 S + \chi_1) \kappa_1^2 + \frac{3}{2} \phi_1 \kappa_1^2 + \frac{9}{2}(C_2 S + \chi_1) \phi_1^2 + \right. \\
& \left. + 3(C_2 S + \chi_1)^2 \phi_1 - \frac{C_2^2}{2} \phi_1 (C_2 S + \chi_1) \left( 1 + \frac{3}{2} \gamma (C_2 S + \chi_1)^2 \right) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Решение в области за  $\Sigma_2$  будем строить в виде лучевых рядов вида

$$\begin{aligned}
u_2^{(2)} &= u_2^{(1)} - \phi_1 (t - t_{\Sigma_2}) - \frac{1}{2} \phi_2 (t - t_{\Sigma_2})^2 + \dots, \\
u_3^{(2)} &= -\kappa_1 (t - t_{\Sigma_2}) - \frac{1}{2} \kappa_2 (t - t_{\Sigma_2})^2 + \dots, \\
\phi_1 &= \phi_{10} + \left. \frac{\delta \phi_1}{\delta t} \right|_{t=0} t + \dots, \quad \phi_2 = \phi_{20} + \dots, \\
\kappa_1 &= \kappa_{10} + \left. \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} \right|_{t=0} t + \dots, \quad \kappa_2 = \kappa_{20} + \dots
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Подстановка выражений для  $\delta$ -производных  $\frac{\delta \phi_1}{\delta t}$  и  $\frac{\delta \kappa_1}{\delta t}$  в (2.49) позволяет получить приближенное решение в области за  $\Sigma_2$ . Значения величин  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  в момент начала деформирования  $t = 0$  получим, приравнявая коэффициенты при равных степенях  $t$  в (2.49) и (2.23) и учитывая зависимости (2.46) и (2.48). Положения поверхностей разрывов  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  определяются аналогично (2.20).

Заметим, что плоскость поляризованного разрыва и плоскость нейтральной волны являются близкими, поэтому использовать лучевое разложение за  $\Sigma_1$  в соотношениях на  $\Sigma_2$  всегда правомочно. Использование же граничных условий для определения коэффициентов лучевых рядов связано с малостью послеударного времени. Следовательно, лучевые разложения в случае, когда такое время нельзя считать малым, оказываются содержащими не найденные коэффициенты.

### 2.1.3 Численно-аналитическая схема решения задач об ударном деформировании несжимаемой упругой среды

Для численного интегрирования уравнений движения будем использовать конечно-разностные схемы. Для этого введем регулярную прямоугольную сетку с постоянным шагом по пространственной координате  $\Delta x$  и временной координате  $\Delta t$ , как это показано на рис. 2.1, в узлах которой и будем искать решение. Входящие в уравнения частные производные заменим их конечно-разностными аппроксимациями по соседним узлам сетки.

На рис. 2.7 представлен шаблон разностной схемы. Шаблон пятиточечный, каждое разностное уравнение включает узлы с трех временных слоев сетки. Конечно-разностные выражения для производных функции  $u$  имеют вид:

$$u_{,1} = \frac{1}{2\Delta x} (u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)),$$
$$u_{,11} = \frac{1}{\Delta x^2} (u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)), \quad (2.50)$$
$$\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2} (u(x, t) - 2u(x, t - \Delta t) + u(x, t - 2\Delta t)).$$

В силу нелинейности уравнений, порядок аппроксимации уравнения в целом как по пространственной, так и по временной координатам будет первый.

Для численного решения рассматриваемых задач необходимо знать на каждом временном шаге положение подвижной границы. Кроме того, для использования конечно-разностных уравнений необходимы значения  $u_i$  во всех узлах из деформированной области среды, в том числе прифронтных.

Будем считать, что до момента  $t_0$  аналитическое решение с постоянными, вычисленными по граничному условию, выполняется с достаточной степенью точности. С момента  $t_0$  в области деформирования строим численное решение разностным методом. Отметим, что для узлов сетки, близко прилегающих к фронту ударной волны, разностными соотношениями пользоваться нельзя, так как входящие в них значения могут соответствовать узлам сетки,

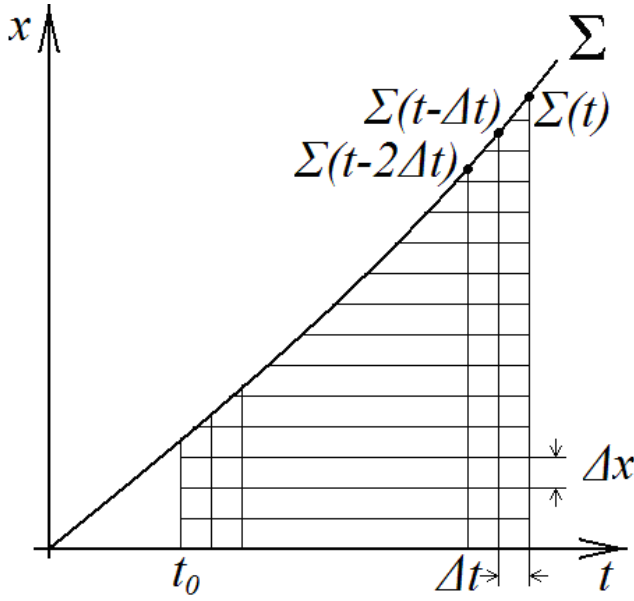


Рис. 2.1: Разностная сетка

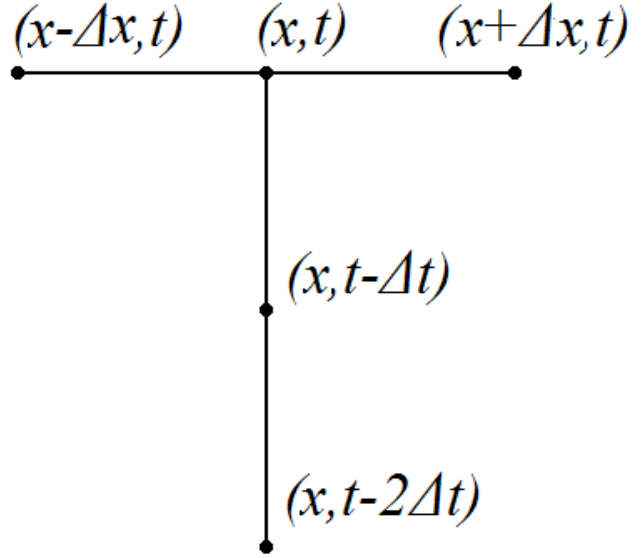


Рис. 2.2: Шаблон разностной схемы

расположенным вне области решения задачи.

Для решения системы разностных уравнений необходимо задать условия на границах области деформирования. Условие на нагружаемой границе известно. Будем считать, что для прифронтных узлов с координатами  $x_i > x_\Sigma(t - 2\Delta t)$  справедливо лучевое разложение. Однако, при  $t > t_0$  неизвестны параметры лучевых разложений. Таким образом, эти выражения также оказываются уравнениями относительно перемещений в прифронтных узлах и констант лучевых разложений.

Для вычисления параметров лучевых рядов будем интерполировать перемещения на последнем временном слое полиномом второй степени по точкам, соответствующим прифронтным узлам с  $x_i < x_\Sigma(t - 2\Delta t)$ , т.е. тем узлам, для которых построены разностные уравнения, и которые притом расположены достаточно близко к подвижной границе. Коэффициенты полинома, вычисленные методом наименьших квадратов, сопоставим с разрывами производных на  $\Sigma$ . Для вычисления на  $\Sigma$  разрывов производных  $u_i$  по времени, которые и являются параметрами лучевых рядов, используем кинематические условия совместности. Входящие в них разрывы пространственных производных определим, дифференцируя интерполяционный полином в точке  $x_\Sigma$

и учитывая тот факт, что за волновым фронтом деформированное состояние известно.

В качестве приближения для констант лучевого разложения можно использовать их линейную экстраполяцию по последним временным слоям сетки. Начальное приближение для перемещений в узлах сетки получим с помощью лучевых рядов.

Полученная система соотношений решается итерационным методом, причем последовательно определяются поле перемещений в области деформирования и параметры лучевых рядов. Счет ведется до установления.

Случай ударного нагружения несжимаемого плоского слоя, содержащего предварительные деформации, интересен тем, что позволяет получить две близко расположенные поверхности разрывов – плоскополяризованную волну  $\Sigma_1$  и следующую за ней волну круговой поляризации  $\Sigma_2$ . Наличие второй волны приводит к необходимости строить решения задачи в двух областях деформирования и сращивать их на  $\Sigma_2$ . Тем не менее, в силу близости величин скоростей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , размер межфронтной области деформирования достаточно мал, и, следовательно, приближенное аналитическое решение в ней обладает достаточной точностью. Последний факт позволяет связать с его помощью интенсивности разрывов на  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , таким образом, в целом сводя построение схемы к рассмотренному ранее случаю.

Результаты расчетов, выполненных по описанной схеме, показаны на рис. 2.3-2.5. В задаче о нагружении недеформированного полупространства параметры выбраны следующим образом: коэффициент нелинейности  $\gamma$  равен 1,  $C_2 = 1000$ ,  $t_0 = 0,0003$ ,  $g_1 = 0,1$ ,  $g_2 = 10$ , шаг сетки  $\Delta_x = 0,01$ ,  $\Delta_t = 0,00005$ . На рис. 2.3 показаны поля перемещений за  $\Sigma$  в различные моменты времени. На рис. 2.4 показана зависимость  $\chi_1$  от времени.

На рис. 2.5, 2.6 показаны результаты решения задачи о нагружении слоя в виде полей перемещений  $u_2$  и  $u_3$ . Значения параметров составляют  $H = 100$ ,  $S = -0,001$ ,  $C_2 = 1000$ ,  $\gamma = 0,5$ . Значения  $g_1$  и  $g_2$  равны 1.

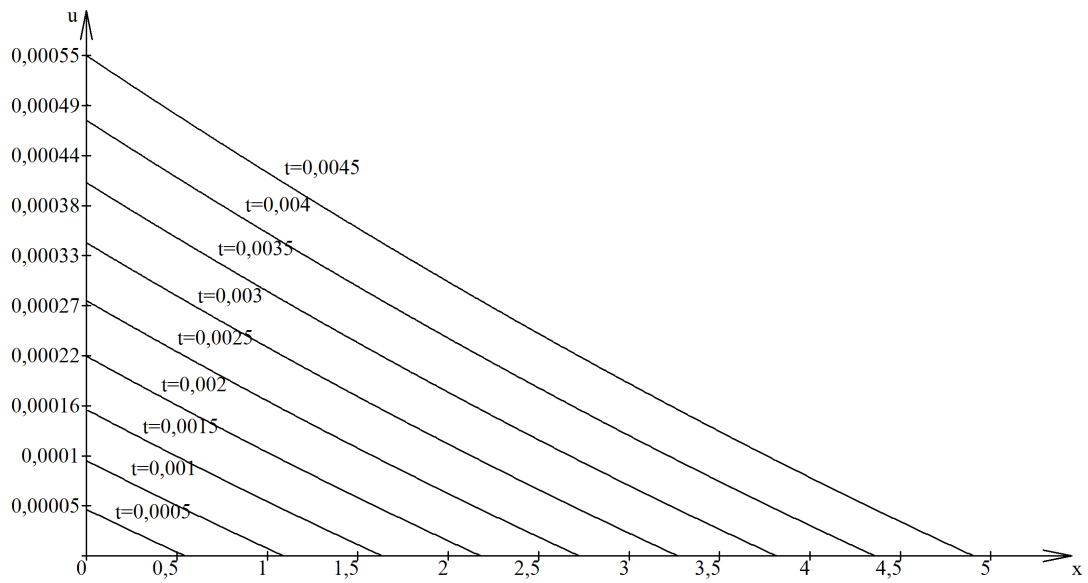


Рис. 2.3: Поле перемещений в различные моменты времени

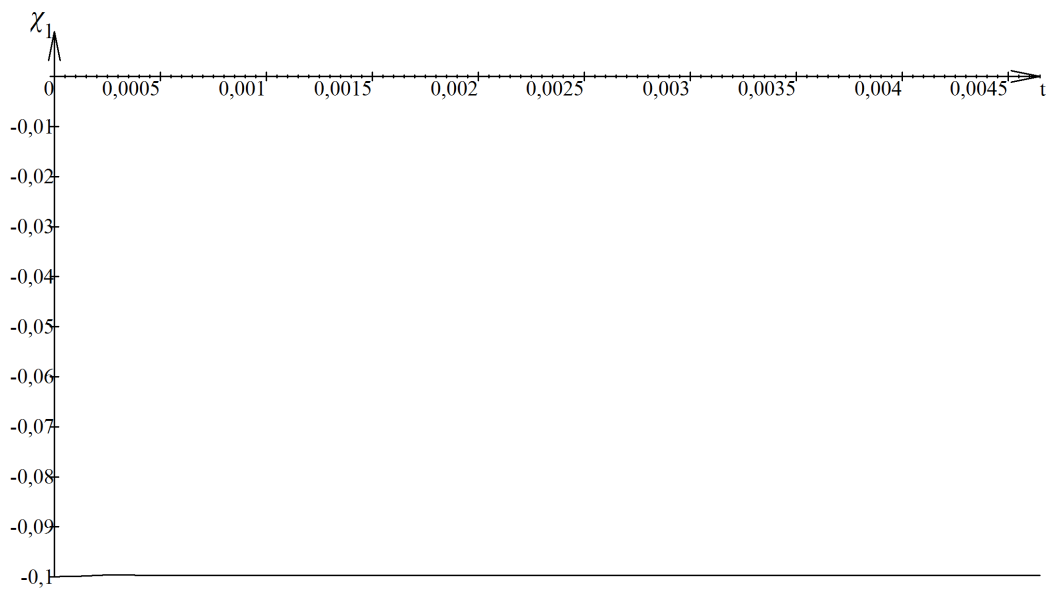


Рис. 2.4: Распределение  $\chi$  в различные моменты времени

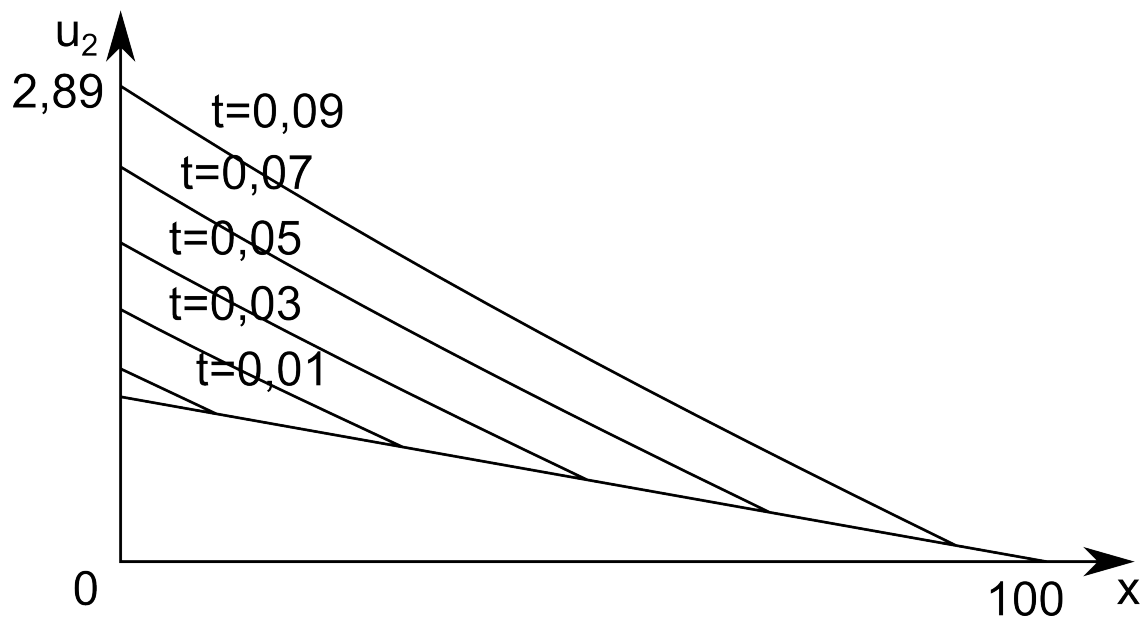


Рис. 2.5: Зависимость  $u_2(t)$  в задаче о нагружении слоя

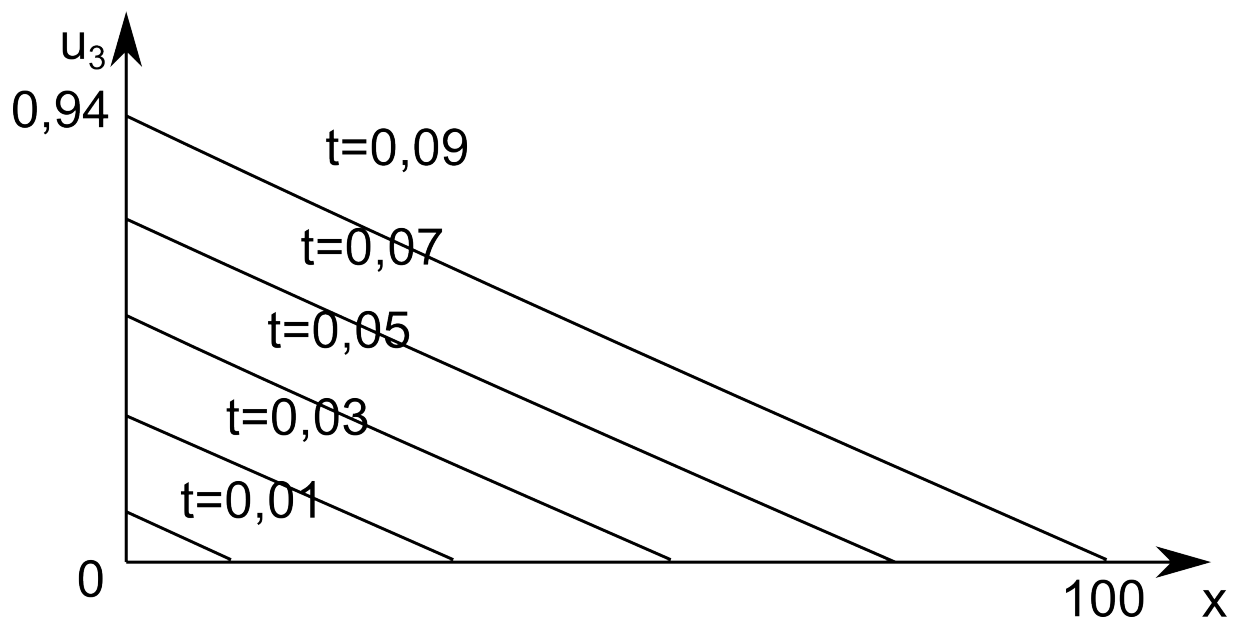


Рис. 2.6: Зависимость  $u_3(t)$  в задаче о нагружении слоя

## 2.2 Плоские волны в сжимаемой упругой среде

### 2.2.1 Аналитическое решение задачи о нормальном ударе по плоской границе упругого полупространства

Перейдем к изучению упругих волн, возникающих в сжимаемой среде. Изучение также начнем с наиболее простого случая, когда среда занимает полупространство с плоской границей. Как и ранее, введем декартову прямоугольную систему координат, расположив оси так, чтобы оси  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  лежали в граничной плоскости, а ось  $Ox_1$  была направлена внутрь среды перпендикулярно границе. Пусть под действием ударной нагрузки в некоторый момент времени граница начинает двигаться в направлении  $Ox_1$  по закону

$$\begin{aligned} u_1|_{x_1=g(t)} = g(t), g(t) = g_1 t + g_2 \frac{t^2}{2}, g_1 > 0, \\ u_2 = u_3 = 0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

т.е. приложенная нагрузка вызывает сжатие среды. Таким образом, из компонент тензора градиента перемещений отличной от нуля оказывается лишь  $u_{1,1}$ . Из компонент тензора Альманси отличной от нуля оказывается лишь

$$\alpha_{11} = u_{1,1} - \frac{1}{2} u_{1,1}^2. \quad (2.52)$$

В результате такого нагружения от границы среды в начальный момент времени отделяется ударная волна  $\Sigma$ . Движение среды в области между волной и нагружаемой границей подчиняется системе (1.9). Запишем эту систему в перемещениях для данной задачи. Для этого с помощью (1.13), (1.15) вычислим компоненты тензора перемещений. Ограничиваясь слагаемыми третьего порядка по  $u_{1,1}$ , получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1} - \frac{1}{2}(7(\lambda + 2\mu) - 6(l + m + n))u_{1,1}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}(9(\lambda + 2\mu) - 24(l + m + n))u_{1,1}^3 + \dots, \\
\sigma_{22} = \sigma_{33} &= \lambda u_{1,1} + \left(l + 3m - \frac{3}{2}\lambda\right)u_{1,1}^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - 2l - 6m\right)u_{1,1}^3 + \dots, \\
\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Для отличных от нуля компонент векторов скорости и ускорения в координатах Эйлера имеем

$$\begin{aligned}
v_1 &= \dot{u}_1 + u_{1,1}v_1, \\
v_1 &= \frac{\dot{u}_1}{1 - u_{1,1}}, \\
w_1 = \dot{v}_1 + v_{1,1}v_1 &= \frac{\ddot{u}_1(1 - u_{1,1})^2 + 2\dot{u}_{1,1}\dot{u}_1(1 - u_{1,1}) + u_{1,11}\dot{u}_1^2}{(1 - u_{1,1})^3}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Плотность среды  $\rho$  вычислим согласно (1.11):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - u_{1,1}. \tag{2.55}$$

Подставляя полученные соотношения в (1.9), из первого уравнения после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}
&u_{1,11}(1 + \alpha_1 u_{1,1} + \alpha_2 u_{1,1}^2 - C_1^{-2} \dot{u}_1^2) = \\
&= C_1^{-2} \left( \ddot{u}_1(1 - u_{1,1})^2 + 2\dot{u}_{1,1}\dot{u}_1(1 - u_{1,1}) \right), \\
C_1 &= \frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu}, \quad \alpha_1 = -9 + 6\frac{l + m + n}{\lambda + 2\mu}, \\
\alpha_2 &= \frac{57}{2} - 49\frac{l + m + n}{\lambda + 2\mu}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Остальные уравнения из (1.9) выполняются тождественно.

На поверхности разрывов  $\Sigma$  следствием (2.56) является соотношение

$$\begin{aligned}
&[u_{1,11}]\left(1 - \alpha_1[u_{1,1}] + \alpha_2[u_{1,1}]^2 - C_1^{-2}[\dot{u}_1]^2\right) = \\
&C_1^{-2}\left([\ddot{u}_1](1 + [u_{1,1}])^2 - 2[\dot{u}_{1,1}][\dot{u}_1](1 + [u_{1,1}])\right).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Преобразуем его, используя следствия условия совместности (1.22). Обозначив  $[\dot{u}_1] = \omega_1$ ,  $[\ddot{u}_1] = \omega_2$ , выразим разрывы производных по пространственной координате:



$$\begin{aligned}
[u_{1,1}] &= G^{-1}\omega_1, [i_{1,1}] = G^{-1} \left( \frac{\delta\omega_1}{\delta t} - \omega_2 \right), \\
[u_{1,11}] &= G^{-2} \left( \omega_2 - 2\frac{\delta\omega_1}{\delta t} + \frac{\omega_1}{G} \frac{\delta G}{\delta t} \right).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Подстановка (2.58) в (2.57) позволяет переписать последнее в виде

$$\begin{aligned}
&G^{-2} \left( \omega_2 - 2\frac{\delta\omega_1}{\delta t} + \frac{\omega_1}{G} \frac{\delta G}{\delta t} \right) \left( 1 + \alpha_1 \frac{\omega_1}{G} + \alpha_2 \frac{\omega_1^2}{G^2} \right) = \\
&= C_1^{-2} \left( \omega_2 \left( 1 - 2\frac{\omega_1}{G} + \frac{\omega_1^2}{G^2} \right) - 2\frac{\omega_1}{G} \left( \frac{\delta\omega_1}{\delta t} - \omega_1 \right) \left( 1 - \frac{\omega_1}{G} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega_1^2}{G^2} \left( \omega_2 - 2\frac{\delta\omega_1}{\delta t} + \frac{\omega_1}{G} \frac{\delta G}{\delta t} \right) \right).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Будучи передним фронтом распространения объемных деформаций в недеформированную среду, волна  $\Sigma_1$  является продольной. Ее скорость определяется зависимостью (1.28), которая в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned}
G_1 &= C_1 \left( 1 - \alpha_2 \frac{\omega_1}{G_1} + \alpha_6 \frac{\omega_1^2}{G_1^2} \dots \right), \\
\alpha_6 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\theta_1}{\lambda + 2\mu} + a_2 - \frac{a_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Подставляя (2.60) в (2.59) и решая полученное уравнение относительно  $\frac{\delta\omega_1}{\delta t}$ , получим

$$\frac{\delta\omega_1}{\delta t} = - \frac{\alpha_1 \omega_2 \frac{\omega_1}{C_1} + \dots}{1 - \left( 1 + \frac{7\alpha_1}{2} \right) \frac{\omega_1}{C_1} + \dots} \tag{2.61}$$

Для нахождения приближенного решения задачи полученные соотношения достаточно подставить в лучевое разложение.

## 2.2.2 Задача о косом ударе по плоской границе упругого полупространства

Пусть, как и ранее, сжимаемое недеформированное полупространство занимает объем  $x_1 > 0$ . Будем считать, что с некоторого момента времени

$t = 0$  на границе  $x_1 = x = 0$  приложена сжимающе-сдвиговая нагрузка:

$$u_1|_{x_1=g_1(t)} = g_1(t), u_2|_{x_1=g_1(t)} = g_2(t), \quad (2.62)$$

причем  $g(0) = h(0) = 0$  и  $g(t) > 0, h(t) > 0$ . Подобное нагружение приводит к возникновению двух ударных волн – продольной волны  $\Sigma_1$ , которая является передним фронтом изменения объемных деформаций, и квазипоперечной волны  $\Sigma_2$  – переднего фронта деформаций сдвига.

Скорости ударных волн могут быть вычислены согласно формулам (1.28), (1.30). Так, скорость продольной волны  $G_1$  в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} G_1 &= C_1 (1 + \gamma_1 \tau + \gamma_2 \tau^2 + \dots), \\ C_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} \\ \gamma_1 &= -\frac{3(l + m + n)}{2(\lambda + 2\mu)} + \frac{9}{4}, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\theta_1}{\lambda + 2\mu} + \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_1^2 + 1 \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Скорость квазипоперечной волны  $G_2$  представима в виде

$$\begin{aligned} G_2 &= C_2 \left( 1 + \gamma \frac{\dot{u}_1^+}{C_1} + \gamma_3 u_{1,1}^+ + \dots \right) \\ C_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \\ \gamma &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \\ \gamma_3 &= \frac{\beta^\mu}{\mu} + 1. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Ударные волны делят деформированную область на две части. В области между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  присутствуют лишь объемные деформации, т.е.  $u_2 = 0$ . Таким образом, уравнение движения здесь имеет ту же форму, что и в рассматриваемой ранее задаче о нормальном ударе. Запишем его, ограничиваясь старшими нелинейными слагаемыми:

$$\begin{aligned}
u_{1,11} (1 + \alpha_1 u_{1,1} + \dots) &= C_1^{-2} (\ddot{u}_1 (1 - 2u_{1,1}) + 2u_{1,1} \dot{u}_1), \\
\alpha_1 &= 6 \frac{l + m + n}{\lambda + 2\mu} - 9.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Используя кинематическое условие совместности и учитывая, что перед фронтом ударной волны деформации в среде отсутствуют, можно переписать уравнение движения на  $\Sigma_1$  в виде

$$\begin{aligned}
&G_1^{-2} \left( \omega_2 - 2 \frac{\delta \omega_1}{\delta t} + \frac{\omega_1}{G_1} \frac{\delta G_1}{\delta t} \right) \left( 1 + \alpha_1 \frac{\omega_1}{G_1} \right) = \\
&= C_1^{-2} \left( \omega_2 \left( 1 - 2 \frac{\omega_1}{G_1} \right) - \frac{2\omega_1}{G_1} \left( \frac{\delta \omega_1}{\delta t} - \omega_2 \right) \right), \\
&\omega_1 = [\dot{u}_1], \quad \omega_2 = [\ddot{u}_1].
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Соотношение (2.66) позволяет вычислить  $\delta$ -производную разрыва  $\omega$ .

Таким образом, получено справедливое для малых послеударных времен приближенное решение за  $\Sigma_1$ :

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= u_1^I = - \left( \omega_{10} + \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} \Big|_{t=0} + \dots \right) (t - t_{\Sigma_1}) - \\
&\quad - \frac{\omega_{20}}{2} (t - t_{\Sigma_1})^2 - \dots, \\
u_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Здесь  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$  – значения соответствующих разрывов, вычисленные в момент начала деформирования,  $t_{\Sigma_1}$  – время прохождения  $\Sigma_1$  через данную точку пространства, величины третьего и выше порядка по времени отброшены в силу их малости. Индекс “I” означает, что данное решение справедливо лишь в области между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Величину  $t_{\Sigma_1}$ , как и раньше, будем вычислять по формуле

$$t_{\Sigma_1} = \int_0^t \frac{d\xi}{G(\xi)}$$

Рассмотрим теперь поле перемещений в окрестности  $\Sigma_2$ . Эта поверхность является передним фронтом распространения деформаций сдвига, т.е. за  $\Sigma_2$  обе компоненты вектора перемещений отличны от нуля. Таким образом, закон

движения упругой среды в области между нагружаемой границей и квазиперечной ударной волной определяет следующая система соотношений:

$$\begin{aligned}
& u_{1,11} \left( 1 + a_1 u_{1,1} + a_2 u_{1,1}^2 + a_3 u_{2,1}^2 - C_1^{-2} \dot{u}_1^2 \right) + u_{2,11} u_{2,1} (a_4 + a_5 u_{1,1}) = \\
& \quad = C_1^{-2} \left( \ddot{u}_1 (1 - u_{1,1})^2 + 2 \dot{u}_{1,1} (1 - u_{1,1}) \right), \\
& u_{2,11} \left( 1 + b_1 u_{1,1} + b_2 u_{1,1}^2 + b_3 u_{2,1}^2 - C_2^{-2} \dot{u}_1^2 \right) + u_{1,11} u_{2,1} (b_4 + b_5 u_{1,1}) = \\
& = C_2^{-2} \left( \ddot{u}_2 (1 - 3u_{1,1} + 3u_{1,1}^2) + (\ddot{u}_1 u_{2,1} + 2 \dot{u}_{2,1} \dot{u}_1) (1 - 2u_{1,1}) + 2 \dot{u}_{1,1} \dot{u}_1 u_{2,1} \right), \\
& \quad a_1 = 6 \frac{l + m + n}{\lambda + 2\mu} - 9, \quad a_2 = \frac{57}{2} - 48 \frac{l + m + n}{\lambda + 2\mu}, \\
& a_3 = \frac{10\lambda + 24\mu - 22l - 12m - 27n}{4(\lambda + 2\mu)}, \quad a_4 = \frac{2l + 3n - 2\lambda - 8\mu}{2(\lambda + 2\mu)}, \\
& a_5 = \frac{17\lambda + 40\mu - 26l - 12m - 33n}{2(\lambda + 2\mu)}, \quad b_1 = \frac{3n + 2l - 2\lambda - 10\mu}{2\mu}, \\
& b_2 = \frac{14\lambda + 40\mu - 26l - 12m - 33n}{4\mu}, \quad b_3 = 3 \frac{\lambda + 2\mu - 2l - 3n}{2\mu}, \\
& b_4 = \frac{3n + 2l - 2\lambda - 6\mu}{2\mu}, \quad b_5 = \frac{10\lambda + 24\mu - 22l - 12m - 27n}{2\mu}.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Будем искать компоненты вектора перемещений  $u_1$  и  $u_2$  в виде лучевых рядов. Поскольку в момент прохождения  $\Sigma_2$  в среде уже присутствуют объемные деформации, лучевое разложение  $u_1$  за  $\Sigma_2$  будет включать продолжение построенного ранее решения  $u_1^I$ :

$$\begin{aligned}
u_1^{II}(x, t) &= u_1^I - \left( \kappa_{10} + \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} \Big|_{t=0} + \dots \right) (t - t_{\Sigma_2}) - \frac{\kappa_{20}}{2} (t - t_{\Sigma_2})^2 - \dots, \\
u_2^{II}(x, t) &= - \left( \psi_{10} + \frac{\delta \psi_1}{\delta t} \Big|_{t=0} + \dots \right) (t - t_{\Sigma_2}) - \frac{\psi_{20}}{2} (t - t_{\Sigma_2})^2 - \dots,
\end{aligned} \tag{2.69}$$

где  $\kappa_1 = [\dot{u}_1]$ ,  $\kappa_2 = [\ddot{u}_1]$ ,  $\psi_1 = [\dot{u}_2]$ ,  $\psi_2 = [\ddot{u}_2]$ , все разрывы вычислены на  $\Sigma_2$ .

Для построения приближенного аналитического решения необходимо определить значения разрывов  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , а также входящие в уравнения  $\delta$ -производные. Для нахождения последних, как и ранее, используем записанные в разрывах на  $\Sigma_2$  уравнения движения, а также условия совместности и следствия условия (1.44), необходимо выполняющиеся на квазиперечной

волне  $\Sigma_2$ :

$$\begin{aligned}
[u_{1,1}] &= -\frac{\kappa_1}{G_2}, & [u_{2,1}] &= -\frac{\psi_1}{G_2}, \\
[u_{1,11}] &= G_2^{-2} \left( \kappa_2 - 2\frac{\delta\kappa_1}{\delta t} + \frac{\kappa_1}{G_2} \frac{\delta G_2}{\delta t} \right), \\
[u_{2,11}] &= G_2^{-2} \left( \psi_2 - 2\frac{\delta\psi_1}{\delta t} + \frac{\psi_1}{G_2} \frac{\delta G_2}{\delta t} \right), \\
[\dot{u}_{1,1}] &= G_2^{-1} \left( \frac{\delta\kappa_1}{\delta t} - \kappa_2 \right), & [\dot{u}_{2,1}] &= G_2^{-1} \left( \frac{\delta\psi_1}{\delta t} - \psi_2 \right), \\
[u_{1,11}] & \left( 1 + a_1 u_{1,1} + a_2 u_{1,1}^2 - C_1^{-2} \dot{u}_1^2 \right) + \\
& + (u_{1,11} - [u_{1,11}]) \left( a_1 [u_{1,1}] + a_2 (2u_{1,1} [u_{1,1}] - [u_{1,1}]^2) - a_3 [u_{2,1}]^2 - \right. \\
& \left. - C_1^{-2} (2\dot{u}_1 [\dot{u}_1] - [\dot{u}_1]^2) \right) [u_{2,11}] [u_{2,1}] \left( a_5 ([u_{1,1}] - u_{1,1}) - a_4 \right) = \\
& = C_1^{-2} \left( [\ddot{u}_1] (1 - u_{1,1})^2 - (\ddot{u}_1 - [\ddot{u}_1]) [u_{1,1}] (u_{1,1}^2 + 2u_{1,1} + 2) + \right. \\
& \quad \left. 2[\dot{u}_{1,1}] (1 - u_{1,1}) - 2[u_{1,1}] (\dot{u}_{1,1} - [\dot{u}_{1,1}]) \right), \\
[u_{2,11}] & \left( 1 + b_1 (u_{1,1} - [u_{1,1}]) + b_2 (u_{1,1} - [u_{1,1}])^2 + b_3 (u_{2,1}^2 + [u_{2,1}]^2) - \right. \\
& \left. - C_2^{-2} (\dot{u}_1 - [\dot{u}_1])^2 \right) + [u_{2,1}] \left( [u_{1,11}] (b_4 + b_5 u_{1,1}) + (u_{1,11} - [u_{1,11}]) [u_{1,1}] b_5 \right) = \\
& = C_2^{-2} \left( [\ddot{u}_2] (1 - 3(u_{1,1} - [u_{1,1}]) + 3(u_{1,1} - [u_{1,1}])^2) + \right. \\
& \quad \left. + ((\ddot{u}_1 - [\ddot{u}_1]) [u_{2,1}] + 2[\dot{u}_{2,1}] (\dot{u}_1 - [\dot{u}_1])) (1 - 2(u_{1,1} - [u_{1,1}])) - \right. \\
& \quad \left. - 2([\dot{u}_{1,1}] \dot{u}_1 + \dot{u}_{1,1} [\dot{u}_1] - [\dot{u}_{1,1}] [\dot{u}_1]) [u_{2,1}] \right), \\
[u_{1,1}] & = -[u_{2,1}] \frac{2\beta u_{2,1}}{\lambda + \mu} + [u_{2,1}]^2 \frac{\beta}{\lambda + \mu} + \dots
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Начальные значения разрывов, как и ранее, определяем, сопоставляя лучевые ряды и краевое условие и учитывая, что в начальный момент времени от нагружаемой границы отделяются две волны.

### 2.2.3 Примеры численного решения задач об ударном нагружении сжимаемой среды.

С точки зрения конструирования численных решений, основными особенностями задачи о нормальном ударе являются необходимость учета перемещения нагружаемой границы и более сложная (по сравнению с задачами о

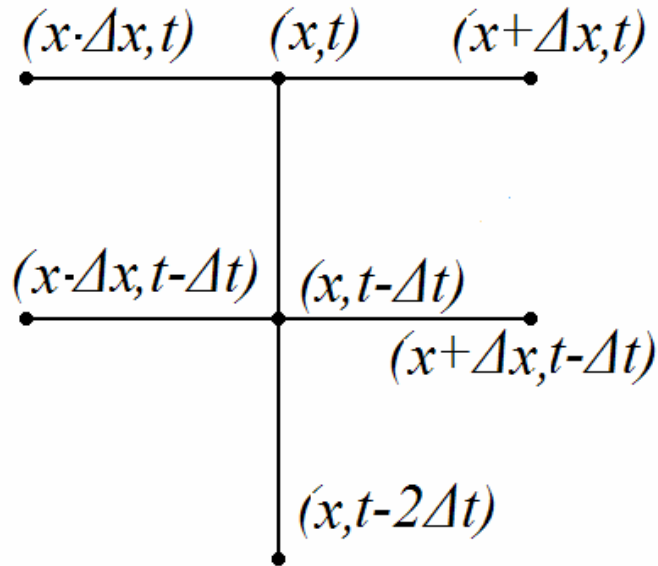


Рис. 2.7: Шаблон разностной схемы

нагрузении несжимаемой среды) структура уравнений движения, несколько усложняющая разностную схему.

Для численного интегрирования уравнений движения будем, как и ранее, использовать конечно-разностные схемы. Для этого введем регулярную прямоугольную сетку с постоянным шагом по пространственной и временной координатам. Входящие в уравнения частные производные заменим их конечно-разностными аппроксимациями по соседним узлам сетки.

На рис. 2.7 представлен шаблон разностной схемы. Шаблон семиточечный, каждое разностное уравнение включает узлы с трех временных слоев сетки. Конечно-разностные выражения для производных функции  $u$  имеют вид:

Алгоритм сращивания численных и аналитических решений совпадает с таковым для задач о нагрузении несжимаемой среды.

Приведем результаты численного моделирования. На рисунках 2.8-2.10 приведены результаты для задачи о нормальном ударе. Параметры задачи:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $C_1 = 3500$ , скорость и ускорение нагруженной границы составляют соответственно 0, 1 и 20.

В задаче о нагрузении слоя параметры составили  $C_1 = 6200$ ,  $C_2 = 3400$ ,  $v_1 = 10$ ,  $v_2 = 5$ ,  $a_1 = a_2 = 10$ .

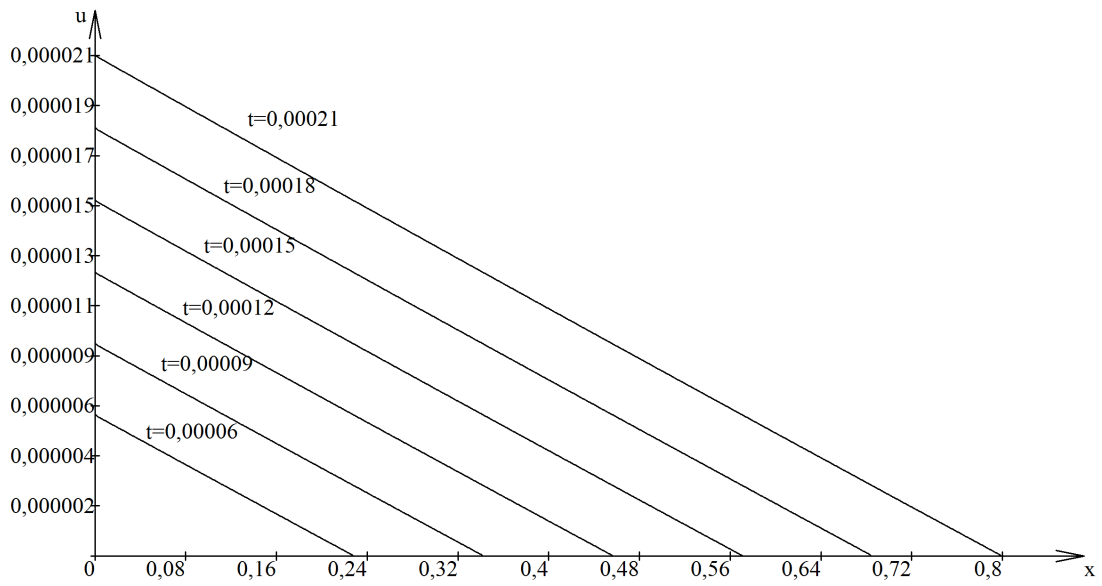


Рис. 2.8: Поле перемещений в различные моменты времени в задаче о нормальном ударе

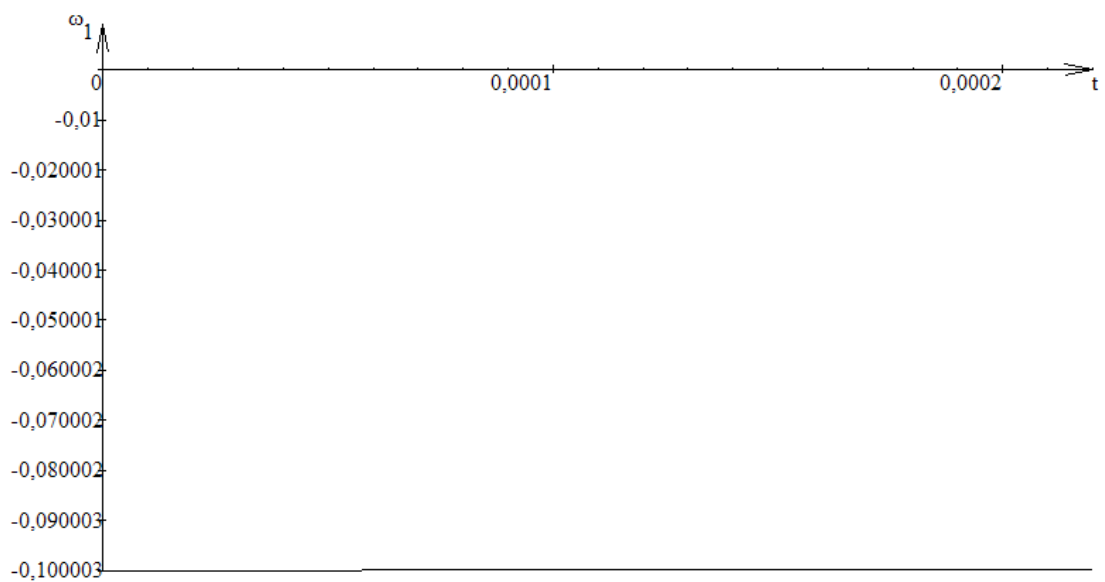


Рис. 2.9: Распределение  $\omega_1$  в различные моменты времени в задаче о нормальном ударе

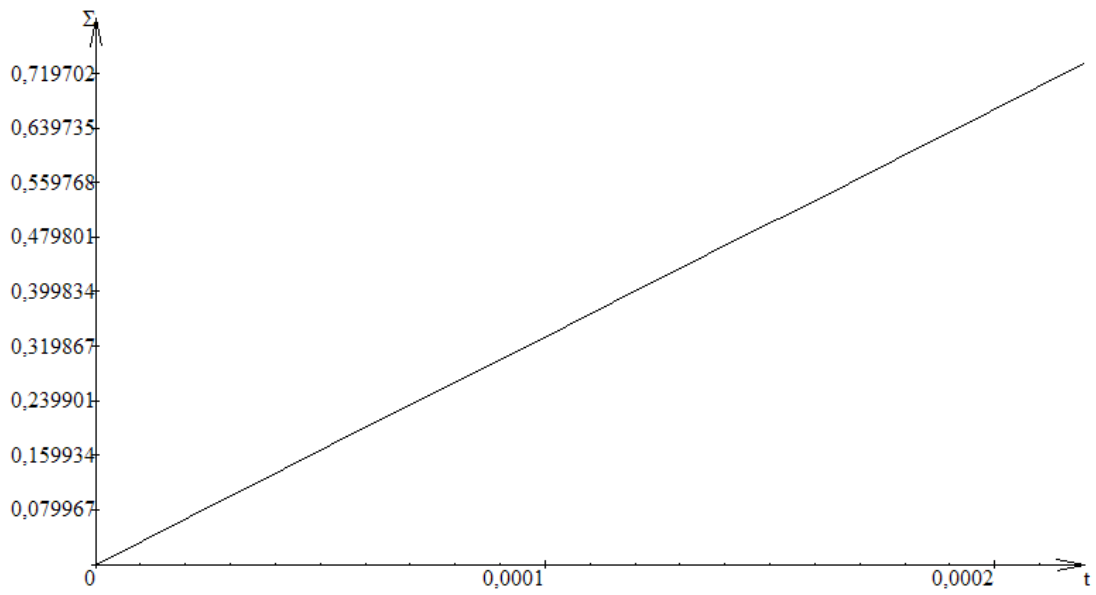


Рис. 2.10: Зависимость  $x_{\Sigma}(t)$  в задаче о нормальном ударе

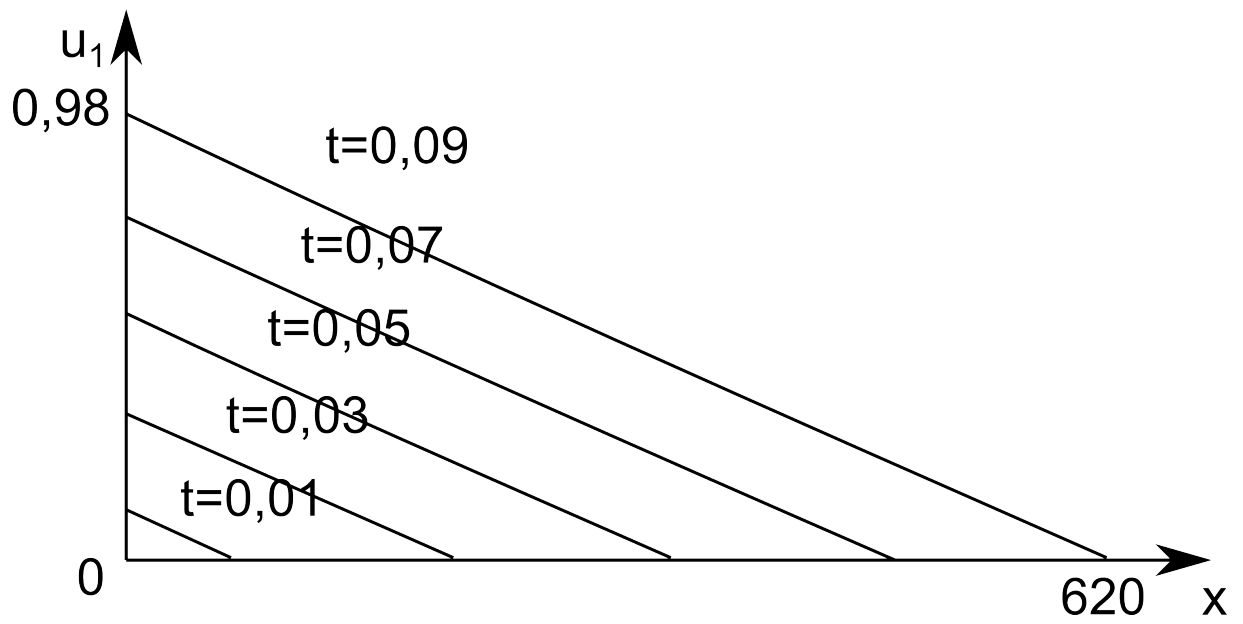


Рис. 2.11: Зависимость  $u_1(t)$  в задаче о косом ударе



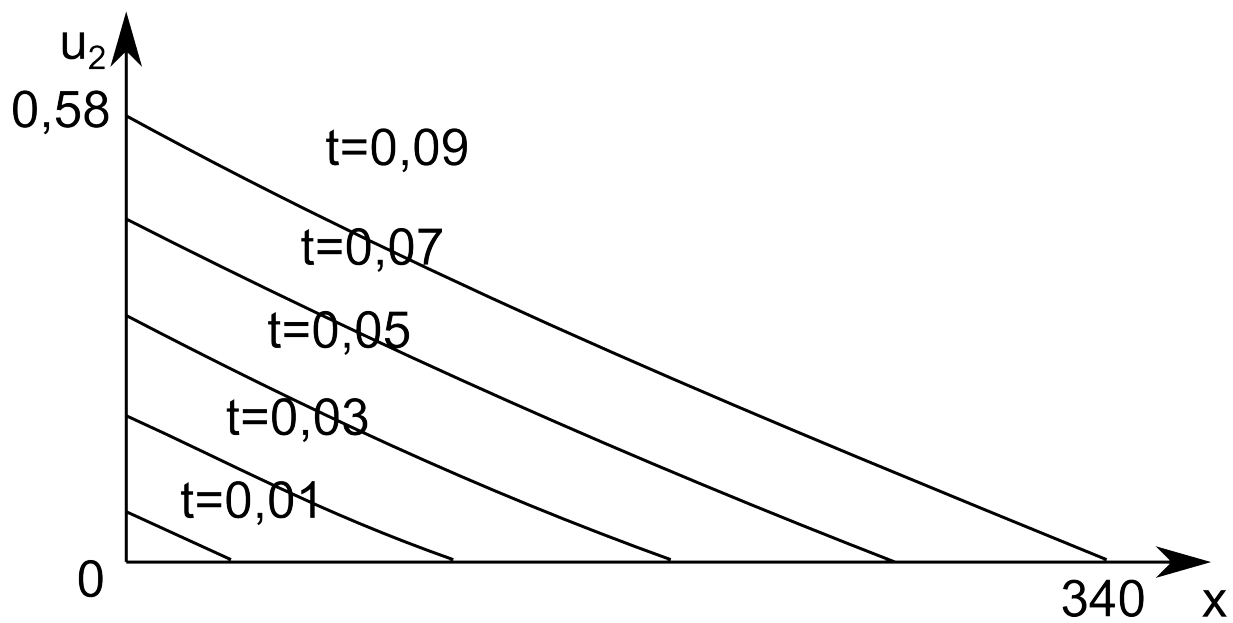


Рис. 2.12: Зависимость  $u_2(t)$  в задаче о косом ударе

## 2.3 Задачи об антиплоском и скручивающем ударе с цилиндрическими ударными волнами

### 2.3.1 Антиплоское ударное деформирование несжимаемой нелинейно-упругой среды

Рассмотрим сначала одномерную задачу об антиплоском движении несжимаемого пространства без предварительных деформаций. В качестве исследуемой области берется пространство, заполненное нелинейно-упругой средой с цилиндрической полостью радиуса  $r_0$ . Антиплоский удар по границе поверхности  $r = r_0$  создает в пространстве поле перемещений вида

$$u_r = u_\varphi = 0, u_z = u(r, t), \quad (2.71)$$

где  $r, \varphi, z$  – цилиндрическая система координат, ось  $Oz$  которой совпадает с осью цилиндра.

На границе  $r = r_0$  поле перемещений известно и может быть задано рядом вида

$$u_z|_{r_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k g}{\partial t^k} \Big|_{t=0} t^k \approx v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} + \dots, \quad v_0 \neq 0, \quad t \geq 0. \quad (2.72)$$

Следствием неравенства  $v_0 \neq 0$  будет появление поперечной ударной волны  $\Sigma(t)$  с момента начала деформирования. Скорость такой волны, согласно (1.48), может быть вычислена по формуле

$$G = C_2 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left( \frac{\chi_1}{C_2} \right)^{2k} \right) = C_2 \left( 1 + \gamma \frac{\chi_1^2}{C_2^2} + \dots \right), \quad (2.73)$$

где  $C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ,  $\gamma = \frac{a + b + \kappa + d}{2\mu}$ ,  $\chi_1 = [\dot{u}]$

Поскольку перемещения на  $\Sigma$  непрерывны, то  $u|_{r_\Sigma} = 0$ , где  $r_\Sigma(t)$ , определяющее положение волнового фронта, имеет вид

$$r_\Sigma(t) = r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi \approx r_0 + \int_0^t C_2 \left( 1 + \gamma_1 \frac{\chi_1^2}{C_2^2} + \dots \right) d\xi. \quad (2.74)$$

В области деформирования, исключая  $\Sigma$ , движение среды описывается системой уравнений, следующей из уравнений (1.9):

$$\begin{aligned} u_{,rr} (1 + 3\alpha u_{,r}^2) + \frac{u_{,r}}{r} (1 + \alpha u_{,r}^2) + \dots &= \frac{\ddot{u}}{C_2^2}, \\ p_{,r} + \beta u_{,r} u_{,rr} + (1 + \gamma) \frac{u_{,r}^2}{r} + \dots &= 0, \\ \alpha &= 2\gamma_1, \gamma = \frac{r}{\mu}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Здесь первое уравнение определяет поле перемещений, а второе – функцию добавочного гидростатического давления по найденным перемещениям. Поэтому, считая первое уравнение основным, его решение за фронтом  $\Sigma$  представим лучевым рядом

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r, t) &= u^0(r, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \chi_k(t_{\Sigma}) (t - t_{\Sigma})^k, \quad t \geq t_{\Sigma}, \\ u(r, t) &= u^{(0)}(r, t), \quad t \leq t_{\Sigma}, \\ t_{\Sigma}(r) &= \int_{r_0}^r \frac{d\xi}{G(\xi)}, \quad \chi_k = \left[ \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right], \end{aligned} \quad (2.76)$$

где индексами “(0)” и “(1)” обозначено решение в области  $\Sigma$  и за ней, соответственно. Как и ранее, предполагаем, что искомая функция обладает сколь угодно высокой гладкостью в окрестности  $\Sigma$ . Лучами в данном случае являются радиальные направления.

Для определения коэффициентов  $\chi_k$  в (2.79), необходимо  $k$  раз продифференцировать уравнение движения, всякий раз записывая результат в разрывах на  $\Sigma$  с учетом условий совместности (1.22).

Записывая в разрывах само уравнение движения, получим выражение для  $\delta$ -производной  $\chi_1$

$$\frac{\delta \chi_1}{\delta t} = \frac{2\alpha \chi_2 \chi_1^2 C_2^{-2}}{2 + 5\alpha \chi_1^2 C_2^{-2}} - \frac{\chi_1 C_2 \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \chi_1^2 C_2^{-2} \right)}{r_{\Sigma} (2 + 5\alpha \chi_1^2 C_2^{-2} + \dots)} + \dots, \quad (2.77)$$

$$\chi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta^n \chi_{k0}}{\delta t^n}, \quad \frac{\delta^n \chi_{k0}}{\delta t^n} = \left. \frac{\delta^n \chi_k}{\delta t^n} \right|_{t=0} \quad (2.78)$$

Совместно с полем перемещений лучевой метод позволяет определить функциональную зависимость  $r_\Sigma(t)$  или  $t_\Sigma(r)$ , связывающую  $r$  и  $t$  на переднем фронте волны:

$$u = - \left( \chi_{10} + \frac{\delta\chi_{10}}{\delta t} t_\Sigma + \dots \right) (t - t_\Sigma) - \frac{1}{2} (\chi_{20} + \dots) (t - t_\Sigma)^2 + \dots, \quad (2.79)$$

$$t_\Sigma = \frac{r - r_0}{C_2} (1 + \gamma_1 \chi_{10}^2 C_2^{-2}) - \frac{\gamma_1 \chi_{10} C_2^{-1} \frac{\delta\chi_{10}}{\delta t} (r - r_0)^2}{C_2^3 (1 + \gamma_1 \chi_{10}^2 C_2^{-2})^3} + \dots,$$

где  $\frac{\delta\chi_{10}}{\delta t}$  определяется соотношением (2.77) при  $t = 0$ . Сопоставляя ряд (2.79) с краевым условием (2.71), получим  $\chi_{10} = -v_0$ ,  $\chi_{20} = -a$ . Решение может быть продолжено далее с требуемой степенью точности в зависимости от граничных условий на  $r_0$ . Определение добавочного гидростатического давления  $p(r, t)$  по известному полю перемещений также не представляет сложностей, кроме вычислительных.

### 2.3.2 Скручивающее ударное деформирование несжимаемой упругой среды

Рассмотрим теперь вариант граничного нагружения, приводящего к скручиванию среды, то есть такого, когда каждая точка среды движется по своей круговой траектории, а для компонент вектора перемещений, записанных в физических координатах, выполняется:

$$u_r = r (1 - \cos \psi), \quad (2.80)$$

$$u_\varphi = r \sin \psi,$$

где  $\psi(r, t)$ - угол поворота точек среды.

Уравнения движения среды относительно угла поворота  $\psi(r, t)$  и гидростатического давления  $p(r, t)$  имеют вид:

$$3 \frac{\psi_{,r}}{r} + 5\alpha r \psi_{,r}^3 + \psi_{,rr} (1 + 3\alpha r^2 \psi_{,r}^2) + \dots = \frac{\ddot{\psi}}{C_2^2}, \quad (2.81)$$

$$p_{,r} + (1 + \beta) r \psi_{,r}^2 + \beta r^2 \psi_{,r} \psi_{,rr} + \dots = \frac{r \dot{\psi}^2}{C_2^2}.$$

Краевые условия для (2.81) зададим в виде

$$\psi \Big|_{r_0} = \chi_0 t + \frac{\kappa_0 t^2}{2} + \dots, \quad (2.82)$$

где  $\chi_0$  и  $\kappa_0$  в данном случае играют роль начальной угловой скорости и углового ускорения соответственно. Скорость возникающей поперечной ударной волны определяется, как и ранее, формулой (2.73), где  $\chi_1$  следует заменить на  $\eta_1 = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]$ . Для решения полученной краевой задачи применим описанную ранее методику, которая на нулевом шаге дает

$$\frac{\delta \eta_1}{\delta t} = \frac{2\alpha r_\Sigma^2 C^{-2} \eta_1^2 \eta_2}{2 + 5\alpha r_\Sigma^2 C^{-2} \eta_1^2} - \frac{\eta_1 C \left( 3 + \frac{13}{2} \alpha r_\Sigma^2 C^{-2} \eta_2^2 \right)}{r_\Sigma (2 + 5\alpha r_\Sigma^2 C^{-2} \eta_1^2)} + \dots, \quad (2.83)$$

$$\eta_k = \left[ \frac{\partial^k \psi}{\partial t^k} \right].$$

Из (2.77) и (2.83) видно, что изменение интенсивности цилиндрической волны происходит в основном за счет линейного вклада  $-\frac{\omega_1 C_2}{2r_\Sigma}$  и  $-\frac{3\eta_1 C_2}{2r_\Sigma}$  соответственно. причем, в отличие от плоской задачи, сюда входит величина  $r_\Sigma^{-1}$ , определяющая изменения кривизны волнового фронта. Это означает, что влияние геометрического расхождения на изменение интенсивности волны превалирует над нелинейными эффектами.

Следуя обычной схеме лучевого метода, окончательно для функции  $\psi(r, t)$  получим

$$\begin{aligned} \psi(r, t) = & -\eta_{10} \left( 1 + \frac{t_\Sigma}{2 + 5\alpha r_0^2 C_2^{-2} \eta_{10}^2} (2\alpha r_0^2 C_2^{-2} \eta_{10}^2 \eta_{20} - \right. \\ & \left. - \frac{13}{2} \alpha r_0 C_2^{-2} \eta_{10}^2 - \frac{3C_2}{r_0}) + \dots \times \right. \\ & \left. \times (t - t_\Sigma) - \frac{1}{2} (\eta_{20} + \dots) (t - t_\Sigma)^2 + \dots \right. \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$t_{\Sigma} = \frac{r - r_0}{C_2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} r^2 C_2^{-2} \eta_{10}^2\right)} - \frac{\alpha r^2 C_2^{-1} \eta_{10} (r - r_0)^2}{2C_2^3 \left(1 + \frac{\alpha}{2} r^2 \frac{\eta_{10}^2}{C_2^2}\right)^3 \left(2 + 5\alpha r_0^2 \frac{\eta_{10}^2}{C_2^2}\right)} \times$$

$$\times \left(2\alpha r_0^2 \frac{\eta_{10} \eta_{20}}{C_2^2} - \frac{13}{2} \alpha r_0 \frac{\eta_{10}^2}{C_2} - \frac{3C_2}{r_0}\right) + \dots$$

Как уже отмечалось, полученное аналитическое решение пригодно лишь на небольшом удалении от нагружаемой поверхности. С целью расширить рассматриваемый временной диапазон перейдем к численному расчету процесса деформирования, используя прифронтные лучевые разложения в качестве начальных и краевых данных для численной схемы.

### 2.3.3 Использование прифронтных асимптотик в численной схеме расчетов.

Полагаем, что до момента  $t = t_0$  точность лучевого решения является приемлемой во всей области деформирования. Поэтому поле перемещений и положение волнового фронта определяются в ней зависимостями (2.79) и (2.84). Эта область в качестве нескольких первых слоев определяет начальные данные для дальнейших вычислений.

Начиная с момента  $t = t_0$ , уравнения движения интегрируем численно с помощью неявной конечно-разностной схемы. Для этого область  $\Omega : t > t_0$ ,  $0 < r < r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi$  разобьем равномерной сеткой с шагами  $\Delta t$  и  $\Delta r$  по времени и пространству соответственно (рис. 2.13), в узлах которой и будем искать решение. Входящие в уравнения частные производные заменим их конечно-разностными аппроксимациями по соседним узлам сетки:

$$u_{,r} \approx \frac{u(r + \Delta r, t) - u(r - \Delta r, t)}{2\Delta r},$$

$$u_{,rr} \approx \frac{u(r + \Delta r, t) - 2u(r, t) + u(r - \Delta r, t)}{\Delta r^2},$$

$$\dot{u} \approx \frac{u(r, t) - u(r, t - \Delta t)}{\Delta t},$$

$$\ddot{u} \approx \frac{u(r, t) - 2u(r, t - \Delta t) + u(r, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2},$$
(2.85)

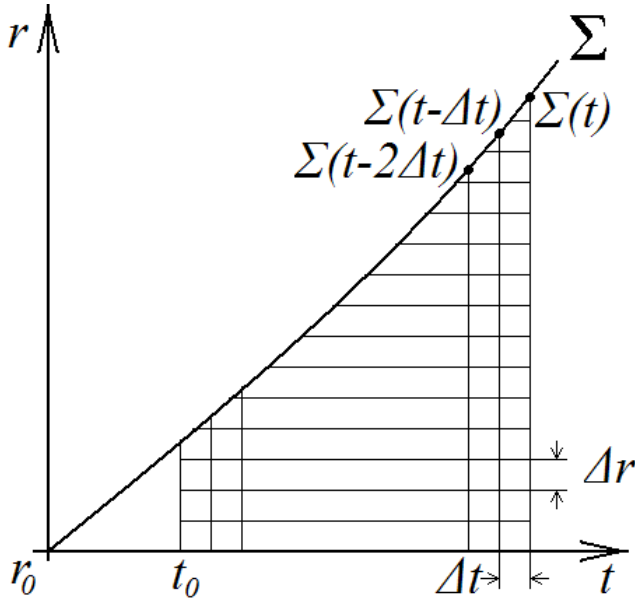


Рис. 2.13: Разностная сетка

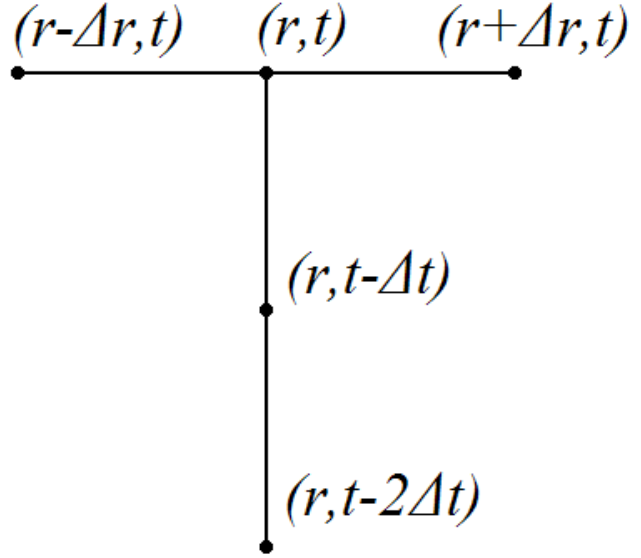


Рис. 2.14: Шаблон разностной схемы

что соответствует шаблону на рис. 2.14. Заметим, что полученные таким образом конечно-разностные уравнения дадут второй порядок аппроксимации исходного уравнения по пространственной координате, и первый – по временной, т.е.  $O(\Delta x^2 + \Delta t)$ . Для вычисления  $\delta$ -производной используем следующее конечно-разностное выражение:

$$\frac{\delta \omega_k}{\delta t} \approx \frac{\omega_k(t) - \omega_k(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.86)$$

Отметим, что для узлов сетки, лежащих между поверхностью разрывов на последнем временном слое  $\Sigma(t)$  и ее положением на позапрошлом временном слое  $\Sigma(t - 2\Delta t)$ , записать конечно-разностные выражения для второй производной по времени нельзя, так как соответствующие узлы не попадают в деформированную область. Будем считать, что в этой области поле перемещений описывается лучевыми рядами (2.79) и (2.84), но константы  $\omega_{k0}$  в них считаем неизвестными.

Таким образом, в области деформирования  $\Omega$  можно выделить область численного счета  $\Omega_1 : 0 \leq r \leq \Sigma(t - 2\Delta t)$  и прифронттовую  $\Omega_2 : \Sigma(t - m\Delta t) \leq r \leq \Sigma(t)$ , где справедливы аналитические решения. С приемлемой степенью точности, а этого всегда можно добиться за счет выбора  $m$  и  $\Delta t$ , лучевые

ряды, но уже с неизвестными параметрами  $\omega_{k0}$ . Считаем, что  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  накладываются друг на друга.

Для замыкания полученной системы конечно-разностных уравнений требуется поставить условия на границе  $\Omega_1$ . В качестве таковых используем условие на нагружаемой границе и значение перемещения, вычисленное с помощью приближенного аналитического решения в ближайшем к  $\Sigma(t - 2\Delta t)$  узле, не попавшем в  $\Omega_1$ . Новые значения констант лучевого разложения определяем, сопоставляя данные численных расчетов с лучевыми рядами. Для этого с помощью метода наименьших квадратов аппроксимируем значения перемещений в узлах сетки, принадлежащих одновременно  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , квадратичной функцией пространственной координаты. Сравнивая коэффициенты полученной функции с коэффициентами лучевого ряда, рассматриваемого в фиксированный момент времени, находим параметры лучевого разложения. Уточненные константы используются для вычисления перемещений в узлах, не попавших в область  $\Omega_1$ , а также для определения положения волнового фронта на следующем временном слое.

Таким образом, для получения решения на очередном временном слое необходимо решить систему алгебраических уравнений, в которую входят:

- Конечно-разностные уравнения для узлов, попавших в область численного решения;
- Лучевые разложения для узлов из области  $\Omega_2$ ;
- Полученные с помощью метода наименьших квадратов формулы для вычисления параметров лучевого разложения, включающие значения перемещений в узлах, входящих в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  одновременно;
- Условие на нагружаемой границе.

Эта система решается численно, методом простых итераций. В качестве начального приближения для очередного слоя используются значения перемещений, полученные при подстановке в аналитическое решение параметров



$\omega_1^{k-1}$  и  $\omega_2^{k-1}$  предыдущего слоя и времени  $t = \Delta t$  (для удобства полагаем, что на последнем временном слое  $t = 0$ ). За начальное приближение параметров разложения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  на  $k$ -ом слое принимаются  $\omega_1^k \approx \omega_1^{k-1} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} \Delta t$  и  $\omega_2^k \approx \omega_2^{k-1}$  соответственно,  $\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}$  для слоя  $t - \Delta t$  вычисляется по разностной формуле, следующей из (2.86). Также с помощью лучевого разложения вычисляются поля перемещений на первых двух временных слоях, необходимые для инициализации схемы. Константы лучевого разложения в этом случае вычисляются по граничному условию.

Приведем некоторые результаты численных расчетов. Параметры задачи  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $C = 1000$  м/с,  $\Delta x = 0,005$  м,  $\Delta t = 0,00005$  с,  $r_0 = 1$  м являются общими для обоих способов нагружения, в то время как  $v_0 = 0,1$  м/с,  $a_0 = 20$  м/с<sup>2</sup> соответствует задаче об антиплоском движении нелинейно-упругой среды, а  $\chi_0 = 1$  с<sup>-1</sup>,  $\kappa_0 = 1$  с<sup>-2</sup> – задаче о скрутке.

На рис. 2.15, 2.16 показано распределение поля перемещений вдоль луча для антиплоской задачи и распределение функции  $\psi(r, t)$  в задаче о скручивании среды соответственно в различные моменты времени. Рис. 2.17, 2.18 иллюстрируют изменение  $\omega_1$  и  $\eta_1$  со временем.

Оценка сходимости и устойчивости построенных численных схем, в силу ее нелинейности, является сложной задачей. Сходимость алгоритма проверялась экспериментально на последовательности разностных сеток с измельчающимся шагом. Рассматривались решения задач, полученные в момент времени  $t = 0,0001$  с при указанных выше условиях. Шаг сеток по пространственной и временной координатам последовательно уменьшался вдвое. Оказалось, что при уменьшении шагов сетки с  $\Delta x = 0,005$  м,  $\Delta t = 0,00005$  с до  $\Delta x = 0,0025$  м,  $\Delta t = 0,000025$  с максимальное относительное отклонение нового решения задачи о скручивающем ударном деформировании среды от полученного ранее составило 10%, при дальнейшем уменьшении шагов сетки в 2 и 4 раза – 7,8% и 5% соответственно. При решении задачи об антиплоском ударном деформировании несжимаемой нелинейно-упругой среды на том же

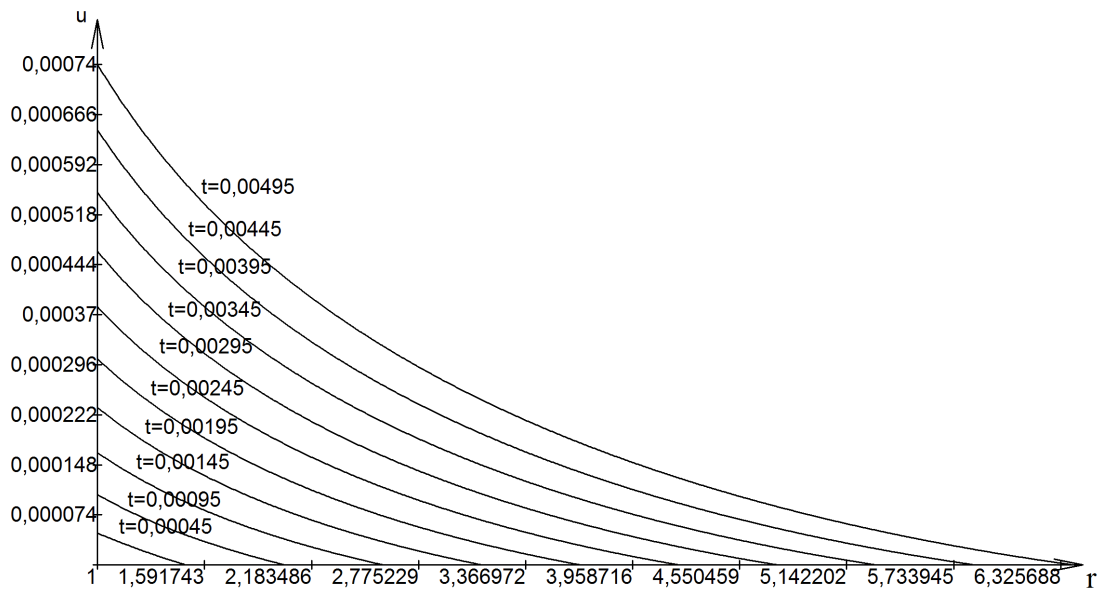


Рис. 2.15: Поле перемещений в различные моменты времени

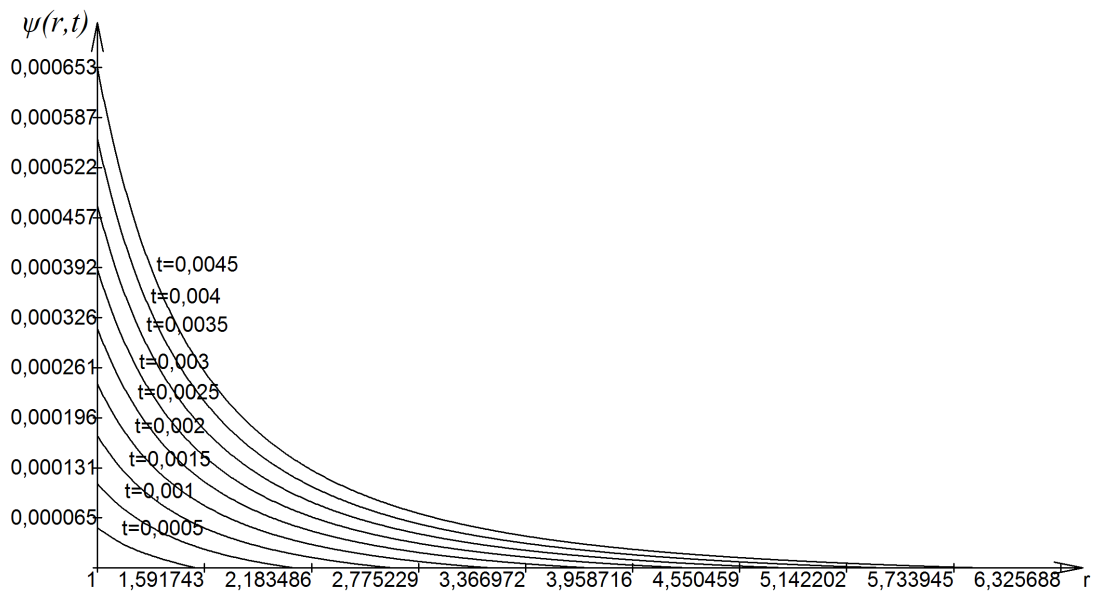


Рис. 2.16: Распределение  $\psi$  в различные моменты времени

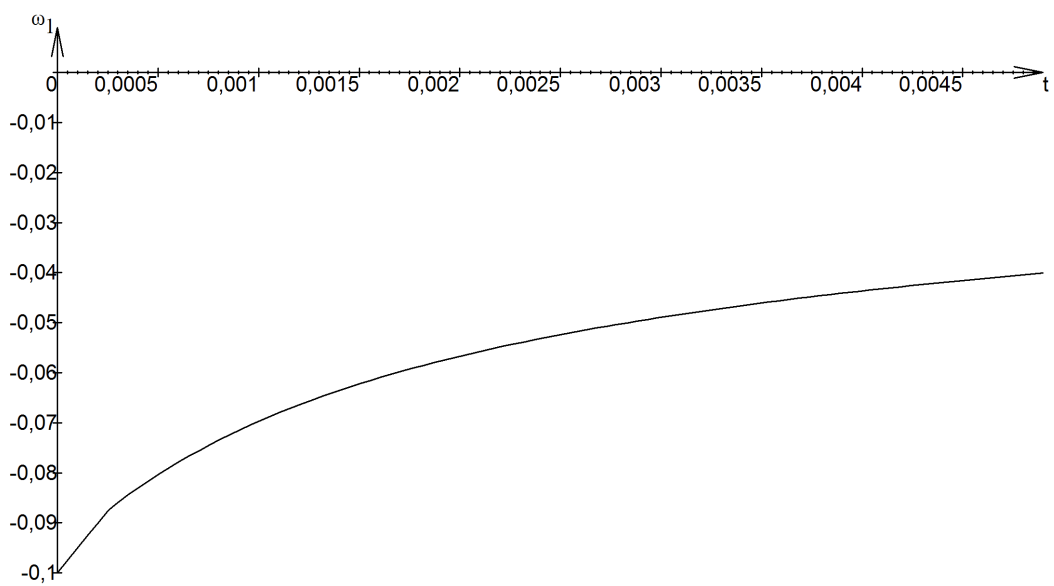


Рис. 2.17: Зависимость  $\omega_1(t)$

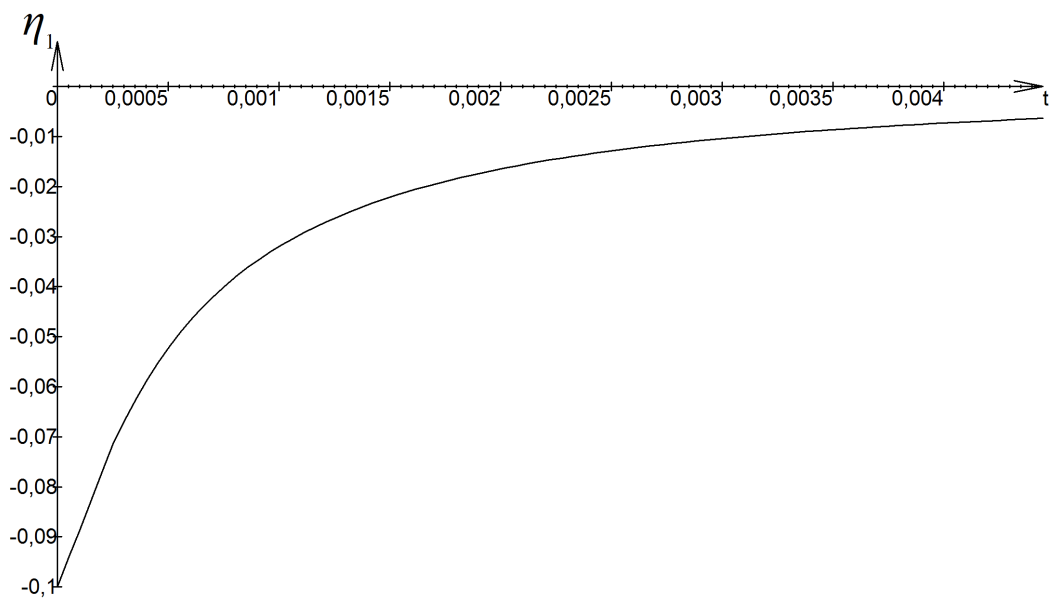


Рис. 2.18: Зависимость  $\eta_1(t)$

наборе сеток значения отклонений составили 5%, 3,6% и 2% соответственно. Отметим, что аналогичные результаты были получены и для задач с плоскими волнами.

Если в рассмотренных задачах ограничиться только аналитическим приближением, то получим, что интенсивность разрыва в задаче об антиплоском сдвиге  $\omega_1 = 0$  уже при  $t \approx 2r_0/C \ll 1$ , а в случае скручивающего воздействия и того быстрее – при  $t \approx 2r_0/3C$ . В то же время из аналогичных линеаризованных задач, для которых известно точное решение уравнения затухания  $\omega_1 = \omega_{10} (1 + Ct/r_0)^{-1/2}$  или  $\eta_1 = \eta_{10} (1 + Ct/r_0)^{-3/2}$  следует, что интенсивность разрыва стремится к нулю асимптотически. Представленные иллюстрации показывают, что численное решение позволяет избежать такой качественной погрешности, вносимой необходимостью дополнительных разложений интенсивностей разрывов в степенные ряды по времени. Отметим также, что, в отличие от волн ненулевой кривизны, для плоских волн представление интенсивности разрыва линейной функцией по времени дает вполне удовлетворительные результаты. Однако, чем быстрее изменяется кривизна поверхности разрывов, тем уже становится допустимая область аналитического решения и тем более необходим переход к численной схеме расчетов.

# Глава 3

## Плоские задачи

### 3.1 Задача об антиплоском движении среды с цилиндрической полостью

#### 3.1.1 Постановка задачи. Основные уравнения

Пусть несжимаемая упругая среда занимает пространство с вырезанной в нем бесконечной цилиндрической полостью  $\Lambda_0$ . Для определенности направляющей кривой цилиндрической поверхности, образующей границу полости, принимаем эллипс  $L_0$ . Введем декартову прямоугольную систему координат таким образом, что оси  $x_1$  и  $x_2$  совпадают с осями  $L_0$ , а ось  $x_3$  направлена параллельно образующим границы.

Рассмотрим движение среды, вызываемое нагрузкой, действующей на ее граничную поверхность и вызывающей перемещение точек границы по закону

$$u_3|_{\Lambda_0} = v_0(y_1)t + \frac{a_0(y_1)}{2}t^2. \quad (3.1)$$

Принятое условие несжимаемости заставляет считать, что в таком случае отличной от нуля будет только одна из компонент вектора перемещений, направленная параллельно образующей цилиндрической поверхности:

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u(x_1, x_2). \quad (3.2)$$

В качестве меры деформаций, как и ранее, принимаем тензор Альманси  $\alpha_{ij}$  (1.4). Для вычисления возникающих в деформированной среде напряжений применим формулу Мурнагана (1.14). Характер движения среды диктует дополнительные требования для связанности упругих постоянных в задании

термодинамического потенциала (плотности распределения свободной энергии) или упругого потенциала  $W = W(I_1, I_2)$  в нашем случае [93]. Эти ограничения заставляют переписать зависимость (1.17) в форме

$$W = -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1I_2 - \theta I_1^3 + \dots \quad (3.3)$$

Компоненты тензора деформаций в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -\frac{u_{,1}^2}{2}, & \alpha_{22} &= -\frac{u_{,2}^2}{2}, & \alpha_{33} &= 0, \\ \alpha_{12} &= -\frac{u_{,1}u_{,2}}{2}, & \alpha_{13} &= \frac{u_{,1}}{2}, & \alpha_{23} &= \frac{u_{,2}}{2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Следуя формуле Мурнагана, для компонент тензора напряжений в данном случае получим представления

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p - 2\mu - \frac{\mu + b}{2}m - \frac{3}{4}(\mu - b + \theta)u_{,1}^2m - \frac{3\theta + \mu - b}{4}u_{,2}^2m + \dots, \\ \sigma_{22} &= -p - 2\mu - \frac{\mu + b}{2}m - \frac{3}{4}(\mu - b + \theta)u_{,2}^2m - \frac{3\theta + \mu - b}{4}u_{,1}^2m + \dots, \\ \sigma_{33} &= -p - 2\mu + \frac{\mu - b}{2}m - \frac{3}{4}(\mu - b + \theta)m^2 + \dots, \\ \sigma_{12} &= \frac{b - \mu}{2}u_{,1}u_{,2}m + \dots, \\ \sigma_{13} &= \mu u_{,1} + \frac{3}{4}(\theta + \mu - b)u_{,1}m^2 + \dots, \\ \sigma_{23} &= \mu u_{,2} + \frac{3}{4}(\theta + \mu - b)u_{,2}m^2 + \dots, \\ m &= u_{,1}^2 + u_{,2}^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подстановка (3.5) в уравнения движения (1.9) позволяет записать последние в форме

$$\begin{aligned} p_{,1} &= u_{,22}u_{,1}\frac{b - \mu}{2}(3u_{,2}^2 + u_{,1}^2) - u_{,11}u_{,1}(b + \mu + 3(\theta + \mu - b)u_{,1}^2 + \\ &+ (3\theta + 2\mu - 2b)u_{,2}^2) - u_{,12}u_{,2}\left(\mu + b + \left(3\theta + \frac{3\mu}{2} - \frac{3b}{2}\right)u_{,2}^2 + \right. \\ &\left. + \left(3\theta + \frac{7\mu}{2} - \frac{7b}{2}\right)u_{,1}^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{,2} = & u_{,11}u_{,2} \frac{b-\mu}{2} (3u_{,1}^2 + u_{,2}^2) - u_{,22}u_{,2} (b + \mu + 3(\theta + \mu - b)u_{,2}^2 + \\
& + (3\theta + 2\mu - 2b)u_{,1}^2) - u_{,12}u_{,2} \left( \mu + b + \left( 3\theta + \frac{3\mu}{2} - \frac{3b}{2} \right) u_{,1}^2 + \right. \\
& \left. + \left( 3\theta + \frac{7\mu}{2} - \frac{7b}{2} \right) u_{,2}^2 \right), \\
& u_{,11} \left( \mu + \frac{3(\theta + \mu - b)}{4} (u_{,1}^2 + u_{,2}^2) (5u_{,1}^2 + u_{,2}^2) \right) + \\
& + u_{,22} \left( \mu + \frac{3(\theta + \mu - b)}{4} (u_{,1}^2 + u_{,2}^2) (u_{,1}^2 + 5u_{,2}^2) \right) + \\
& + 6(\theta + \mu - b)u_{,12}u_{,1}u_{,2} (u_{,1}^2 + u_{,2}^2) = \rho_0 \ddot{u}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Первые два уравнения системы служат для вычисления функции  $p$ . Именно переопределенность данной системы диктует требование о выборе упругого потенциала в форме (3.3), отличной от применявшейся ранее (1.17).

Третье уравнение в рассматриваемой задаче является основным, т.к. решением его является поле перемещений точек среды  $u(x_1, x_2)$ . Перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
& u_{,11} \left( 1 + \frac{3\alpha}{4} (u_{,1}^2 + u_{,2}^2) (5u_{,1}^2 + u_{,2}^2) \right) + \\
& + u_{,22} \left( 1 + \frac{3\alpha}{4} (u_{,1}^2 + u_{,2}^2) (u_{,1}^2 + 5u_{,2}^2) \right) + \\
& + 6\alpha u_{,12}u_{,1}u_{,2} (u_{,1}^2 + u_{,2}^2) = \frac{\ddot{u}}{C_2^2},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где  $C_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$ ,  $\alpha = \frac{\theta + \mu - b}{\mu}$ .

### 3.1.2 Лучевой метод решения двумерной задачи

В начальный момент времени от нагружаемой поверхности отделяется цилиндрическая поверхность разрывов  $\Sigma$ , на которой терпят разрыв производные функции  $u$ , но при этом выполняются геометрические, кинематические и динамические условия совместности разрывов (1.21), (1.22), (1.18)-(1.19). В рассматриваемой задаче в силу условия  $u_{i,3} = 0$  ударная волна остается цилиндрической поверхностью с параллельными оси  $Ox_3$  образующими. Таким образом, положение  $\Sigma$  полностью определяется ее направляющей кривой в

плоскости  $x_1 O x_2$ . Направляющую кривую зададим в виде

$$x_i = f_i(y_1, t), \quad i = 1, 2, \quad (3.8)$$

где  $y_{1,2}$  – координаты на поверхности  $\Sigma$ , и в силу геометрии ударной волны  $f_i$  не зависит от  $y_2$ .

Положим  $y_2 = x_3$ . Тогда метрический тензор поверхности  $\Sigma$  примет вид:

$$\|g_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} f_1'^2 + f_2'^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|g^{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_1'^2 + f_2'^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где  $f_i' = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}$ ,  $i = 1, 2$ .

Условия совместности на  $\Sigma$  позволяют вычислить модуль скорости  $G$ . Из (1.18), (1.19) в силу  $\rho = const$  имеем:

$$\begin{aligned} [v_j] \nu_j &= 0, \\ [\sigma_{ij}] \nu_j &= -\rho_0 G [v_i], \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\nu_i$  – компоненты единичной нормали к  $\Sigma$ ,  $v_i = \dot{u}$  – скорость точки среды.

Выражения для разрывов производных функции  $u$  по пространственным координатам на  $\Sigma$  получим с помощью (1.22) и (1.21):

$$[\dot{u}] = \omega_1, \quad [\ddot{u}] = \omega_2, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] = -\frac{\omega_1}{G}, \quad [u_{,j}] = -\frac{\omega_1}{G} \nu_j. \quad (3.11)$$

Для разрыва частной производной второго порядка по пространственным координатам из (1.21), (1.22), (3.11) следует соотношение

$$\begin{aligned} [u_{ij}] &= \frac{\nu_i \nu_j}{G^2} \left( \omega_2 - 2 \frac{\delta \omega_1}{\delta t} + \frac{\omega_1}{G} \frac{\delta G}{\delta t} \right) + \frac{\omega_1}{G^2} g^{\alpha\beta} G_{,\alpha} (\nu_j x_{i,\beta} + \nu_i x_{j,\beta}) - \\ &\quad - \frac{\omega_{1,\beta}}{G} g^{\alpha\beta} (x_{i,\alpha} \nu_j + x_{j,\alpha} \nu_i) - g^{\alpha\beta} x_{j,\alpha} n_{i,\beta} \frac{\omega_1}{G}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

которое с учетом (3.8) и (3.9) можно привести к виду

$$\begin{aligned} [u_{ij}] &= \frac{\nu_i \nu_j}{G^2} \left( \omega_2 - 2 \frac{\delta \omega_1}{\delta t} + \frac{\omega_1}{G} \frac{\delta G}{\delta t} \right) + \frac{\omega_1}{G^2} g^{11} G' (\nu_j f_i' + \nu_i f_j') - \\ &\quad - \frac{\omega_1'}{G} g^{11} (f_i' \nu_j + f_j' \nu_i) - g^{11} f_j' n_i' \frac{\omega_1}{G}. \end{aligned} \quad (3.13)$$



Штрихом здесь обозначена производная по  $y_1$ . Отметим, что при выводе (3.12) использовано выражение для  $\delta$ -производных компонент вектора нормали из [54]

$$\frac{\delta v_i}{\delta t} = -g^{a\beta} G_{,\alpha} x_{i,\beta}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим второе соотношение из (3.10), принимая  $i = 3$ . Поскольку  $\nu_3 = 0$ , с учетом (3.11)

$$[\sigma_{31}] \nu_1 + [\sigma_{32}] \nu_2 = -\rho_0 G \omega_1. \quad (3.15)$$

В силу того, что вне области, ограниченной ударной волной, среда не содержит деформаций, входящие в полученное уравнение разрывы компонент тензора напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} [\sigma_{31}] &= \mu [u_{,1}] + \frac{3}{4} (\theta + \mu - b) [u_{,1}] [m]^2 + \dots, \\ [\sigma_{32}] &= \mu [u_{,2}] + \frac{3}{4} (\theta + \mu - b) [u_{,2}] [m]^2 + \dots. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подстановка (3.16) в уравнение (3.15) позволяет записать его в форме

$$(\nu_1 [u_{,1}] + \nu_2 [u_{,2}]) \left( \mu + \frac{3}{4} (\mu + \theta - b) [m]^2 \right) = -\rho_0 G \omega_1. \quad (3.17)$$

Заменяя в полученном выражении разрывы  $[u_{,1}]$ ,  $[u_{,2}]$  согласно (3.11) и учитывая, что  $\nu_1^2 + \nu_2^2 = 1$ , получим для  $G$  соотношение

$$\begin{aligned} \omega_1 \left( 1 + \frac{3\alpha}{4} \left( \frac{\omega_1^2}{G^2} \right)^2 \right) &= \frac{G^2}{C_2^2} \omega_1, \quad \text{откуда} \\ G &= C_2 \left( 1 + \frac{3\alpha}{8} \left( \frac{\omega_1}{C_2} \right)^4 + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Второе выражение из (3.18) позволяет найти приближенное значение модуля скорости  $\Sigma$  в рассматриваемой точке в момент  $t = 0$ . Следует учитывать, что при  $t \neq 0$  имеет место зависимость  $\omega_1 = \omega_1(t, y_1)$ .

Используя геометрические и кинематические условия совместности (1.21), (1.22), перепишем уравнение движения в разрывах на  $\Sigma$ . Подстановка в (3.7) выражений разрывов производных из (3.11) и (3.13) позволяет представить его в виде

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\nu_1^2}{G^2} \left( \omega_2 - 2 \frac{\delta \omega_1}{\delta t} + \frac{\omega_1}{G} \frac{\delta G}{\delta t} \right) + 2 \frac{\omega_1}{G^2} g^{11} G' \nu_1 f_1' - \right. \\
& - 2 \frac{\omega_1'}{G} g^{11} f_1' \nu_1 - g^{11} f_1' n_1' \frac{\omega_1}{G} \left. \right) \left( 1 + \frac{3}{4} \alpha \frac{\omega_1^4}{G^4} (1 + 4\nu_1^2) \right) + \\
& \left( \frac{\nu_2^2}{G^2} \left( \omega_2 - 2 \frac{\delta \omega_1}{\delta t} + \frac{\omega_1}{G} \frac{\delta G}{\delta t} \right) + 2 \frac{\omega_1}{G^2} g^{11} G' \nu_2 f_2' - \right. \\
& - 2 \frac{\omega_1'}{G} g^{11} f_2' \nu_2 - g^{11} f_2' n_2' \frac{\omega_1}{G} \left. \right) \left( 1 + \frac{3}{4} \alpha \frac{\omega_1^4}{G^4} (1 + 4\nu_2^2) \right) + \\
& \left( \frac{\nu_1 \nu_2}{G^2} \left( \omega_2 - 2 \frac{\delta \omega_1}{\delta t} + \frac{\omega_1}{G} \frac{\delta G}{\delta t} \right) + \frac{\omega_1}{G^2} g^{11} G' (\nu_2 f_1' + \nu_1 f_2') - \right. \\
& \left. - \frac{\omega_1'}{G} g^{11} (f_1' \nu_2 + f_2' \nu_1) - g^{11} f_2' n_1' \frac{\omega_1}{G} \right) 6\alpha \frac{\omega_1^3}{G^3} \nu_1 \nu_2 = \frac{\omega_2}{C_2^2}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Входящую в него  $\delta$ -производную модуля скорости  $G$  найдем дифференцированием (3.18):

$$\frac{\delta G}{\delta t} \approx \frac{3\alpha}{2} \left( \frac{\omega_1}{C_2} \right)^3 \frac{\delta \omega_1}{\delta t} + \dots \tag{3.20}$$

Подстановка (3.20) в (3.19) позволяет получить выражение  $\delta$ -производной  $\omega_1$ . Пренебрегая малыми слагаемыми, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \omega_1}{\delta t} = & \frac{27\alpha \omega_1^4 \omega_2}{16C_2^4} - \frac{g^{11} C_2^2}{2} \left( \left( \frac{\omega_1}{C_2} - \frac{9}{8} \alpha \frac{\omega_1^5}{C_2^5} \right) (\nu_1' f_1' + \nu_2' f_2') + \right. \\
& \left. + 6\alpha \frac{\omega_1^4}{C_2^4} \left( \frac{\omega_1}{C_2} \right)' \nu_1 \nu_2 (\nu_1 f_2' + \nu_2 f_1') \right) + \dots
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Как и ранее, будем искать решение в виде лучевого ряда. Для этого представим величину  $\omega_1$  рядом типа Тейлора

$$\omega_1(y_1, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{\delta^k \omega_1}{\delta t^k} \right|_{t=0} t^k \approx \omega_{10} + \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} t + \dots \tag{3.22}$$

Аналогичное представление введем для компонент вектора нормали  $\nu_i$ :

$$\nu_i = \nu_{i0} + \frac{\delta \nu_i}{\delta t} t + \dots \tag{3.23}$$

Из (3.14) и (3.9) следует, что  $\frac{\delta \nu_i}{\delta t} = -g^{11} G' f_i'$ . Подставляя разложение  $\omega_1$  в выражение скорости ударной волны  $G$  и дифференцируя, получим

$$G_{,1} = \frac{3\alpha}{2C_2^3} \left( \omega_{10} + \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} t \right)^3 \left( \omega_{10,1} + \left( \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} \right)_{,1} t \right) + \dots, \tag{3.24}$$

Таким образом,

$$\frac{\delta\nu_{i0}}{\delta t} = -\frac{3\alpha}{2C_2^3} \frac{f_i'}{f_1'^2 + f_2'^2} \omega_{10}^3 \omega_{10,1}. \quad (3.25)$$

Так как предполагается, что всякая точка поверхности  $\Sigma$  движется в направлении внешней нормали к  $\Sigma$  со скоростью  $G$ , то

$$x_i = x_{i0} + \int_0^t G(\tau) \nu_i(\tau) d\tau, \quad x_{i0} \in L_0.$$

Подставив сюда разложения  $\omega_1$  и  $\nu_i$ , получим для координат точек на  $\Sigma$  справедливое при малых  $t$  представление

$$x_i = f_i(y_1) + C_2 \int_0^t \left( 1 + \frac{3\alpha}{8} \frac{\left( \omega_{10} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} t \right)^4}{C_2^4} \right) \left( \nu_{i0} + \frac{\delta\nu_{i0}}{\delta t} t \right) dt. \quad (3.26)$$

Начальное значение  $\delta$ -производной  $\omega_1$  в точке границы получим, подставляя в (3.21) соответствующие значения  $\omega_{10}$ ,  $f_i$  и  $\nu_i$ , вычисленные на  $L$ .

Систему (3.25) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} x_i(y_1, t) = & f_i(y_1) + \left( C_2 \nu_{i0} + \frac{8\alpha \omega_{10}^4}{3C_2^3} \right) t + \\ & + \left( C_2 \frac{\delta\nu_{i0}}{\delta t} \left( 1 + \frac{3\alpha \omega_{10}^4}{8 C_2^4} \right) + \frac{3\alpha \omega_{10}^3}{2 C_2^3} \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} \nu_{i0} \right) \frac{t^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

Полученные зависимости позволяют определить положение фронта ударной волны  $\Sigma(t)$  при  $t \ll 1$ .

Введем лучевую координату  $s$ . Пусть

$$\begin{aligned} s = \int_0^t G(\tau) d\tau = \int_0^t c \left( 1 + \frac{3\alpha}{8C_2^4} \left( \omega_{10} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} \tau \right)^4 \right) d\tau = \\ = C_2 \left( \left( 1 + \frac{3\alpha \omega_{10}^4}{8 C_2^4} \right) t + \frac{3\alpha \omega_{10}^3}{2 C_2^3} \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} \frac{t^2}{2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

При  $t \ll 1$  можно считать  $s \approx C_2 t$  и  $t \approx \frac{s}{C_2}$ . Данная замена может быть произведена во всех полученных формулах, и геометрия лучей будет определяться через  $x_i = x_i(y_1, y_2, s)$ ,  $i = 1, 2$ .

Искомую функцию  $u$  представим в виде степенного ряда

$$u = - \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \left|_{t=\int_0^s \frac{ds}{G(s)}} \left( t - \int_0^s \frac{ds}{G(s)} \right)^i \frac{1}{i!}, \quad t \geq t_{\Sigma}. \quad (3.29)$$

Подставляя в него полученные ранее соотношения и ограничиваясь слагаемыми первого и второго порядка, получим приближенное решение задачи. Отметим, что данное решение справедливо вдоль луча, т.е. вдоль кривой (3.27), где полагаем  $t \approx \frac{s}{C_2}$ .

### 3.1.3 Численно-аналитическая схема решения задачи об антиплоском движении среды с цилиндрической полостью

Для численного интегрирования уравнений движения будем использовать конечно-разностные схемы. Для этого введем регулярную прямоугольную сетку с постоянным шагом по пространственным и временной координатам (рис. 3.1), в узлах которой и будем искать решение. Входящие в уравнения частные производные заменим их конечно-разностными аппроксимациями по соседним узлам сетки, удовлетворяющими показанному на рис. 3.2 шаблону:

Здесь  $\Delta t$  - шаг по временной координате,  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  - шаг по первой и второй пространственным координатам соответственно во второй задаче.

Каждый шаблон включает узлы трех последних слоев сетки по времени. Для аппроксимации производных в регулярных узлах сетки используем сле-

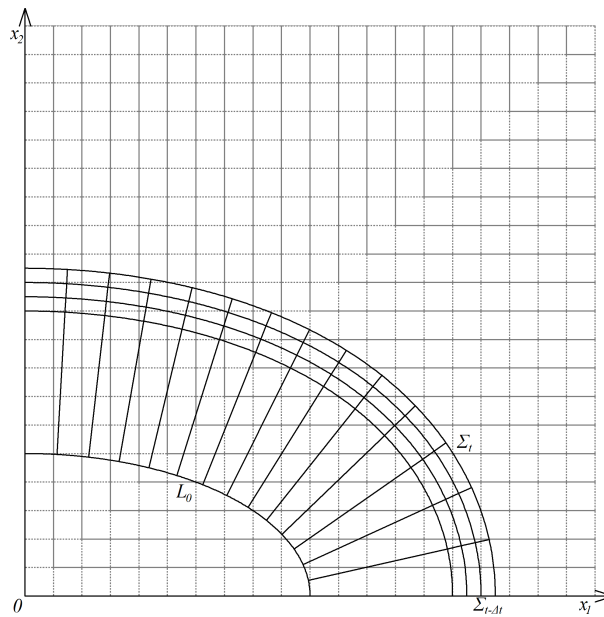


Рис. 3.1: разностная сетка. Темными линиями показаны нагружаемая граница  $L_0$ , а также система пересекающихся лучей волнового фронта  $\Sigma$  в различные моменты времени.

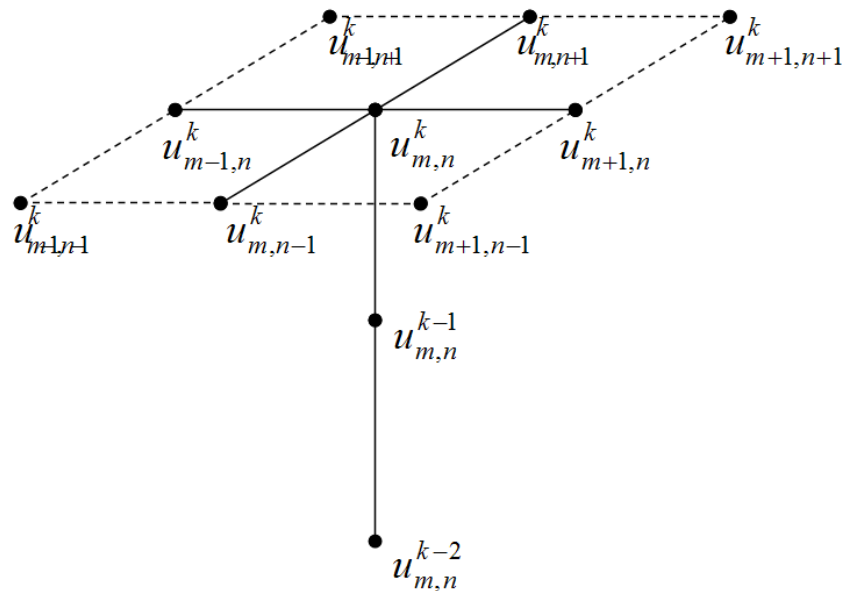


Рис. 3.2: шаблон разностной схемы. Верхний индекс  $u$  соответствует номеру временного слоя, нижние – пространственным слоям.

дующие формулы:

$$\begin{aligned}
u_{,1} &\approx \frac{u(x + \Delta x_1, x_2, t) - u(x_1 - \Delta x_1, x_2, t)}{2\Delta x_1}, \\
u_{,2} &\approx \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2, t) - u(x_1, x_2 - \Delta x_2, t)}{2\Delta x_2}, \\
u_{,11} &\approx \frac{u(x + \Delta x_1, x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t) + u(x_1 - \Delta x_1, x_2, t)}{\Delta x_1^2}, \\
u_{,22} &\approx \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t) + u(x_1, x_2 - \Delta x_2, t)}{\Delta x_2^2}, \\
u_{,12} &\approx \frac{1}{4\Delta x_1 \Delta x_2} \left( u(x + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, t) - u(x_1 + \Delta x_1, x_2 - \Delta x_2, t) + \right. \\
&\quad \left. + u(x_1 - \Delta x_1, x_2 - \Delta x_2, t) - u(x_1 - \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, t) \right), \\
\ddot{u} &\approx \frac{u(x_1, x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t - \Delta t) + u(x_1, x_2, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Отметим, что построенные аппроксимации имеют второй порядок по пространственным координатам и первый – по временной.

Для численного решения рассматриваемых задач необходимо знать на каждом временном шаге положение подвижной границы. Кроме того, для использования конечно-разностных аппроксимаций производных необходимы значения  $u$  во всех узлах из деформированной области среды, в том числе в прифронтных. В то же время, для узлов сетки из области, лежащей между поверхностью разрывов на данном временном слое и ее положением на позапрошлом временном слое, записать конечно-разностное выражение для второй производной по времени нельзя, так как соответствующие узлы с предыдущих временных слоев не попадают в деформированную область. С другой стороны, полученные аналитические решения позволяют получить приближенное решение задач в прифронтной окрестности, но они справедливы лишь для достаточно малых времен, так как параметры лучевых разложений вычислены с использованием граничных условий на неподвижных границах.

Будем рассматривать аналитические решения как уравнения относительно перемещений среды и параметров лучевого разложения, записанные для уз-

лов прифронтной области в произвольный момент времени. Таким образом, вычислив на произвольном временном шаге решение задачи в узлах сетки, достаточно близких к поверхности разрывов, можно определить соответствующие последнему временному слою параметры лучевого разложения, а потом, в свою очередь, определить новое положение фронта волны и перемещения в прифронтных узлах, используя лучевые формулы.

Нагружаемая граница и фронт ударной волны представляет собой замкнутые линии, симметричные относительно осей координат. Положение последнего определяется, вообще говоря, как

$$x_i = f_i(y_1, t), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, чтобы задать положение  $\Sigma$ , необходимо определить две функции от двух переменных - времени  $t$  и параметра  $y$ , заданного вдоль направляющей фронта волны.

Положения границ будем интерполировать кубическим сплайном. Сплайн для подвижной границы строится заново на каждом временном слое. В качестве параметра сплайна выберем вспомогательную переменную  $y$ , заданную вдоль границы. В силу симметричности задачи относительно координатных осей целесообразно рассматривать лишь первый квадрант, а значит, концы рассматриваемых отрезков границ будут лежать на осях координат. Граничные условия для сплайнов, интерполирующих координатные функции границ, зададим следующим образом. На пересечении с  $Ox_1$   $f_1$  имеет максимум, а  $f_2$  - перегиб, поэтому

$$f'_1 = 0, \quad f''_2 = 0,$$

Соответственно, на пересечении с  $Ox_2$  имеем:

$$f'_2 = 0, \quad f''_1 = 0.$$

Аналогичным образом будем интерполировать функции, заданные на подвижной границе, такие как  $\varpi_1$  и  $\varpi_2$ . В силу симметричности, у функции, за-

данной на границе, на пересечении с осью координат обращается в ноль первая производная по параметру границы  $y$ . Следовательно, граничное условие для них имеет вид

$$\omega'_1|_{Ox_1} = \omega'_1|_{Ox_2} = 0;$$

$$\omega'_2|_{Ox_1} = \omega'_2|_{Ox_2} = 0;$$

Пусть для простоты узлы сплайнов, соответствующие функциям, заданным на одной границе, совпадают. Также учтем, что при движении фронта ударной волны значение параметра, соответствующего любому узлу, остается неизменным, и при  $t = 0$  точки границ, соответствующие одному и тому же значению  $y$ , совпадают.

Условия симметричности относительно осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  позволяет записать для перемещений точек среды следующие соотношения:

$$u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2),$$

$$u(x_1, x_2) = u(x_1, -x_2).$$

Эти соотношения позволяют записать конечно-разностные уравнения для узлов, лежащих на координатных осях.

Для замыкания системы необходимы уравнения, связывающие перемещения точек среды в прифронтной области. В качестве таковых используем полученные ранее лучевые разложения, рассматривая их как уравнения относительно  $u$  и заданных вдоль  $\Sigma$  параметров  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Эти соотношения, записанные для узлов разностной сетки из прифронтной области, позволяют замкнуть систему.

Рассмотрим уравнение (3.29) Запишем его в виде:

$$u = -\left(\omega_{10} + \frac{\delta\omega_1}{\delta t}\Bigg|_{t=0} t_\Sigma\right)(t - t_\Sigma) - \frac{1}{2}\omega_{20}(t - t_\Sigma)^2. \quad (3.31)$$

Здесь  $t_\Sigma$  – момент, когда фронт ударной волны прошел через данную точку,  $t$  – время, прошедшее с момента начала деформирования.

Функции  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$ ,  $\frac{\delta\omega_1}{\delta t}\Bigg|_{t=0}$  зависят только от  $y$ , а  $t_\Sigma$  для фиксированной



точки – константа. Поэтому

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -(\omega_{10} + \left. \frac{\delta\omega_1}{\delta t} \right|_{t=0} t_\Sigma) - \omega_{20}(t - t_\Sigma); \\ \ddot{u} &= -\omega_{20};\end{aligned}\tag{3.32}$$

С другой стороны,  $\ddot{u}$  и  $\dot{u}$  могут быть получены с помощью конечно-разностных формул.

Рассмотрим отдельный узел сплайнов, описывающих подвижную границу. Для замыкания системы необходимо записать не менее двух различных уравнений, куда вошли бы значения параметров  $\omega_1$  и  $\omega_2$  данного узла.

Для этого рассмотрим подвижную границу в моменты  $t-3\Delta t$  и  $t-2\Delta t$ . Перемещения точек среды, совпадающих с рассматриваемыми узлами границы, можно получить путем интерполирования по соседним узлам сетки, для которых записаны конечно-разностные уравнения. Для интерполирования используем формулу Тейлора, считая, что разложение производится относительно ближайшей точки из деформированной области. Для вычисления входящих в формулу производных используем конечно-разностные выражения.

С другой стороны, в окрестности  $\Sigma$  выполняется асимптотическое разложение (3.31) и, соответственно, формулы (3.32). Рассматривая эти выражения как уравнения относительно  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , получим значения параметров для данного узла.

Пусть на последнем временном слое  $t=0$ , тогда  $t_\Sigma = -3\Delta t$  и

$$\begin{aligned}\frac{u(x_1, x_2, t) - u(x_1, x_2, t - 3\Delta t)}{3\Delta t} &= -(\omega_{10} + \left. \frac{\delta\omega_1}{\delta t} \right|_{t=0} t_\Sigma) + 3\Delta t\omega_{20}, \\ \frac{u(x_1, x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t - \Delta t) + u(x_1, x_2, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2} &= -\omega_{20}, \\ \omega_{10} &= -\frac{u(x_1, x_2, t) - u(x_1, x_2, t - 3\Delta t)}{3\Delta t} - \left. \frac{\delta\omega_1}{\delta t} \right|_{t=0} t_\Sigma + 3\Delta t\omega_{20}, \\ \omega_{20} &= -\frac{u(x_1, x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t - \Delta t) + u(x_1, x_2, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2}.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Полученная система алгебраических уравнений, включающая конечно-разностные уравнения для внутренних узлов деформированной области и лучевые разложения для точек, совпадавших с узлами подвижной границы на предыдущих временных слоях, решается численно.

В качестве начального приближения для очередного слоя используется приближенное аналитическое решение. Для вычисления  $\delta$ -производной  $\omega_1$  используется конечно-разностное выражение:

$$\frac{\delta\omega_1}{\delta t}(y, t) \approx \frac{\omega_1(y, t) - \omega_1(y, t - \Delta t)}{\Delta t};$$

За начальное приближение  $\omega_2$  используется значение с предыдущего слоя, начальное приближение для  $\omega_1$  вычисляется по формуле:

$$\omega_1(y, t) \approx \omega_1(y, t - \Delta t) + \frac{\delta\omega_1}{\delta t}(y, t - \Delta t);$$

Также с помощью лучевого разложения вычисляются поля перемещений на первых двух временных слоях, необходимые для инициализации схемы, константы лучевого разложения в данном случае вычисляются по граничному условию.

Заметим, что для вычисления перемещения в узле сетки по лучевой формуле необходимо сначала определить лучевые координаты узла  $s$  и  $y$ . В случае, когда узел расположен достаточно близко к поверхности разрывов, можно считать, что луч – прямая, проходящая через узел и перпендикулярная фронту. Таким образом, можно определить соответствующее лучу значение параметра  $y$ . Зная  $y$ , можно найти значение параметров лучевого разложения с помощью интерполяционного полинома, а по ним определить значение  $s$ . Параметр  $y$  определяется из условия параллельности нормали к сплайну в соответствующей параметру точке и вектора, началом которого является рассматриваемый узел сетки, а концом – точка сплайна, соответствующая параметру.

Таким образом, для нахождения численного решения в произвольный момент времени необходимо, задавшись шагом по времени, решать систему

нелинейных уравнений, в которую входят уравнения движения среды, записанные с использованием конечно-разностных выражений, и лучевые разложения для прифронтных точек. Получаемые в ходе решения константы лучевого разложения используются для определения на каждой итерации положения фронта ударной волны и его геометрических параметров, входящих в лучевое разложение.

Приведем результаты численных расчетов. Параметры задачи выбраны следующим образом: длины полуосей эллипса составляют 1, 5 и 1, параметры материала  $\alpha = 10$ ,  $C_2 = 1000$ , скорость и ускорение нагружаемой границы в начальный момент составляют 1 м/с и 1 м/с<sup>2</sup>,  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,05$ ,  $\Delta t = 0,00002$ , решение строилось с помощью лучевого метода до момента  $t = 0,0002$ .

На рис. 3.3 и 3.4 показаны линии уровня поля перемещений в моменты  $t = 0,001$  и  $t = 0,0017$ . Верхний контур в обоих случаях соответствует положению фронта ударной волны, на которой  $u = 0$ , нижний – нагружаемой границе  $L_0$ .

На рис. 3.5 показаны графики перемещений вдоль различных лучей в фиксированный момент времени  $t = 0,01$ . Луч определяется значением параметра  $y$ , изначально задаваемого вдоль границы  $L_0$ , причем значение  $y = 0$  соответствует пересечению границы с осью  $x_1$ , а  $y = a$  – с осью  $x_2$ .

На рис. 3.6 показано распределение  $\omega_1$  вдоль  $\Sigma$  в фиксированный момент времени  $t = 0,001$ .

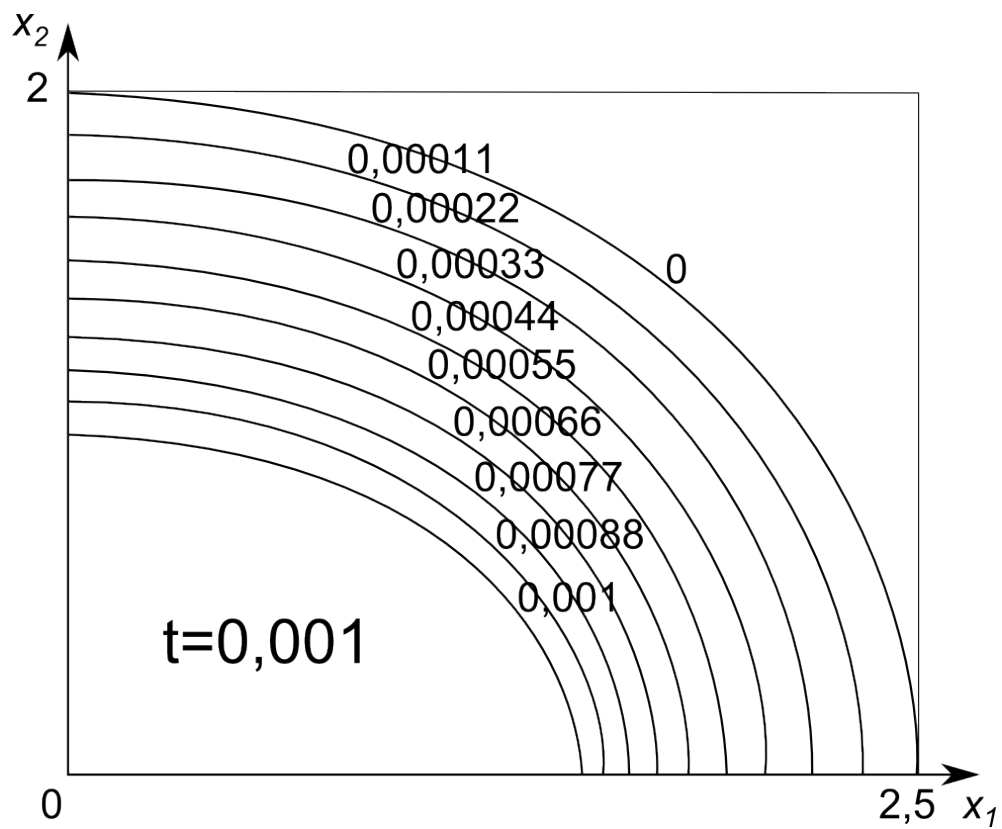


Рис. 3.3: линии уровня  $u$  в момент 0,001

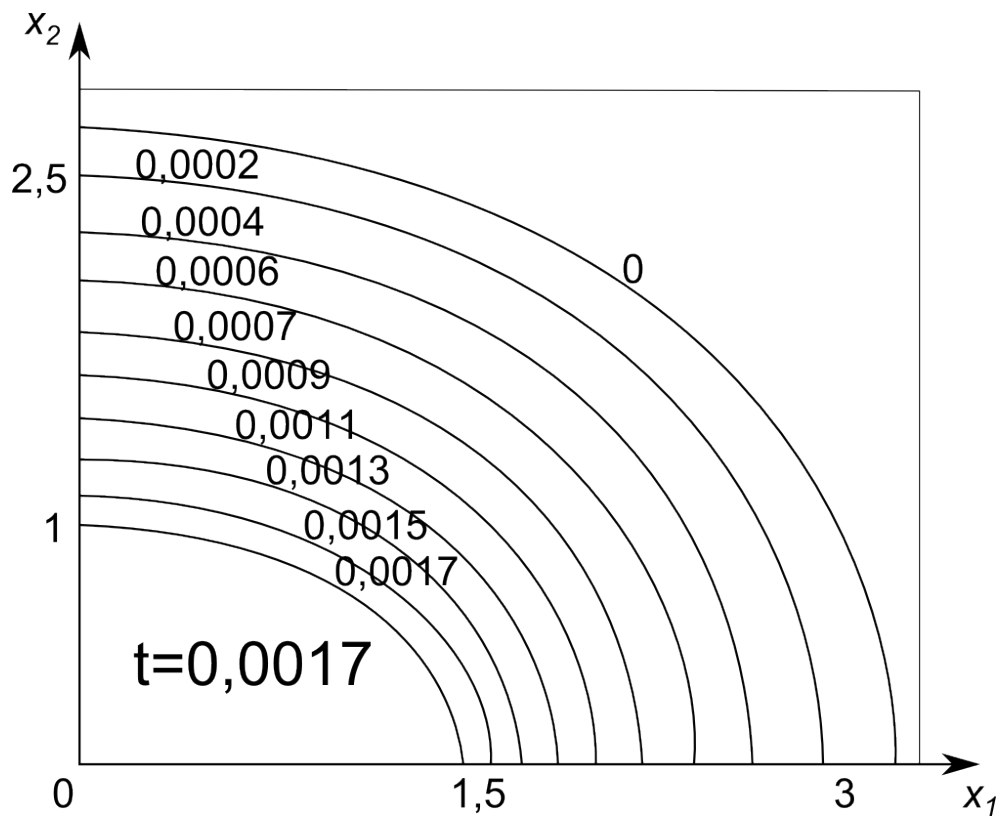


Рис. 3.4: линии уровня  $u$  в момент 0,0017

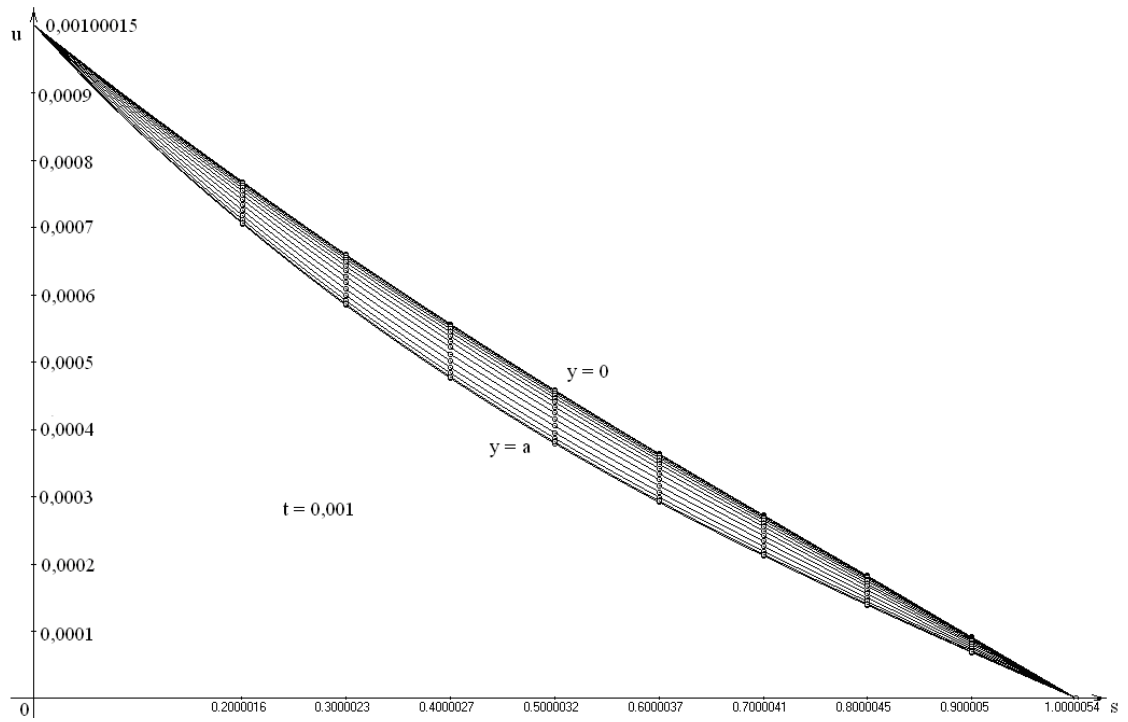


Рис. 3.5: перемещения вдоль различных лучей

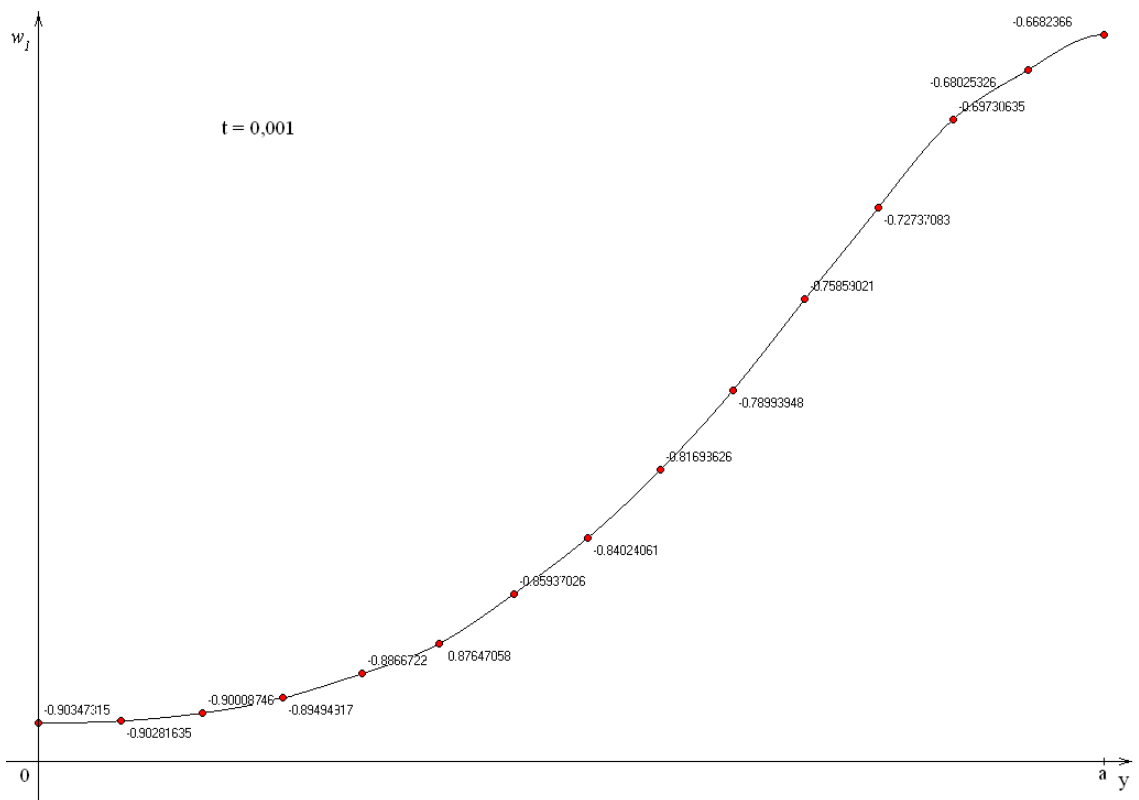


Рис. 3.6: зависимость  $\omega_1$  от  $y$

## 3.2 Задача об ударном нагружении сжимаемого упругого полупространства с цилиндрической границей.

### 3.2.1 Постановка краевой задачи. Общие модельные соотношения.

Пусть полупространство ограничено неплоской цилиндрической поверхностью  $\Phi_0$ . Ее направляющий контур – кривая  $L_0$  в плоскости  $x_1, x_2$ , симметричная относительно оси  $x_1$  (см. рис 3.7). Образующие поверхности  $\Phi_0$

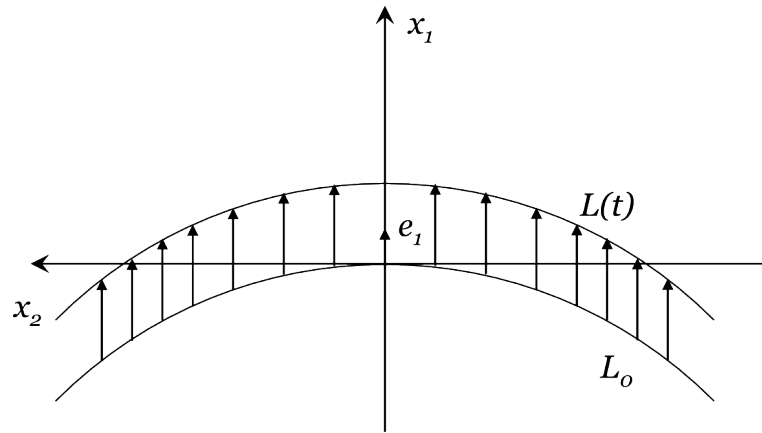


Рис. 3.7: ударное нагружение полупространства с цилиндрической границей

параллельны оси  $x_3$ . До момента  $t = 0$  среда находилась в свободном состоянии. С момента  $t = 0$  в результате нагружения все точки поверхности  $\Phi_0$  (т.е. кривой  $L_0$ ) смещаются в направлении оси  $x_1$  по закону

$$\bar{u}_L(t)|_{L(t)} = \left( V_0 t + \frac{A t^2}{2} \right) \bar{e}_1, \quad \bar{r}_L(y, t) = \bar{r}_0(y) + \bar{u}_L(t) \quad (3.34)$$

где  $y$  – параметр вдоль кривой  $L_0$ ,  $\bar{r}_0$  и  $\bar{r}_L$  соответствуют начальному и текущему положению контура ( $L_0$  и  $L(t)$ ),  $V_0 > 0$ .

Для задачи плоской деформации  $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$ ,  $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$ ,  $u_3 = 0$ , и из (1.9) получаем уравнения Навье

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + A_1 (u_{k,j} u_{k,ji} + u_{i,j} u_{k,kj} + u_{j,i} u_{k,kj}) + A_2 u_{k,k} u_{j,ji} + \\ & + A_3 u_{k,i} u_{k,jj} + A_4 u_{k,k} u_{i,jj} + A_5 (u_{k,j} u_{i,kj} + u_{j,k} u_{i,kj} + u_{j,k} u_{k,ij} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +u_{i,k}u_{k,jj}) + A_6u_{j,k}u_{k,ji} = \rho_0 (\ddot{u}_i (1 - 3u_{s,s}) + u_{i,j}\ddot{u}_j + 2\dot{u}_{i,j}\dot{u}_j) + \dots \quad (3.35) \\
& A_1 = -\lambda - 2\mu + l + \frac{3n}{4}, \quad A_2 = -5\lambda - 3\mu + l + 6m, \quad A_3 = -2\mu + \frac{3n}{4} \\
& A_4 = -\lambda - 3\mu + l, \quad A_5 = \frac{3n}{4} - \mu, \quad A_6 = A_5 + l, \quad i, j = 1, 2
\end{aligned}$$

В системе (3.35) и далее латинские индексы принимают значения 1,2. Многоточием в уравнениях (3.35) обозначены невыписанные слагаемые с более высоким порядком малости.

В результате заданного нагружения создаются две ударные волны – цилиндрические поверхности  $\Sigma_1(t)$  и  $\Sigma_2(t)$ , отделяющиеся в момент  $t = 0$  от поверхности  $\Phi_0$ . В дальнейшем названия ударных волн будем применять и к линиям их пересечения с плоскостью  $x_1, x_2$ . Волна  $\Sigma_1(t)$  – чисто продольная, на ней выполняются условия

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1(y, t) &= \bar{r}_0(y) + \int_0^t G_1(y, \xi) \bar{\nu}(y, \xi) d\xi, \quad G_1 \approx C_1(1 + \alpha_1\tau_1 + \dots) \\
\tau_1 &= [u_{i,j}]|_{\Sigma_1} \nu_i \nu_j, \quad \gamma_1 = [u_{i,j}]|_{\Sigma_1} \nu_j \mu_i = 0, \quad u_i|_{\Sigma_1} = 0 \\
\mu_i \mu_i &= \nu_i \nu_i = 1, \quad \nu_i \mu_i = 0, \quad [u_{i,j}] = u_{i,j}^+ - u_{i,j}^-, \\
C_1^2 &= (\lambda + 2\mu) \rho_0^{-1}, \quad \alpha_1 = 9/4 - 3/2(l + m + n) (\lambda + 2\mu)^{-1},
\end{aligned} \quad (3.36)$$

причем  $\nu_i$  – координаты единичного вектора внешней нормали, направленного в сторону движения волны  $\Sigma_1$ ,  $G_1$  – скорость этой волны в направлении вектора  $\nu_i$ ,  $\tau_1$  и  $\gamma_1$  – продольная и поперечная компоненты волнового вектора. Система (3.36) задает геометрию лучевых координат за волной  $\Sigma_1$ . На второй (квазипоперечной) ударной волне  $\Sigma_2$ ,  $\tau_2\gamma_2 \neq 0$ , причем  $\tau_2$  имеет второй порядок малости относительно  $\gamma_2$ . На волне  $\Sigma_2$  выполняются условия:

$$\begin{aligned}
\bar{r}_2(y, t) &= \bar{r}_0(y) + \int_0^t G_2(y, \xi) \bar{n}(y, \xi) d\xi, \quad G_2 \approx C_2(1 + \beta_1 u_{n,n}^+ + \\
& \beta_2 u_{m,m}^+ + \frac{\dot{u}_n^+}{C_2} + \dots), \quad [u_i]|_{\Sigma_2} = 0 \\
\tau_2 &\approx \gamma_2 \left( \frac{\delta + 1}{2} (\gamma_2 - 2u_{m,n}^+) - (\delta + 2) u_{n,m}^+ \right) + \dots, \quad \tau_2 = [u_{i,j}]|_{\Sigma_2} n_i n_j \quad (3.37)
\end{aligned}$$

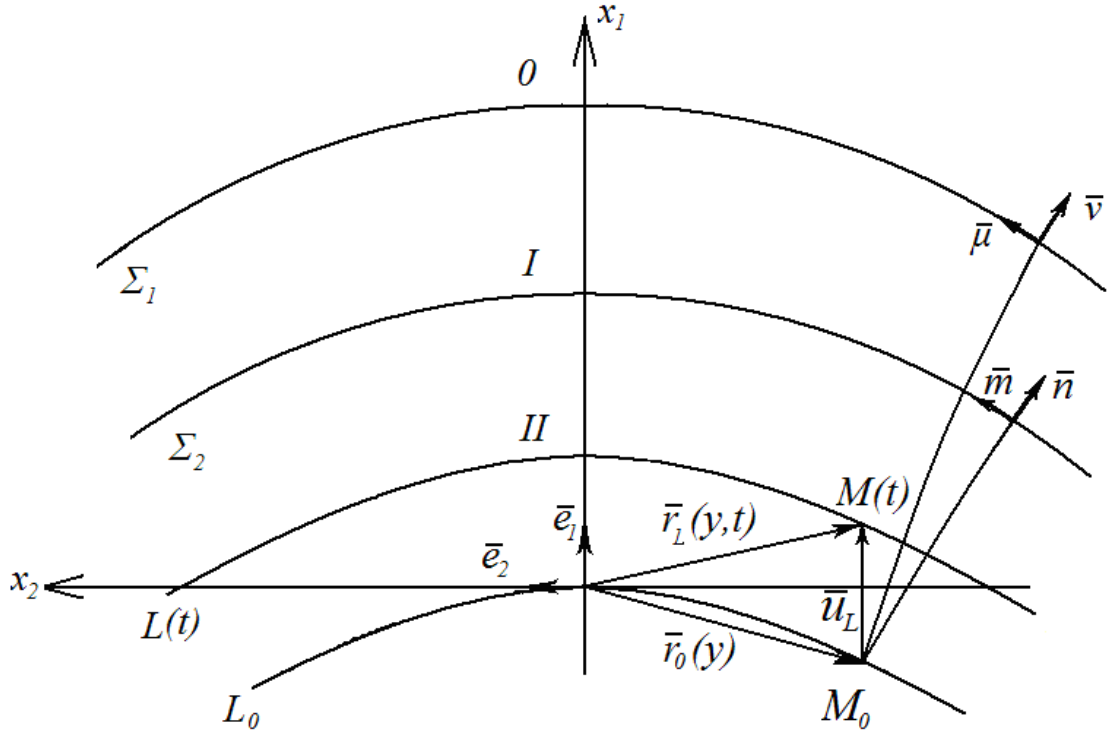


Рис. 3.8: поверхности разрывов  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  делят среду на области 0, I, II.

$$\gamma_2 = [u_{i,j}]|_{\Sigma_2} n_j m_i, \quad C_2^2 = \mu \rho_0^{-1}, \quad \beta_1 = -1 + \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{l}{2} + \frac{3n}{4} \right)$$

$$\beta_2 = \beta_1 - 2, \quad \delta + 1 = \left( -\lambda - 4\mu + l + \frac{3n}{2} \right) (\lambda + \mu)^{-1}$$

где  $n_i$  и  $m_i$  – векторы, сходные по смыслу с  $\nu_i$  и  $\mu_i$  на волне  $\Sigma_1(t)$ ,  $G_2$  – скорость  $\Sigma_2$  в направлении  $n_i$ , индексом «+» обозначаются величины, вычисляемые перед  $\Sigma_2(t)$ , величины  $u_{n,n}^+$ ,  $u_{m,m}^+$  и т.д. вычисляются проектированием на локальную декартову систему с базисом из векторов  $n_i$  и  $m_i$ . Системой (3.37) определяются лучевые координаты за квазипоперечной волной.

На рисунке деформируемая область расположена выше подвижной линии  $L(t)$ , кривые разрывов  $\Sigma_i(t)$  делят область на три подобласти, нумеруемые 0, I и II. Также на рисунке показаны лучевые направления и локальные системы координат на кривых  $\Sigma_i(t)$ .



### 3.2.2 Лучевой метод решения задачи плоской деформации.

Как и ранее, поле перемещений в окрестности волнового фронта представим рядом вида

$$u_i^{(k)}(y, s, t) = u_i^{(k-1)}(y, s, t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[ \frac{\partial^j u_i}{\partial t^j} \right] \Big|_{T_k} (t - T_k)^j \quad (3.38)$$

$$T_k = \int_0^s G_k^{-1}(y, \xi) d\xi, \quad u_i^{(0)} = 0, \quad k = 1, 2$$

где индексом в круглых скобках обозначен номер области, для которой строим решение,  $s$  – расстояние, проходимое вдоль выбранного луча. Укажем на два важных момента в интерпретации формул (3.38). Во-первых, за каждой из волн возникает своя лучевая система, поэтому решения  $u_i^{(1)}$  и  $u_i^{(2)}$  исходно зависят от двух разных криволинейных систем координат. Поэтому, чтобы определить  $u_i^{(2)}$ , необходимо  $u_i^{(1)}$  представить в лучевых координатах за линией  $\Sigma_2(t)$ . Во-вторых, наряду с представлением (3.38) должна быть указана возможность задания функций  $u_i^{(k)}$  в исходных декартовых координатах. Далее в формулах (3.38) ограничимся квадратичными слагаемыми. Этого достаточно для выполнения условий (3.34), и в то же время позволяет исключить громоздкие вычисления.

Рассмотрим по-отдельности каждую из прифронтных областей. Как обычно, предполагаем высокую гладкость решения в окрестности ударной волны. Коэффициенты рядов (3.38) определяем, дифференцируя уравнения движения (3.35) частным образом по времени до требуемого порядка и записывая результат дифференцирования в разрывах. В нашем случае достаточно в разрывах записать саму систему (3.35). Поле перемещений  $u_i^{(1)}$  на основе формулы (3.38) представим в виде

$$u_i^{(1)}(y, s, t) \approx -\kappa_i|_{T_1} (t - T_1) - \frac{\chi_i}{2} \Big|_{T_1} (t - T_1)^2 - \dots \quad (3.39)$$

$$\kappa_i = [\dot{u}_i]|_{\Sigma_1}, \quad \chi_i = [\ddot{u}_i]|_{\Sigma_1}$$

Из геометрических и кинематических условий совместности следует:

$$\begin{aligned}
[u_{i,j}] &= -\kappa_i \nu_j G_1^{-1} = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right] \nu_j, \quad [\dot{u}_{i,j}] = \left( \frac{\delta \kappa_i}{\delta t} - \chi_i \right) \frac{\nu_j}{G_1} + a^{\alpha\beta} \kappa_{i,\alpha} x_{j,\beta} \\
[u_{i,jk}] &= \varphi_i \nu_j \nu_k + \theta_i^\beta x_{j,\beta} \nu_k + \psi_{ij}^\beta x_{k,\beta}, \quad \theta_i^\beta = -a^{\alpha\beta} (\kappa_i G_1^{-1})_{,\alpha} \\
\varphi_i &= C_1^{-2} \left( \chi_i - 2 \frac{\delta \kappa_i}{\delta t} + \frac{\kappa_i}{G_1} \frac{\delta G_1}{\delta t} \right), \quad \psi_{ij}^\beta = -a^{\alpha\beta} (\kappa_i \nu_j G_1^{-1})_{,\alpha}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = u_{i,j} \nu_j
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Здесь греческим индексам соответствуют поверхностные координаты  $y^1 = y$ ,  $y^2 = x_3$ ,  $a^{\alpha\beta}$  – контравариантные компоненты метрического тензора волны  $\Sigma_1(t)$ . Формулы (3.40) имеют место и на  $\Sigma_2(t)$  с заменой текущих обозначений на принятые на второй волне. Записывая уравнения (3.35) в разрывах и проектируя на векторы  $\nu_i$  и  $\mu_i$ , с учетом формул (3.36), (3.40) получим

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \kappa}{\delta t} &= \left( -2\alpha_1 \chi \frac{\kappa}{C_1} + 2H_1 C_1 (\kappa + \dots) \right) \left( 2 - (2 + 7\alpha_1) \frac{\kappa}{C_1} + \dots \right)^{-1} \\
\chi_i x_{i,y} &\left( 1 + B_1 \frac{\kappa}{C_1} + \dots \right) = \kappa_{,y} \left( -1 + B_2 \frac{\kappa}{C_1} + \dots \right)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\kappa = \kappa_i \nu_i, \quad \chi = \chi_i \nu_i, \quad \kappa_i = \kappa \nu_i, \quad \kappa_i \mu_i = 0, \quad B_1 = (-\lambda - 3n/2) (\lambda + \mu)^{-1}$$

$$B_2 = (7\lambda + 4\mu/2 - l - 3m + 3n) (\lambda + \mu)^{-1} - 3(l + m + n) (\lambda + 2\mu)^{-1}$$

где  $H_1$  – средняя кривизна  $\Sigma_1(t)$ . Таким образом, каждый шаг лучевого метода приводит к дифференциальному уравнению для определения основной величины разрыва и алгебраическому уравнению относительно разрывов более высокого порядка. Из системы (3.41) невозможно непосредственно определить  $\kappa$ , т. к. уравнение для этой величины теряет рекуррентный характер (оно содержит неизвестную функцию  $\chi$ ) Такая особенность связана математически с характером возникновения и движения ударной волны: функция  $\chi$  входит в это уравнение как следствие зависимости характеристических направлений за фронтом  $\Sigma_1(t)$  от строящегося решения. Поэтому нельзя отбрасывать слагаемые, содержащие  $\chi$ , только на основе их малости. К системе (3.41) применим подход, основанный на представлении исходных функций рядами вида

$$\kappa = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta^i \kappa_0 t^i}{\delta t^i i!}, \quad \chi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta^i \chi_0 t^i}{\delta t^i i!} \tag{3.42}$$

$$\frac{\delta^i \kappa_0}{\delta t^i} = \left. \frac{\delta^i \kappa}{\delta t^i} \right|_{t=0}, \quad \frac{\delta^i \chi_0}{\delta t^i} = \left. \frac{\delta^i \chi}{\delta t^i} \right|_{t=0}$$

Подставляя ряды (3.42) в систему (3.41) и последующие уравнения лучевой схемы, получаем бесконечную алгебраическую цепочку, связывающую между собой коэффициенты рядов (3.42). Для точек, расположенных вблизи волнового фронта, достаточно будет принять, что  $\kappa \approx \kappa_0 + t\delta\kappa_0/\delta t$ ,  $\chi \approx \chi_0$ .

Геометрию лучевых координат в зависимости от времени можно определить, используя для геометрических объектов и скорости волны  $\Sigma_1(t)$  ряды, аналогичные (3.42). В пределах квадратичных по времени слагаемых из (3.36) получим

$$\begin{aligned} x_i(y, t) &\approx x_{i0} + G_{10}\nu_{i0}t + C_1 P_i t^2/2 + \dots, \quad G_{10} = C_1(1 + F_0), \quad F_0 = -\alpha_1 \frac{\kappa_0}{C_1} \\ P_i &= F\nu_{i0} + \alpha_1(1 + F_0)\kappa_{0,y}(a_{yy}^0)^{-1/2}\mu_{i0}, \quad F = -\frac{\alpha_1}{C_1} \frac{\delta\kappa_0}{\delta t} \\ G &\approx G_{10} + C_1 F t, \quad \nu_i \approx \nu_{i0} + t\delta\nu_{i0}/\delta t, \quad \delta\nu_i/\delta t = -a^{\alpha\beta} G_{1,\alpha} x_{i,\beta} \end{aligned} \quad (3.43)$$

В (3.43) и далее индекс «0» у геометрических объектов относится к начальной поверхности  $\Phi_0$ .

Из уравнения Эйконала на волне  $\Sigma_1(t)$  следует

$$t = T_1(y, s) = \frac{s}{G_{10}} - \frac{F}{G_{10}^2} \frac{s^2}{2} + \dots \quad (3.44)$$

Подставляя формулу (3.44) в уравнение (3.43), приходим к зависимости декартовых координат от лучевой сетки  $y, s$

$$x_i(y, s) \approx x_{i0}(y) + s\nu_{i0} + \Phi_i s^2/2 + \dots \quad (3.45)$$

$$\Phi_i = -FF_0 C_1^{-1} (1 + F_0)^{-2} \nu_{i0} + \alpha_1 \kappa_{0,y} C_1^{-1} (1 + F_0)^{-1} (a_{yy}^0)^{-1/2} \mu_{i0}$$

В полученных соотношениях величины  $\kappa_0$  и  $\chi_0$  остаются основными неизвестными. Их невозможно определить, пока не построено решение за волной  $\Sigma_2(t)$ . Именно по этому полю, определяемому суммарным эффектом прохождения обеих волн, необходимо проводить сопоставление полученных рядов с

краевым условием (3.34). Также отметим, что в формулах (3.45) фиксирование координаты  $s$  не определяет положение волнового фронта, так как в нелинейной задаче вдоль различных лучей одинаковое расстояние будет пройдено за различное время. Поэтому для нелинейной задачи координаты  $y, s$  не будут ортогональными, за исключением начальной поверхности  $\Phi_0$ , где  $s = 0$ .

Теперь рассмотрим применение лучевого метода на квазипоперечной волне  $\Sigma_2(t)$ . Разрывы производных перемещений обозначим  $\omega_i = [\dot{u}_i]_{\Sigma_2}$ ,  $\psi_i = [\ddot{u}_i]_{\Sigma_2}$ . Далее, как и раньше, записываем систему уравнений (3.34) в разрывах с проекцией на направления векторов  $n_i$  и  $m_i$ , учитывая условия (3.37), (3.40). С целью сокращения приводимых здесь математических вычислений, поскольку эти уравнения необходимы прежде всего как алгебраические соотношения в момент  $t = 0$ , приведем их только для начального момента времени. Содержащиеся в этих уравнениях функции предварительных деформаций необходимо представить соотношениями

$$u_{i,j}^+|_{\Sigma_{20}} = -[u_{i,j}]_{\Sigma_{10}}, \quad \dot{u}_i^+|_{\Sigma_{20}} = -[\dot{u}_i]_{\Sigma_{10}}, \dots$$

$$\Sigma_{10} = \Sigma_{20} = \Phi_0,$$

которые обусловлены непрерывностью предварительных деформаций в окрестности нуля и особым положением поверхности  $\Phi_0$ , на которой в момент  $t = 0$  одновременно присутствуют величины  $\kappa_{i0}$ ,  $\chi_{i0}$ ,  $\omega_{i0}$ ,  $\psi_{i0}$ ,  $u_{i,j}^+$  и т.д. В начальный момент времени для  $\Sigma_2(t)$  получим

$$\left( \frac{\delta\omega_0}{\delta t} - \frac{\omega_0}{G_{20}} \frac{\delta G_{20}}{\delta t} \right) L_1 + \psi_0 L_2 + \omega_0 L_3 + \dots = 0$$

$$\psi_i \nu_i L_4 = \omega_{0,z} C_2 \left( \sqrt{a_{zz}^0} \right)^{-1} L_5 + \omega_0 L_6 + \dots$$

$$L_1 = \frac{1}{G_{20}} \left( 1 + \frac{\kappa_0}{C_1} \left( 2\beta_1 - 3 - \frac{C_1}{C_2} \right) \right),$$

$$L_2 = \frac{1}{G_{20}} \left( \frac{C_2^2 - G_{20}^2}{2C_2^2} + \frac{\kappa_0}{C_1} \left( \beta_1 - \frac{C_1}{C_2} \right) \right)$$

$$L_3 = H_0 \left( -1 + \frac{\kappa_0}{C_1} \left( -4\beta_1 + 4 + 2\frac{C_1}{C_2} \right) \right) - \left( \frac{\omega_0}{G_{20}} \right)_{,z} \frac{1 - \beta_1}{\sqrt{a_{zz}^0}} + \frac{1}{2G_{20}^2} \frac{\delta G_{20}}{\delta t} +$$

$$+\frac{\chi_0}{2C_2^2} \left( 1 - (2\beta_1 - 1) \left( \frac{C_2}{G_{10}} \right)^2 \right) + \frac{(2\beta_1 - 1) \delta\kappa_0}{G_{10}^2 \delta t} - \frac{(2\beta_1 - 1) \psi_{i0} \nu_{i0}}{2 G_{20}^2} \quad (3.46)$$

$$L_4 = (\lambda + \mu) \mu^{-1} - 2E_0 + \theta_1 \kappa_0 C_1^{-1}, \quad L_5 = (\lambda + \mu) \mu^{-1} (1 + E_0) + \theta_2 \kappa_0 C_1^{-1}$$

$$L_6 = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{C_2 E_{0,z}}{\sqrt{a_{zz}^0}} + \theta_3 H_0 \omega_0 + \theta_4 \chi_{i0} \mu_{i0} \frac{C_2}{C_1^2} + \frac{\theta_5 \psi_0}{C_2} + \theta_6 \frac{C_2}{C_1} \kappa_{0,z}$$

$$G_{20} = C_2 (1 + E_0) + \dots, \quad E_0 = \kappa_0 (\beta_1 G_{10}^{-1} - C_2^{-1}), \quad \omega_0 = \omega_{i0} \mu_{i0}, \quad \psi_0 = \psi_{i0} \mu_{i0}$$

В уравнениях (3.46)  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) – константы, определяемые упругими модулями задачи,  $H_0$  – средняя кривизна поверхности  $\Phi_0$ . Из системы (3.46) следует, что на динамику  $\omega$  – основной компоненты разрывов на волне  $\Sigma_2(t)$ , – с момента  $t = 0$  оказывают сложное комбинированное воздействие как функции, задаваемые на  $\Sigma_2(t)$ , так и поле предварительных деформаций. В уравнения (3.46) входит величина  $\delta G_{20}/\delta t$ , которая также необходима при определении лучевых координат. Для нее имеем

$$\begin{aligned} G_2 &\approx G_{20} + t \delta G_{20}/\delta t + \dots = C_2 (1 + E_0 + Et) + \dots \\ E &= \frac{\delta}{\delta t} (\beta_1 u_{n,n}^+ + \beta_2 u_{m,m}^+ + C_2^{-1} \dot{u}_n^+) \Big|_{t=0} = \beta_1 \left( \frac{G_{10} - G_{20}}{G_{10}^2} \chi_0 + \right. \\ &+ \left. \frac{2G_{20} - G_{10}}{G_{10}^2} \frac{\delta\kappa_0}{\delta t} + \alpha_1 \frac{G_{20} \kappa_0}{G_{10}^3} \frac{\delta\kappa_0}{\delta t} \right) + 2\beta_2 H_0 \kappa_0 \frac{G_{10} - G_{20}}{G_{10}} + \\ &+ C_2^{-1} (-\chi_0 + G_{20} G_{10}^{-1} \kappa_0) \end{aligned} \quad (3.47)$$

На этом шаге решения появляются еще две основные неизвестные функции –  $\omega_0$  и  $\chi_0$ .

Геометрия лучевых координат  $l, z$  за фронтом  $\Sigma_2(t)$  определяется так же, как и для волны  $\Sigma_1(t)$ , поэтому приведем только итоговый результат:

$$\begin{aligned} t &= T_2(l, z) = l G_{20}^{-1} - E G_{20}^{-2} l^2 / 2 + \dots \\ x_i(l, z) &= x_{i0}(z) + l \nu_{i0} + M_i l^2 / 2 + \dots \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$M_i = -E_0 E C_2^{-1} (1 + E_0)^{-2} \nu_{i0} - E_{0,z} (1 + E_0)^{-1} (a_{zz}^0)^{-1/2} \mu_{i0}$$

Теперь за ударной волной  $\Sigma_2(t)$  поле перемещений определяется рядами

$$u_i(z, l, y, s, t) \approx -\kappa_i \Big|_{T_1} (t - T_1) - \frac{\chi_i}{2} \Big|_{T_2} (t - T_2)^2 - \quad (3.49)$$

$$- \omega_i|_{T_2} (t - T_2) - \frac{\psi_i}{2} \Big|_{T_2} (t - T_2)^2$$

в которых все слагаемые, обусловленные волной  $\Sigma_1(t)$ , являются функциями координат  $y, s$ . Это означает необходимость установления соответствия между системами координат  $y, s$  и  $z, l$ . Его можно получить, исключая из формул (3.45), (3.48) декартовы координаты  $x_i$ . При этом точное соответствие указать невозможно ввиду содержания в уравнениях неизвестных функций координат  $y$  и  $z$ . Для малых послееударных времен, считая  $\varepsilon = V_0 C_1^{-1} \ll 1$  и проводя оценку функций  $\Phi_i$  и  $M_i$  по порядку малости, представим  $y, s$  рядами

$$y \approx z + \varepsilon g_1(z, l) + \varepsilon^2 g_2(z, l) + \dots, \quad s \approx l + \varepsilon f_1(z, l) + \varepsilon^2 f_2(z, l) + \dots \quad (3.50)$$

Подставляя ряды (3.50) в формулы (3.45), (3.48), в приближении до первого порядка по  $\varepsilon$  включительно получим

$$f_1 = 0, \quad g_1(z, l) = \frac{l^2}{a_{zz}^0 (1 - 2H_0 l)} \frac{\kappa_{0,z}}{V_0} \left( \frac{\alpha_1}{1 + F_0} + \frac{\tilde{\alpha}}{1 + E_0} \right) \quad (3.51)$$

$$\tilde{\alpha} = -1 + (-\lambda + l + 3n/2) (2\mu)^{-1} - C_1 C_2^{-1}$$

откуда следует, что на малых расстояниях от нагружаемой границы отклонение одной координатной сетки от другой больше сказывается на координате эйконала. С учетом формул (3.50), (3.51) решение (3.49) будет зависеть только от  $z, l$ .

Для выполнения краевого условия необходимо решить еще одну дополнительную геометрическую задачу о пересечении выбранного луча ( $z = const$ ) с подвижной границей  $L(t)$  для произвольного малого времени. Для точки пересечения, с одной стороны, есть уравнение (3.48), с другой, также имеем

$$x_1(\sigma, t) = x_{10}(\sigma) + V_0 t + At^2/2, \quad x_2(\sigma, t) = x_{20}(\sigma) \quad (3.52)$$

где  $\sigma$  – также параметр вдоль линии  $L_0$ , для которого принято обозначение, отличное от  $y, z$ , чтобы исключить жесткую связь движения границы  $L(t)$  с полями координат  $y, s$  и  $z, l$ . Считая  $t \ll 1$  и  $\sigma = \sigma(z, t)$ ,  $l = l(z, t)$ , представим неизвестные функции  $\sigma$  и  $l$  рядами по степеням  $t$

$$\sigma(z, t) \approx \sigma_0(z, 0) + \sigma_1(z, 0)t + \sigma_2(z, 0)t^2/2 + \dots, \quad (3.53)$$

$$l(z, t) \approx l_0(z, 0) + l_1(z, 0)t + l_2(z, 0)t^2/2 + \dots,$$

Такое представление удобно, поскольку краевое условие (3.34) – также степенная функция времени. Подстановка рядов (3.53) в формулы (3.48) и (3.52) дает следующие соотношения:

$$\sigma(z, t) \approx z - \frac{\nu_{20}V_0}{\sqrt{\alpha_{zz}^0}}t + \left( -\frac{V_0^2\nu_{10}^2 E_{0,z}}{a_{zz}^2(1+E_0)} + \frac{\nu_{20}A}{\sqrt{\alpha_{zz}^2}} \right) \frac{t^2}{2} + \dots \quad (3.54)$$

$$l(z, t) \approx V_0\nu_{10}(z)t + \left( V_0^2 \frac{E_0 E \nu_{10}^2}{C_2(1+E_0)^2} + 2V_0^2 H_0 \nu_{20}^2 + \nu_{10}A \right) \frac{t^2}{2} + \dots$$

Сходным образом при необходимости можно получить и зависимость  $l(\sigma, t)$ ,  $z(\sigma, t)$ . Выполнение краевых условий сводится к решению системы:

$$\begin{aligned} u_1|_{l=l(z,t)} &= V_0t + \frac{At^2}{2}, & u_2|_{l=l(z,t)} &= 0, \\ \sigma &= \sigma(z,t) & \sigma &= \sigma(z,t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

в которой  $u_1$  и  $u_2$  определяются формулами (3.49). Выполнение формул (3.55) за счет приравнивания по-отдельности коэффициентов при различных степенях  $t$  замыкает задачу четырьмя условиями относительно четырех основных неизвестных функций  $\kappa_0$ ,  $\chi_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\psi_0$ . Отбрасывая дополнительные слагаемые более высокого порядка малости, для начального момента времени можно приближенно считать

$$\begin{aligned} \chi_{10} &\approx V_0 (a_{zz}^0)^{-1/2} (-C_2\nu_{20,z}\nu_{10} - C_1\nu_{10,z}\nu_{20}) - a\nu_{10}^2, \\ \chi_{20} &\approx V_0 (a_{zz}^0)^{-1/2} (-C_1\nu_{10,z}\nu_{10} - C_2\nu_{20,z}\nu_{20}) - a\nu_{10}\nu_{20} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\kappa_0 \approx -v_0\nu_{10}, \quad \omega_0 \approx v_0\nu_{20}, \quad \psi_{10} \approx -\chi_{10} - a, \quad \psi_{20} \approx -\chi_{20}$$

Построенное решение, безусловно, относится к очень малым послеударным временам. Хотя уже оно показывает существенные отличия нелинейного волнового процесса от линеаризованной задачи. Интерес к построению подобных решений не ограничивается только теоретическими исследованиями. Действительно, для расстояний, на которые ударные волны  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  сильно

отстоят друг от друга, уравнения лучевого метода (3.41), (3.48) сохраняют свое значение, с той разницей, что в уравнение (3.48) необходимо включить предварительные деформации для произвольного момента времени. Это оказывается наиболее эффективным при переходе к рекуррентному варианту метода с разбиением задачи шагами по времени. В этом случае выполнение краевых условий напрямую за счет лучевых рядов невозможно. Их влияние можно учесть, применяя конечно-разностные схемы счета задачи в областях, удаленных от волновых фронтов, и включая в такие схемы формулы лучевого метода для описания прифронтной области. Данная методика позволяет четко выделить положение ударной волны на каждом шаге по времени. Далее рассмотрим разработанный на ее основе вариант численной схемы выделением поверхностей разрывов.

### 3.2.3 Конструирование численной схемы расчетов

Будем полагать построенные аналитические решения справедливыми в некоторой окрестности соответствующих волновых фронтов. Положения волновых фронтов зададим посредством кубических сплайнов. Такой способ позволяет вычислять все необходимые геометрические характеристики поверхностей разрывов на каждом шаге вычислений. Таким же образом будем хранить значения функций  $\kappa$ ,  $\chi$ ,  $\omega$ ,  $\psi$ .

Потребуем, чтобы образующая цилиндрической поверхности  $L$  была симметрична относительно некоторой прямой. Введем декартову прямоугольную систему координат таким образом, чтобы эта прямая совпала с осью  $Oy$ , причем ось была направлена внутрь среды. За начало координат системы примем точку пересечения  $L$  и  $Oy$ . В качестве параметра вдоль  $L$  выберем  $x$ . В силу симметрии, далее ограничимся рассмотрением части  $L$ , соответствующей положительной полуоси  $Ox$ .

В начальный момент времени зададим границу  $L$  путем сращивания гладкого криволинейного участка в окрестности начала координат и полупрямой,



в которую криволинейный участок переходит в некоторой точке  $P_0$ . Криволинейный участок (далее – отрезок  $OP_0$ ) зададим в виде  $y = f(x)$  и подберем таким образом, чтобы в точке  $P_0$  его направление совпадало с направлением полупрямой, а производные по параметру  $x$  до третьего порядка включительно обращались в ноль. Это необходимо для того, чтобы избежать разрывов в точке сращивания используемых в процессе решения геометрических характеристик границы.

Поставленным условиям, в частности, удовлетворяет кривая вида

$$y(x) = \frac{k x^6}{16 b^5} - \frac{5 k x^4}{16 b^3} + \frac{15 k x^2}{16 b} \quad (3.57)$$

Здесь  $b$  – абсцисса точки сращивания  $P_0$ ,  $k$  – коэффициент наклона прямой.

Пусть под действием ударной нагрузки граница среды в некоторый момент времени  $t_0$  начала двигаться вдоль оси  $Oy$  по известному закону. При этом в начальный момент движения от границы  $L$  отделяются две ударные волны  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Непосредственно в момент  $t_0$  обе эти волны совпадают с  $L$ , и, соответственно, могут рассматриваться как результат сращивания криволинейного и прямолинейного участков. В процессе распространения ударных волн в среде геометрия криволинейных участков фронтов изменяется. Соответственно изменяется и положение точек сращивания.

В области, примыкающей к участку границы  $OP_0$ , имеем плоскую задачу с сеткой расходящихся лучей. В то же время для области, примыкающей к прямолинейному участку границы, решение значительно упрощается и в итоге сводится к известной задаче о косом ударе по плоской границе сжимаемого полупространства с двумя плоскими ударными волнами. Таким образом, с одной стороны, решение одномерной задачи можно использовать в качестве граничного условия для плоской задачи на открытой границе. С другой стороны, необходимо отслеживать смещение точек сращивания на поверхностях разрыва, по мере необходимости включая новые узлы в расчетную область плоской задачи.

В силу того, что в задачах о распространении возмущений передача информации в среде осуществляется с конечной скоростью, и притом каждую точку среды можно рассматривать, как источник возмущения, будем смещать точки сращивания со скоростью  $G_1$  в направлении открытой границы.

В качестве инструмента для нахождения численного решения задачи в областях деформирования используется, как и ранее, конечно-разностный метод. Однако, в данном случае решение в узлах сетки строится в виде набора частных производных функций перемещения. Также используются построенные лучевым методом приближенные аналитические решения в окрестностях фронтов ударных волн, условие симметричности на границе  $x = 0$  и решение одномерной задачи для замыкания системы со стороны открытой границы. Параметры волновых фронтов на каждом временном шаге схемы пересчитываются путем анализа решений в узлах разностной сетки, расположенных достаточно близко к поверхностям разрывов, где удастся построить разностные аналоги уравнений движения.

Полученная таким образом система алгебраических уравнений решается на каждом шаге схемы итерационным методом. В результате удастся определить как набор частных производных перемещений на очередном временном слое, так и значения интенсивностей разрывов на ударных волнах, необходимые для определения их скоростей и положений в следующий момент времени. Решение в перемещениях также может быть получено путем численного интегрирования полей частных производных.

# Заключение

В первой главе

1. Рассмотрены основные соотношения динамической теории упругости.
2. Выписаны геометрические, кинематические и динамические условия совместности разрывов.
3. Выписаны соотношения, определяющие возможные типы и скорости ударных волн в нелинейной упругой среде. Указаны условия существования и скорости квазипродольной, квазипоперечной и нейтральной ударных волн в сжимаемой упругой среде, волн нагрузки и поворота в несжимаемой упругой среде.
4. Приведено описание лучевого метода и его модификации для динамических задач нелинейной теории упругости.

Во второй главе

1. Решена задача об ударном нагружении упругого несжимаемого полупространства, не имеющего предварительных деформаций.
2. Решена задача об ударном нагружении несжимаемого предварительно деформированного массива.
3. Указан способ конструирования численно-аналитических схем решения указанных задач с выделением разрывов, основанный на использовании лучевых разложений решений, построенных в окрестностях волновых фронтов. Приведены результаты расчетов.
4. Построены приближенные аналитические решения задач о нормальном и косом ударе по плоской границе сжимаемого нелинейно упругого полупространства, задач с осевой симметрией об антиплоском и скручивающем нагружении несжимаемой упругой среды, заданном на границе цилиндрической полости.
5. Методика конструирования численно-аналитического решения обобщен-

на на случай рассматриваемых задач. Приведены результаты расчетов.

В третьей главе

1. Построено аналитическое решение задачи об антиплоском нагружении несжимаемой нелинейно-упругой среды лучевым методом и модификация численно-аналитической схемы решения на случай плоской задачи.

2. Построено аналитическое решение плоской задачи об ударном нагружении нелинейно-упругой среды, осложненное наличием двух поверхностей разрывов.

3. Способ конструирования численно-аналитических схем решения задач нелинейной динамики с выделением поверхностей разрывов обобщен на случай плоских задач.

## Список литературы

- [1] Агапов И.Е., Белогорцев А.М., Буренин А.А., Резунов А.В. Автомодельная задача об одномерном соударении двух полупространств из нелинейно упругого материала // Прикл. механика и техн. физика - 1989. - № 6. - С. 146-150.
- [2] Агапов И.Е., Буренин А.А., Резунов А.В. О соударении двух нелинейно упругих тел с плоскими границами // В кн. Прикладные задачи механики деформ. сред. - Владивосток. ДВО АН СССР. - 1990. - С. 206-215.
- [3] Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я. Лучевой метод вычисления интенсивностей волновых фронтов // В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Ленинград. Изд-во ЛГУ. 1961. Вып.5. С. 3-24.
- [4] Алексеев А.С., Гельчинский Б.Я. О лучевом методе вычисления полей волн в случае неоднородных сред с криволинейными границами раздела // В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1959. Вып.3. С. 16-47.
- [5] Афанасьев С.Б., Баженов В.Г. О численном решении одномерных нестационарных задач упругопластического деформирования сплошных сред методом Годунова. // Прикладные проблемы прочности и пластичности. - Горький: Горьковский гос. ун-т. - 1985. - Вып. 31. - С. 59-65.
- [6] Афанасьев С.Б., Баженов В.Г., Кочетков А.В. и др. Пакет прикладных программ "Динамика-1". // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Горьковский гос. ун-т. - 1986. - Вып. 33. - С. 21-29.
- [7] Бабич В.М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в упругой неоднородной анизотропной среде // В кн.: Вопросы дина-

мической теории распространения сейсмических волн. Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1961. Вып.5. С. 36-46.

- [8] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. // М.: Наука. - 1972. - 456с.
- [9] Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод. Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1985. 271с.
- [10] Бабич В.М., Заварзина Н.А. Звуковые волны и волны ускорений в гипопругой среде // Тр. НИИ матем. Воронеж: Изд-во ВГУ. Вып.16. С. 8-18.
- [11] Бабичева Л.А., Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах // ПММ. 1973. Т.37. № 1. - С. 145-155.
- [12] Багдоедов А.Г., Мовсесян Л.А. К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости // Изв. АН Арм. ССР - 1968. - 21, № 3. - С. 19-24.
- [13] Бестужева Н.П., Быковцев Г.И., Дурова В.Н. Волны сильного разрыва на поверхности пластически деформирующегося твердого тела // Механика деформ. тв. тела. Куйбышевский гос. ун-т. 1977. Вып.3. С. 65-69.
- [14] Бестужева Н.П., Быковцев Г.И., Дурова В.Н. К исследованию нестационарных поверхностных волн в нелинейно-упругих средах // Прикладная механика. - 1981. - Т.17, № 12. - С. 27-33.
- [15] Бестужева Н.П., Дурова В.Н. Волны разрывов при конечных деформациях упругих материалов // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. - 1983. - № 2. - С. 102-108.
- [16] Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости. - М.: Мир. - 1972. - 183с.

- [17] Богульский И.О. Монотонная схема второго порядка решения задач динамики упругих тел. // М. - 1986. - Деп. в МИНИТИ. - 1986. - № 64.
- [18] Богульский И.О. Об одном семействе явных монотонных схем решения задач динамики упругих тел. - Красноярск: ВЦ СО АН СССР. - 1986. - С. 42-54.
- [19] Богульский И.О. Повышение точности решения плоских динамических задач упругости в рамках аппроксимации линейными полиномами. // М. - 1986. - Деп. в ВИНТИ. - 1986 - № 65.
- [20] Богульский И.О. Построение монотонной схемы решения задач для гиперболических уравнений. // Красноярск, Препринт ВЧ СО АН СССР - 1982. - № 26.
- [21] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. // М.: Физматгиз. - 1961.
- [22] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз. 1961.
- [23] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ "АСТРА". // М. Препринт/ АН СССР. Институт проблем механики - 1988. - № 326.
- [24] Буренин А.А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный мат. журнал. 1999. Вып.8. С. 49-72.
- [25] Буренин А.А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикл. механика. - 1985. - Т.21, № 5. - С. 3-8.
- [26] Буренин А.А., Дудко О.В., Манцыбора А.А. О распространении обратимых деформаций по среде с накопленными необратимыми деформациями. // ПМТФ. - 2002. - Т.43. № 5. - С. 162-170.

- [27] Буренин А.А., Зиновьев П.В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского. - Москва: "Физматлит 2003. - С. 146-155.
- [28] Буренин А.А., Зиновьев П.В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А.Ю.Ишлинского. Москва: "Физматлит". 2003. С. 146-155.
- [29] Буренин А.А., Зиновьев П.В., Лебедева Н.Ф. Использование лучевой прифронтальной асимптотики в конструировании разностных схем расчетов динамики упругой среды // Международная школа-семинар "Современные проблемы механики и прикладной математики". - Воронеж: ВГУ. - 2003. - С. 38-46.
- [30] Буренин А.А., Зиновьев П.В., Рагозина В.Е. Выделение поверхностей разрывов лучевым методом в задачах динамики упругих сред // Сборник докладов международной научной конференции "Фундаментальные и прикладные вопросы механики". - Хабаровск: Изд-во ХГТУ - 2003. С. 64-66.
- [31] Буренин А.А., Зиновьев П.В., Рагозина В.Е. Об одной возможности алгоритмического выделения поверхностей разрывов в расчетах ударного деформирования // Всероссийская школа-семинар по современным проблемам механики деформируемого твердого тела. Сборник докладов. - Новосибирск: Изд-во НГТУ. - 2003. - С. 33-36.
- [32] Буренин А.А., Зиновьев П.В., Рагозина В.Е. Об одной возможности выделения поверхностей разрывов скоростей в численных расчетах ударного деформирования // Забабахинские научные чтения. Международ-



ная конференция. Тезисы - г. Снежинск, Челябинская область. Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ. - 8-12 сентября 2003. - С. 237.

- [33] Буренин А.А., Лапыгин В.В. Автомодельная задача об ударном нагружении упругого полупространства // Прикл. матем. и механика. - 1979. - Т.43. Вып.4. - С. 722-729.
- [34] Буренин А.А., Лапыгин В.В. Об отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от плоской жесткой границы нелинейной упругой среды. - Прикл. матем. и техн. физика. - 1985. - Вып. 4. № 5. - С. 125-129.
- [35] Буренин А.А., Лапыгин В.В., Чернышов А.Д. К решению плоских автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости. // В кн.: Нелинейные волны деформации. Матер. между. симп. - Таллин. - 1978. - Т.2. - С. 25-28.
- [36] Буренин А.А., Нгуен Хыу Тхань, Чернышов А.Д. О распространении ударных волн при плоской конечной деформации. // ПММ. - 1973. - Т.37. Вып.5. - С. 900-904.
- [37] Буренин А.А., Россихин Ю.А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов // В сб.: Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР. 1991. С. 129-137.
- [38] Буренин А.А., Чернышов А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве. // ПММ. 1978. Т.42. Вып.4. С. 711-717.
- [39] Буренин А.А., Шаруда В.А. Косой удар по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 172-177.
- [40] Буренин А.А., Шаруда В.А. Метод сращиваемых асимптотических разложений в задаче о сдвиговом ударе по нелинейному упругому полупро-

странству // Прикладные задачи механики сплошных сред. Воронеж: Изд-во ВГУ. 1988. С. 40-44.

- [41] Буренин А.А., Шаруда В.А. Одномерный переходный волновой процесс деформации при ударном нагружении упругого полупространства. // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. - 1984. - № 1. - С. 40-44.
- [42] Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д. О распространении волн в упруговязко-пластической среде // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. № 4. С. 111-123.
- [43] Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д., Зиновьев Н.М., Привалов С. А. О ступенчатом движении со сверхзвуковой скоростью по упруговязкопластическому полупространству // Тр. НИИ матем. Воронеж: Изд-во ВГУ. 1970. Вып.6. С. 59-70.
- [44] Быковцев Г.И., Власова И.А. Особые линии и поверхности в пространственных течениях идеальных жестко-пластических среж // Мех. деформ. тв. т. (динамика сплошной среды). Новосибирск. 1979. Вып.41. С. 31-43.
- [45] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: "Дальнаука". 1998. 528с.
- [46] Быковцев Г.И., Калужин А.А., Кретьова Л.Д. О распространении волн в трехмерных упругопластических телах при условии полной пластичности // Инж. журнал МГТ. 1967. № 3. С. 13-20.
- [47] Быковцев Г.И., Шаталов А.Г. Импульсное нагревание полупространства с учетом термоупругого сопряжения и конечной скорости распространения тепла // Изв. АН СССР. МГТ. 1987. № 2. С. 101-107.
- [48] Вервейко Н.Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара. Воронеж: Воронежский госуниверситет. 1997. 204с.

- [49] Вервейко Н.Д. Упругие волны в тонких оболочках // Тр. Науч.-исслед. ин-т математики ВГУ. Воронеж: изд-во ВГУ. 1975. Вып.21. С. 23-26.
- [50] Весоловский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости. // Киев: Наукова думка. - 1981. - 216 с.
- [51] Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Алгоритм расщепления плоской задачи динамики упругого деформирования с учетом хрупкого разрушения. // Динамика сплошной среды: Сб. научн. тр. / Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. - Новосибирск. - 1983. - Вып.61. - С. 36-48.
- [52] Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования в задачах динамики. // Динамика сплошной среды: Сб. научн. тр. / Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. - Новосибирск. - 1984. - Вып.66. - С. 60-68.
- [53] Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Численное решение задач динамического упругопластического деформирования на основе аппроксимации линейными полиномами. // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VII Всесоюзной конференции. - Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. - 1982. - С. 233-247.
- [54] Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневосточный мат. сборник. 2004. Т.5. № 1. С. 100-109.
- [55] Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 6/1(46). С. 94-113.
- [56] Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. // М.: Наука. - 1969. - 336 с.

- [57] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. // М.: Мир. - 1985. - 456с.
- [58] Гринфельд М.А. Лучевой метод вычисления интенсивностей волновых фронтов в нелинейно-упругом материале. // ПММ. - 1978. - Т.42. Вып.5. - С. 883-898.
- [59] Гринфельд М.А. Распространение слабых и ударных волн в нелинейно-упругой среде // В кн. Нелинейные волны деформации. Матер. межд. симп. Таллин - 1978. - Т.2. - С. 54-57.
- [60] Гузь А.Н. О линеаризованной теории распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями // Прикл. механика. - 1978. Т.14, № 4. С. 1-32.
- [61] Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. // Киев. Наукова думка. - 1973. - 273с.
- [62] Дудко О.В. Автомодельная задача об одномерном ударном нагружении упругого массива с предварительными деформациями и микронарушениями. // В сб. Проблемы естествознания и производства. - Владивосток: Изд-во ДВГТУ - 1996. Вып.117. Сер.5 - С. 17-20.
- [63] Дудко О.В., Потянихин Д.А. Автомодельная задача нелинейной динамической теории упругости о взаимодействии продольной ударной волны с жесткой преградой // ВМСС. 2008. Т.1, № 2. С. 27-37.
- [64] Заварзина Н.А. Лучевой метод решения динамических задач в гипоупругой среде // Тр. НИИ матем. Воронеж: Изд-во ВГУ. 1972. Вып.6. С. 50-59.
- [65] Заварзина Н.А., Филатов Г.Ф. Об ударных волнах в деформированной упругой среде. // В кн. Нелинейные волны деформации. Матер. мжд. симп. Таллин. - 1978. - Т.2. - С. 70-73.

- [66] Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. // М.: Наука. - 1966. - 519с.
- [67] Зиновьев П.В. Использование численных методов для выделения поверхностей разрывов в задачах динамики деформируемых сред // Международная школа-семинар им. акад. Золотова Е.В. Тезисы докладов. (Владивосток, 31 августа - 6 сентября) - Владивосток: "Дальнаука". - 2003. - С. 113-114.
- [68] Зиновьев П.В. Построение численных решений в динамических задачах ударного деформирования // Материалы региональной научной конференции аспирантов и молодых ученых стран АТР "Молодежь и научно-технический прогресс". Владивосток: Изд-во ДВГТУ. - 2002. - С. 83.
- [69] Зиновьев П.В., Лебедева Н.Ф. Использование прифронтных разложений в конечно-разностной аппроксимации уравнений деформируемых сред // Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова: Тезисы докладов. - Владивосток: Дальнаука. - 2001. - С. 75-76.
- [70] Зиновьев П.В., Лебедева Н.Ф. Исследование прифронтных разложений в конструировании разностных схем расчетов деформирования // Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. - Екатеринбург, УрО РАН. - 2001. - С. 277-278.
- [71] Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О. и др. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. // Новосибирск: Изд-во Сиб. унив. - 2002. - 352с.
- [72] Иванова Ю.Е., Рагозина В.Е. Метод возмущений в краевых задачах ударного деформирования несжимаемых упругих сред // Дальневосточный математический журнал. Владивосток: "Дальнаука". 2003. Т.4. № 1. С. 71-77.

- [73] Иванова Ю.Е., Рагозина В.Е. Об ударных осесимметричных движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях // ПМТФ. Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения РАН. 2006. Т.47. № 6. С. 144-151.
- [74] Иванова Ю.Э. Эволюционные уравнения в описании ударных движений несжимаемой упругой среды // Вестник ДВО РАН. Владивосток: "Дальнаука". № 4. 2006. С. 118-122.
- [75] Ивлев Д.Д. К построению теории упругости. // Докл. АН СССР. - 1961. Т.138. № 6. - С. 1321-1324.
- [76] Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющего пластического тела. // М.: Наука. - 1971. - 231с.
- [77] Ильюшин А.А, Механика сплошной среды. Изд. 2-ое испр. и дополн. // М.: Изд-во МГУ. - 1978. - 287с.
- [78] Карп Д.Б. О сферической ударной волне постоянной интенсивности в изотропном упругом пространстве. // В сб. Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток. - 1991. - С. 230-243.
- [79] Каудерер Г. Нелинейная механика. - М.: Гос. изд-во иностр. лит. - 1961. - 777с.
- [80] Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластической среды с конечными деформациями. // Численные методы в механике твердого деформируемого тела. - М.: ВЦ АН СССР. - 1978. - С. 85-121.
- [81] Кондауров В.И., Петров И.Б. Расчет процессов динамического деформирования упругопластических тел с учетом континуального разрушения. // Докл. АН СССР. - 1985. - Т.285. - № 6. - С. 1344-1347.

- [82] Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду. // ПМТФ Динамика сплошной среды. - 1984. - № 4. - С. 132-139.
- [83] Коробейников С. Н. Многоцелевая вычислительная программа по решению задач линейной теории упругости. // Динамика сплошной среды: Сб. научн. трудов / Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск. - 1986. - Вып.75. - С. 78-89.
- [84] Кукуджанов В.Н. Распространение упруговязкопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации // Вычисл. центр АН СССР. М.: ВЦ АН СССР. 1967. 48с.
- [85] Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численные решения неоднородных задач динамического твердого тела // Проблемы динамических упруговязкопластических сред. М.; 1975. С. 38-84.
- [86] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства. // ПММ. - 1985. - Т.49. Вып.2. - С. 284-291.
- [87] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде. // ПММ. - 1982. - Т.46. Вып.5. - С. 831-840.
- [88] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства. // В кн. Вопросы нелинейной механики сплошных сред, Таллин: Валгус. - 1985. С. 135-145.
- [89] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах. - ПММ. - 1982. - Т.44. Вып.3. - С. 523-534.

- [90] Ленский Э.В. Аналитические методы динамической теории нелинейной упругости. // М.: Изд-во МГУ. - 1983. 71с.
- [91] Ленский Э.В. Об ударной адиабате плоского продольно-сдвигового разрыва. // Вестник МГУ. Сер. матем. и механика. - 1981. - № 1. - С. 94-96.
- [92] Ленский Э.В. Простые волны в нелинейно-упругой среде. // Вестник МГУ. Сер. матем. и механика. - 1983 - № 3. - С. 80-86.
- [93] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. // М.: Наука. - 1980. - 512с.
- [94] Лурье М.В. Использование вариационного принципа для изучения распространения поверхностей разрыва в сплошной среде. // ПММ. - 1969. - Т.33. Вып.4. - С. 693-699.
- [95] Нигул У.К. Эхо-сигналы от упругих объектов. // Таллин. Валгус. - 1976. - Т.1. - 325с.
- [96] Нигул У.К., Энгельбрехт Ю.К. Возникновение ударных волн в упругом пространстве при одномерных нелинейных переходных волновых процессах, возбуждаемых непрерывным воздействием. // Изв. АН СССР. МТТ. - 1972. - № 5. - С. 69-82.
- [97] Нигул У.К., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. // Таллин: Изд-во АН ЭССР. - 1972. - 174с.
- [98] Новацкий В. Теория упругости. // М.: Мир. - 1975. - 872с.
- [99] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. // М.: Гостехиздат. - 1948. - 211с.
- [100] Новожилов В.В., Толоконников Л.А., Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости. // В кн. Механика в СССР за 50 лет. - М.: Наука. - 1972. Т.3. - С. 71-78.



- [101] Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. Киев.: Наук. Думка. 1988. 215с.
- [102] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. - М.: Гос. изд-во иностр. лит. - 1963. - 311с.
- [103] Рагозина В.Е. Об одном подходе в использовании метода возмущений для построения решения нелинейных динамических задач с ударными волнами. // В сб.: Проблемы естествознания и производства. - Владивосток: Изд-во ДВГТУ. - 1995. Вып. 115. - С. 17-20.
- [104] Рагозина В.Е., Воронин И.И., Вековшинин Е.Л. Об использовании прифронтальной асимптотики в численных решениях динамических задач теории упругости с ударными волнами. // В кн.: Проблемы естествознания и производства. - Владивосток: Изд-во ДВГТУ. - 1995. - Вып.115. - С. 25-27.
- [105] Римский В.К. Сравнительная характеристика численных методов решения контактных задач динамической теории упругости. // Математические методы в механике. - Кишинев. - 1980. - С. 98-100.
- [106] Россихин Ю.А. Волны в слабо анизотропных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 160-162.
- [107] Россихин Ю.А. Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязко-пластических телах. // Изв. АН СССР. МТТ. - 1977. - № 4. - С. 175-179.
- [108] Россихин Ю.А. О равномерной пригодности лучевых разложений в задачах, связанных с распространением ударных волн в слабо анизотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 131-138.
- [109] Россихин Ю.А. О распространении волн в упруго-вязкопластической среде // Прикладная механика Т.5. № 5. С. 82-88.

- [110] Россихин Ю.А. Распространение плоских волн в анизотропном термоупругом полупространстве // Прикладная механика. 1976. Т.12. № 4. С. 60-64.
- [111] Руденко О.В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. - М.: Наука. - 1975. - 288с.
- [112] Садовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. // М.: Наука. Физматлит. - 1997.
- [113] Свешникова Е.И. Квазипоперечные ударные волны в упругой среде при специальных видах начальной деформации. // ПММ. - 1983. - Т.47. Вып.4. - С. 673-678.
- [114] Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. // М.: Физматгиз. - 1962. - 284с.
- [115] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука. - 1977. - 440с.
- [116] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1,2. Изд-ие 2-ое испр. и дополн. // М.: Наука. - 1973. - Т.1. 536с. - Т.2.584с.
- [117] Тарасьев Г.С. Уравнения нелинейной теории упругости в перемещениях. // Прикл. механика. - 1971. - Т.7. № 2. - С. 26-33.
- [118] Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела. // М.: Высшая школа. - 1979. - 318 с.
- [119] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. // М.: Мир. - 1964. - 308с.
- [120] Треалор Л. Физика упругости каучука. // М.: Гос. изд. иностр. лит. - 1953. - 240с.

- [121] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. - М.: Мир. - 1975. - 592с.
- [122] Филатов Г.Ф. О распространении волн в нелинейной теории упругости. // Сб. научн. трудов фак-та ПММ. Воронеж: Изд-во ВГУ. - 1971. - Вып.2. - С. 137-142.
- [123] Филатов Г.Ф. О распространении продольных и поперечных ударных волн в упругой среде. - ПМТФ. - 1972. - Т.3. - С. 186-188.
- [124] Филатов Г.Ф. Об устойчивости сильных разрывов в нелинейной теории упругости. // Сб. научн. трудов фак-та ПММ. Воронеж: Изд-во ВГУ. - 1971. - Вып.1. - С. 62-64.
- [125] Хан Х. Теория упругости. // М.: Мир. - 1988. - 344с.
- [126] Черных Е.М. Автомодельная задача об ударном нагружении нелинейно-упругого материала. // ПММ. - 1967. - Т.31. Вып.5. - С. 793-799.
- [127] Черных Е.М. Обобщенная плоская деформация в нелинейной теории упругости. // Прикл. механика. 1977. Т.13, № 1. С. 3-30.
- [128] Черных Е.М. О распространении волн в упругой среде с конечными деформациями. // Изв. АН СССР. МТТ. - 1964 - № 4. - С. 74-79.
- [129] Черных Е.М. Термодинамические соотношения на поверхности сильного разрыва в упругой среде при конечных деформациях. // Докл. АН СССР. - Т.177. № 3. - С. 546-549.
- [130] Чернышов А.Д. О распространении ударных волн в упругом пространстве при конечных деформациях. // ПММ. - 1970. - Т.34. Вып.5. - С. 885-890.
- [131] Чигарев А.В. Распространение ударных волн в стохастически неоднородной упругой среде // Прикладная механика. 1972. № 8. С. 69-74.

- [132] Чугайнова А.П. Стационарные квазипоперечные простые и ударные волны в слабоанизотропной нелинейно-упругой среде. // ПММ. - 1991. Т.55. Вып.3. - С. 486-492.
- [133] Шаталов А.Г. Разрывные решения в связанной задаче термоупругости. // Механика деформ. сред. Куйбышевский ун-т. - 1979. - Вып.6. С. 85-90.
- [134] Этгельбрехт Ю.К., Нигул У.К. Нелинейные волны деформации. // М.: Наука. - 1981. - 256с.
- [135] Achenbach J.D. The influence of heat conduction on propagating stress jumps // J. Mech Phys. Solids. 1968. V.16. № 4. P. 273-282.
- [136] Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. New York. Elsevier. 1973.
- [137] Achenbach J.D., Reddy D.R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus. 1967. 18. S.141-144.
- [138] Biot M.A. Mechanics of incremental deformation. // New York. Willey. - 1965. - 504p.
- [139] Bland D.R. Dilatational waves and shocks in large displacement isentropic dynamical elasticity. // J. Mech. Phys. Solids. - 1964. - V.12. - P. 245-267.
- [140] Bland D.R. Finite elastodynamics. // J. Inst. Mach. Applic. - 1966. - P. 327-342.
- [141] Bland D.R. Recent progress in Applied Mechanics, the folke odquist volume. // Stochholm - 1967. - P. 91-124.
- [142] Burenin A.A., Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. A Ray method for solving boundary value problems connected with the propagation of finite amplitude shock waves // Proc. 1993 Int. Symp. on Nonlinear Theory and its Applications. Hawaii, December 5-10. 1993. V.5. P. 1085-1088.

- [143] Burenin A.A., Zinovyev P. V., Lebedeva N.F. Construction of approximate solution of the non-stationary one-dimensional axially symmetric tasks of dynamics of an incompressible elastic medium // XXX Summer School "Advanced Problems in Mechanics". Russia. - St.Petersburg: Institute of Problems of Mechanical Engineering. - 2003. - P. 134-138.
- [144] Chy Boa-Teh. Finite amplitude waves in incompressible perfectly elastic materials. // J. Mech. Phys. Solids. - 1964. - V.12. - N.1. - P. 45-57.
- [145] Chy Boa-Teh. Transverse shock waves in incompressible elastic solids. // J. Mech. Phys. Solids. - 1967. - V.15. - N.1. - P. 1-14.
- [146] Collins W.D. One dimensional non-linear wave propagation in incompressible elastic materials. // Quart. J. Mech. Appl. Mach. - 1966. - V.19. - P. 236-241.
- [147] Davison L. Propagation of plane waves of finite amplitude in elastic solids. // J. Mech. Phys. Solids. - 1966. - V.14. - P. 249-270.
- [148] Ericksen J.L. On the propagation of waves in isotropic incompressible perfectly elastic materials // J. Rat. Mech. Anal. 1953. N2. P. 329-337.
- [149] Hadamard J. Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de VHydrodynamique. Librairie Scientifique A Hermann. Paris. 1903.
- [150] Haruda A. On the solution to the riemann for arbitrary hyperbolic system of conservation laws. // Publ. of the Inst. of geophysics of Polich academy of sciences. - Sep A. -(98). - Warszawa. - 1976. - 124p.
- [151] Hill R. Acceleration waves in solids // J. Mech. Phys. Solids. 1962. № 10. P. 1-16.
- [152] Hsu J.C. K., Clifton R.J. Waves of combined stress. // J. Mech. Phys. Solids. - 1974. - V.22. - N4. - P. 255-266.

- [153] Jahsman W.E. Propagation of abrupt circular wave fronts in elastic sheets and plated // Proc of the 3rd US National Congress on Applied Mechanics. Providence Rhode Island. New York. 1958. P. 195-202.
- [154] Murnaghan F.D. Finite deformation of an elastic solid. // New-York: Willy: London: Chapman. - 1951. - 140p.
- [155] Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities. // Appl. Mech. Rev. - V.48. - N1. - 1995. - P. 1-39.
- [156] Rossikhin Yu.A. Impact of a rigid sphere onto an elastic half-space // Sov. Appl. Mech. (Engl. transl). 1986. V.22. № 5. P. 403-409.
- [157] Rossikhin Yu.A. Influence of weak anisotropy on the nature of cylindrical and spherical shock propagation // Sov. Appl. Mech. (Engl transl). 1981. V.17. № 1. P. 25-28.
- [158] Rossikhin Yu.A. Non-stationary surface waves of "diverging circles" type on conic surfaces of hexagonal crystals. Acta. Mech. 1992. V.92(1-4). P. 183-192.
- [159] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Methods for solving one-dimensional boundary-value problems in a nonlinear elastic medium // Acta. Mech. 1996. V. 114(1-4). P. 51-69.
- [160] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. On construction of uniformly fit ray decompositions for solving dynamical problems of linear viscoelasticity (Engl transl) // Soviet Appl. Mech. 1991. V.27. № 1. P. 77-82.
- [161] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Ray method for investigating transient wave processes in a thin elastic anisotropic layer (Engl transl) // J. Appl. Math. Mech. 1991. V.55. № 5. P. 724-732.

- [162] Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Ray method of solving problems connected with a shock interaction // *Acta. Mech.* 1994. V.102(1-4). P. 103-121.
- [163] Sun C. T. Transient wave propagation in viscoelastic rods // *J. Appl. Mech. (ASME)*. 1970. V.37. № 4. P. 1141-1144.
- [164] Ting T.C. T. Propagation of discontinuities of all orders in nonlinear media. // In: *Rec. fdf. in Eng. Sci. / Chang T.S. Massachusetts: Sci. Publ. Inc.* - 1975. -5. - P. 101-110.
- [165] Truesdell C. General and exact theory of waves in finite elastic strain // *Arch, Rat. Mech. Anal.* 1961. № 8. P. 263-296.
- [166] Wesolovski Z. Shock wave in non-linear elastic material. // In: *XVII Pol. Conf. Szlyrk.* - 1975. *Abstr.* - S.1., S.a. - P. 225.
- [167] Yogchi Li., Ting T.C. T. Plane waves in simple elastic solids and discontinuous dependence of solution on boundary conditions. // *Ins. J. Sol. Struct.* - 1983. - V.19. - P. 989-1008.
- [168] Zinovyev P. V., Lebedeva N.F. The constructing of difference schemes of calculations in dynamic of elastic medium with use of radial front asymptotics // *XXX Summer School "Advanced Problems in Mechanics"*. Russia. St.Petersburg: Institute of Problems of Mechanical Engineering. - 2003. - P. 672-677.
- [169] Zinovyev P. V., Lebedeva N.F. To a problem of allocation of surfaces of break in numerical methods dynamics of deformable medium // *XXXI Summer School "Advanced Problems in Mechanics"*. Russia. - St.Petersburg: Institute of Problems of Mechanical Engineering. - 2003. - P. 100.