ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, 2008, том 48, № 3, с. 1–4

УДК 550.373

ГИДРОАКУСТИЧЕСКАЯ ВОЛНА ВО ВНЕШНЕМ ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2008 г. С. В. Сёмкин, В. П. Смагин, В. Н. Савченко
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток
e-mail: Li15@rambler.ru

Поступила в редакцию 23.05.2006 г.
После доработки 20.09.2007 г.

Рассмотрены электромагнитные поля, индуцированные гидроакустическими волнами, распространяющимися в жидкой проводящей среде в переменном магнитном поле. Получено уравнение, связывающее индуцированное магнитное поле с невозмущенным полем антенны и параметрами звуковой волны. Построена пространственно-временная картина индуцированного поля в случае, когда звуковая волна распространяется вдоль прямого провода с переменным током.

PACS: 43.20.Bi

1. ВВЕДЕНИЕ

В морях и океанах существуют электромагнитные поля различного происхождения, – создаваемые тропосферными, магнитосферными и гидродинамическими источниками. Частотный диапазон этих полей очень широк – от 10^{-10} до 10^{6} Гц [Карнаушенко и Кукушкин, 1980]. Электромагнитные поля акустического диапазона могут взаимодействовать со звуковыми волнами в морской среде.

Рассмотрим ситуацию, когда в морской среде присутствует источник электромагнитного поля. Структура поля в этом случае определяется как параметрами источника, так и электрическими свойствами морской среды. Определение этой структуры для различных конфигураций источника является отдельной задачей, рассмотренной, например, в [Крутецкий, 1982]. Предположим, что в области пространства, где есть такое электромагнитное поле, распространяется звуковая волна. Эта волна индуцирует дополнительное электромагнитное поле, которое накладывается на поле источника. (Аналогичное явление возникает при распространении морских волн в магнитном поле Земли [Смагин и др., 2005].). В данной работе мы исследуем поле, индуцированное плоской монохроматической звуковой волной с частотой ω, распространяющейся вблизи источника магнитного поля, которое периодически (с частотой ω_0) меняется во времени.

Как будет показано ниже, характерной особенностью индуцированного поля является наличие двух гармоник с частотами $\omega_0 + \omega$ и $\omega_0 - \omega$.

Используя уравнения Максвелла и закон Ома для морской среды, можно получить уравнение, связывающее индуцированное поле $\mathbf{B}$ с магнитным полем источника $\mathbf{B}_0$ и полем скоростей акустической волны $\mathbf{v}$ [Савченко и др., 1999]:

$$-\nabla^2\mathbf{B} + \mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0\sigma\,\mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0], \quad (1)$$

σ – электрическая проводимость морской среды, ε – диэлектрическая проницаемость воды.

В соответствии с постановкой задачи, поле скоростей и поле источника зададим в следующей форме:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_a\mathbf{e}_k\exp[i((\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega t)],\\ \mathbf{B}_0 &= \mathbf{b}_0\exp[i\omega_0 t],\end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/k$, $\omega = ck$, k – волновое число, c – скорость звука в морской воде.

Тогда правая часть уравнения (1) примет вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\mu_0\sigma v_a}{2}(e^{i(\omega_0-\omega)t}\mathrm{rot}([\mathbf{e}_k, \mathbf{b}_0]e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r})}) +\\ &+ e^{i(\omega_0+\omega)t}\mathrm{rot}([\mathbf{e}_k, \mathbf{b}_0]e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})})\end{aligned} \quad (3)$$

(Наличие в этом выражении двух слагаемых с частотами $\omega_0 + \omega$ и $\omega_0 - \omega$ обусловлено тем, что для правильной записи уравнения (1) в вещественной форме в правой части должна стоять не вещественная часть произведения функций (2), а произведение их вещественных частей.)

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{B}_+\exp[i((\omega_0+\omega)t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))] +\\ &+ \mathbf{B}_-\exp[i((\omega_0-\omega)t + (\mathbf{k}, \mathbf{r}))].\end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) получим уравнения для функций $\mathbf{B}_+$ и $\mathbf{B}_-$, которые запишем в виде одного соотношения:

$$-\nabla^2\mathbf{B}_\pm \pm 2ik(e_k,\nabla)\mathbf{B}_\pm + (k^2-\mu_0\varepsilon_0\varepsilon(\omega_0\pm\omega)^2 + i\mu_0\sigma(\omega_0\pm\omega))\mathbf{B}_\pm = \frac{\mu_0\sigma v_a}{2}(\mathrm{rot}[\mathbf{e}_k,\mathbf{b}_0] \mp ik[\mathbf{e}_k,[\mathbf{e}_k,\mathbf{b}_0]]) \quad (5)$$

Рассмотрим два частных случая, в которых можно пренебречь теми или иными слагаемыми в левой части уравнений (5). Предположим, что длина звуковой волны значительно меньше l – размеров области, в которой существенно меняется поле $\mathbf{b}_0$, то есть, $kl \gg 1$. Естественно предположить, что характерный масштаб изменения полей $\mathbf{B}_\pm$ тоже порядка l. Если это предположение верно, то наибольшим в левой части (5) является третье слагаемое. Оставляя только одно это слагаемое мы получим алгебраическое уравнение для $\mathbf{B}_\pm$. Наименьшим по величине, в случае $kl \gg 1$, является первое слагаемое в левой части (5). Если в (5) отбросить только его, получим для $\mathbf{B}_\pm$ обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.

Рассмотрим противоположный случай, когда $kl \ll 1$. Тогда, отбрасывая второе слагаемое, мы получим из (5) уравнение Гельмгольца, а при малых ω_0, когда можно отбросить и третье слагаемое в левой части (5), получим уравнение Пуассона. Далее мы рассмотрим ситуацию, когда $kl \ll 1$, а поле $\mathbf{b}_0$ создается переменным током в длинном прямом проводе.

2. ЗВУКОВАЯ ВОЛНА В ПОЛЕ ПРЯМОГО ПРОВОДА

Рассмотрим бесконечно длинный прямой провод, ток в котором является гармонической функцией времени с частотой ω_0. Для того, чтобы вычислить поле, индуцированное звуковой волной, необходимо, как это видно из (1), найти магнитное поле $\mathbf{B}_0$, создаваемое самим этим током в морской среде. Уравнение, из которого можно определить $\mathbf{B}_0$, имеет следующий вид [Савченко и др., 1999].

$$-\nabla^2\mathbf{B}_0 + \mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{B}_0}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}_0}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Направим ось z цилиндрической системы координат вдоль провода. При условии, что ток в проводе не зависит от z, можно показать, что не равна нулю только угловая компонента магнитного поля – $B_{0\varphi}$, которая зависит только от расстояния от провода – r. Поэтому, будем искать решение уравнения (6) в виде:

$$\mathbf{B}_0 = (\mathrm{Re}F(r)e^{i\omega_0 t})\mathbf{e}_\varphi. \quad (7)$$

Граничные условия для функции $F(r)$ имеют следующий вид:

$$F(R_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_0}, \quad F(\infty) = 0, \quad (8)$$

где I – амплитуда силы тока, R_0 – радиус провода.

Подставив (7) в (6), получим уравнение для функции $F(r)$:

$$r^2F'' + rF' + (\eta r^2 - 1)F = 0,$$

где

$$\eta = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon\omega_0^2 - i\mu_0\sigma\omega_0.$$

Введем безразмерную переменную $x = r\sqrt{\eta}$. Уравнение для $F(x)$

$$x^2F'' + xF' + (x^2-1)F = 0$$

является уравнением Бесселя 1-го порядка. Решение этого уравнения, ограниченное на бесконечности, запишем через функцию Ганкеля 2-го рода: $F(x) = AH_1^{(2)}(x)$.

Константа A может быть найдена из граничного условия (8), что дает $A = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R_0 H_1^{(2)}(R_0\sqrt{\eta})}$.

Рассмотрим область частот $\omega_0 \ll \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \approx 10^{10}$ с$^{-1}$. В этой области можно пренебречь вещественной частью η и считать этот параметр равным $\eta = \mu_0\varepsilon_0\sigma e^{-i\pi/2}$, а $\sqrt{\eta} = ae^{-i\pi/4}$, где $a = \sqrt{\mu_0\omega_0\sigma}$. Тогда [Справочникs, 1979]

$$H_1^{(2)}(rae^{-i\pi/4}) = -\frac{2}{i\pi e^{-i\pi}}(\mathrm{ker}_1(ra) + i\,\mathrm{kei}_1(ra)).$$

Используя асимптотику функции Ганкеля при малых значениях аргумента $H_1^{(2)}(z) \approx -\dfrac{2}{i\pi z}$, получим выражение для $F(r)$ при $R_0 \longrightarrow 0$:

$$F(r) = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi\sqrt{2}}(-1+i)(\mathrm{ker}_1(ra) + i\,\mathrm{kei}_1(ra)) = F_0(r)e^{i\psi}, \quad (9)$$

где

$$F_0(r) = f_0\sqrt{\mathrm{ker}_1^2(ra) + \mathrm{kei}_1^2(ra)} \quad (10)$$

и

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{\mathrm{kei}_1(ra) - \mathrm{ker}_1(ra)}{\mathrm{kei}_1(ra) + \mathrm{ker}_1(ra)}, \quad f_0 = \frac{\mu_0 I\sqrt{\mu_0\omega_0\sigma}}{2\pi}. \quad (11)$$

Заметим, что при $\omega_0 \longrightarrow 0$, выражение (9) переходит $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$, что соответствует магнитному полю прямого провода в вакууме. Расчет показывает, что при любом ω_0, $F_0(r)$ есть монотонно убывающая функция аргумента. Чем больше значение ω_0, тем быстрее убывает функция $F_0(r)$.

Рассмотрим плоскую монохроматическую звуковую волну, распространяющуюся вдоль провода с током. В приближении, когда уравнение (5) превращается в уравнение Пуассона ($kl \ll 1$) у индуцированных полей $\mathbf{B}_+$ и $\mathbf{B}_-$ отличны от нуля только угловые компоненты, которые равны по модулю и могут быть вычислены по формуле:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 \sigma v_0}{4\pi} \times \\ \times \int \frac{r' F_0(r') e^{i\psi(r')} z' \sin kz'}{\left(\sqrt{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi') + z'^2}\right)^3} dz' d\varphi' dr'. \quad (12)$$

Проведя в этом выражении интегрирование по z', получим:

$$B_\varphi = \frac{k\mu_0 \sigma v_0}{2\pi} \int r'''' F_0(r'''') e^{i\psi(r'''')} \times \\ \times K_0\left(k\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'}\right) d\varphi' dr', \quad (13)$$

где $K_0(z)$ – функция Макдональда.

Исследуем характер зависимости B_φ от частоты акустической волны ω, частоты переменного тока в антенне ω_0 и от расстояния r от провода. Для этого перейдем к безразмерным переменным следующим образом. Введем характерную частоту $\omega_s = \mu_0 \sigma c^2$ и характерную длину $l_0 = c/\omega_s = 1/(\mu_0 \sigma c)$. Обозначим $x = r'/l_0$, $x' = r/l_0$, $w = \omega/\omega_s$ и $w_0 = \omega_0/\omega_s$. В этих переменных:

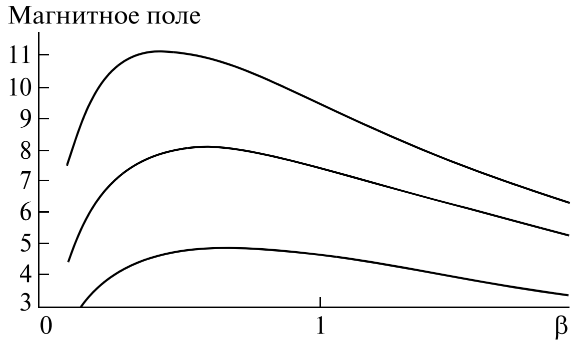
$$\mathrm{Re} B_\varphi = b_0 w \sqrt{w_0} \int x\left(\mathrm{ker}_1(x\sqrt{w_0}) + \mathrm{kei}_1(x\sqrt{w_0})\right) \times \\ \times K_0(wX) dx d\varphi, \quad (14)$$

$$\mathrm{Im} B_\varphi = b_0 w \sqrt{w_0} \int x\left(\mathrm{ker}_1(x\sqrt{w_0}) - \mathrm{kei}_1(x\sqrt{w_0})\right) \times \\ \times K_0(wX) dx d\varphi, \quad (15)$$

где $X = \sqrt{x'^2 + x^2 - 2xx'\cos\varphi}$ и $b_0 = \dfrac{\mu_0^2 \sigma u_0 I}{4\pi^2}$.

Другой способ перехода к безразмерным переменным состоит в следующем. Введем новую переменную интегрирования $y = r'/r$. Тогда $r' = ry$, $dr' = rdy$ и выражения (14) и (15) можно переписать в виде:

$$\mathrm{Re} B_\varphi = b_0 \alpha\beta \int y\left(\mathrm{ker}_1(\alpha y) + \mathrm{kei}_1(\alpha y)\right) \times \\ \times K_0\left(\beta\sqrt{1 + y^2 - 2y\cos\varphi}\right) dy d\varphi$$



Зависимости индуцированного магнитного поля (в единицах $b_0 = \dfrac{\mu_0^2 \delta u_0 I}{4\pi^2}$), от параметра $\beta = kr$ при фиксированных значениях $\alpha = \sqrt{\mu_0 \omega \sigma r}$.

$$\mathrm{Im} B_\varphi = b_0 \alpha\beta \int y\left(\mathrm{ker}_1(\alpha y) - \mathrm{kei}_1(\alpha y)\right) \times \\ \times K_0\left(\beta\sqrt{1 + y^2 - 2y\cos\varphi}\right) dy d\varphi,$$

где $\alpha = ar$, $\beta = kr$. Отсюда видно, что индуцированное поле не меняется, в случае, когда частоты и расстояние изменяется так, что α и β остаются постоянными.

3. ВЫВОДЫ

Численный расчет показывает, что при фиксированной частоте акустической волны и на неизменном расстоянии от провода индуцированное поле монотонно падает с ростом частоты колебаний тока в проводе. Зависимость индуцированного поля от β при фиксированном α показана на рисунке. Верхняя кривая на этом рисунке соответствует значению α равному 0.5; средняя – 1; нижняя – 2. Из рисунка видно, что индуцированное поле имеет максимум $B_m(\alpha)$ при некотором значении $\beta_m(\alpha)$. $B_m(\alpha)$ спадает с ростом α (приблизительно по экспоненциальному закону), а функция $\beta_m(\alpha)$ растет и при больших значениях α асимптотически приближается к некоторой величине, приближенно равной 0.655. Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Начиная с расстояний, приблизительно равных $1.5/a$ частота акустической волны ω_m при которой индуцированное поле максимально, может быть вычислена так:

$$\omega_m = 0{,}655 c/r, \quad (16)$$

а соответствующая этой частоте длина волны λ_m –

$$\lambda_m = 9{,}6 r. \quad (16\text{a})$$

При фиксированном значении r, частота ω_m растет с ростом ω_0 (максимальное значение индуцированного поля при этом падает), и при больших частотах тока в проводе стремится к значению, определяемому выражением (16).

Зависимость $\beta_m(\alpha)$ можно аппроксимировать функцией вида:

$$\beta_m(\alpha) = \beta_{m0}(1 - \exp(-\gamma\alpha)), \quad (17)$$

где β_{m0} и γ — константы, определяемые из сравнения (17) с зависимостью $\beta_m(\alpha)$. Переходя в (17) к размерным переменным, можно получить зависимость ω_m от r и ω_0 в следующем виде:

$$\omega_m = \frac{\beta_{m0}c}{r}[1 - \exp(-\gamma r\sqrt{\omega_0\omega_s}/c)]. \quad (18)$$

Из (18) видно, что вблизи провода ($r \longrightarrow 0$) ω_m стремится к предельному значению, равному $\beta_{m0}\gamma\sqrt{\omega_0\omega_s} \sim \sqrt{\omega_0}$.

В заключении кратко рассмотрим вопрос о численной оценке величины отношения $B_\pm/b_0$. Для коротких звуковых волн ($kl \gg 1$) это отношение имеет порядок $\frac{\mu_0\sigma v_a}{k}$, что в практически интересных случаях составляет 10^{-6}–10^{-8}. Измерение этого поля облегчается тем, что его частота ($\omega_0 \pm \omega$) не совпадает с частотой ω_0 внешнего поля $\mathbf{b}_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

— *Карнаушенко Н.Н., Кукушкин А.С.* Экспериментальные исследования вертикальной структуры естественного электромагнитного поля в океане в диапазоне частот выше единиц герц // Фундаментальные проблемы морских электромагнитных исследований. ИЗМИРАН. С. 241–248. 1980.

— *Крутецкий И.В.* Электромагнитные поля и волны в морской среде. Л.: Судостроение, 1982.

— *Савченко В.Н., Смагин В.П., Фонарев Г.А.* Вопросы морской электродинамики. Владивосток. ВГУЭС. 1999.

— Смагин в.П., Савченко В.Н., Семкин С.В. Магнитные вариации волнения в прибрежной зоне моря с плоским наклонным дном // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 45. № 4. С. 559–563. 2005.

— Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под редакцией М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.