

Е. П. Дац¹, М. Р. Петров^{2,3}, А. В. Ткачева³

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПЛАСТИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ О СБОРКЕ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКОЙ

¹ Владивостокский государственный университет экономики и сервиса

² Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет

³ Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

Аннотация. Решена краевая задача теории температурных напряжений о сборке цилиндрических деталей способом горячей посадки. Указаны особенности постановки и методы решения задачи, связанные с использованием кусочно-линейных пластических потенциалов. Построены расчетные алгоритмы, позволяющие учитывать тот факт, что при переменном пределе текучести температурные напряжения могут, последовательно изменяясь, соответствовать разным граням и ребрам поверхности текучести. Показано, что такие изменения в характере пластического течения существенно влияют на формирование итогового натяга.

Ключевые слова: упругость, термопластичность, сборка с натягом, горячая посадка, остаточные напряжения

УДК: 539.374+ 539.224

Введение. Решая задачу о температурных напряжениях в длинной круглой трубе, находящейся в условиях интенсивного термомеханического воздействия, Д. Бленд заметил [1], что пластическое течение в материале такого полого цилиндра может возникнуть при напряженных состояниях, соответствующих различным граням кусочно-линейного условия текучести (призмы Треска) и ребрам поверхности текучести. Более того, соответствие напряжений разным участкам кусочно-линейной поверхности нагружения в пространстве главных напряжений может наблюдаться уже в процессе пластического течения. Таким образом, области упругоупругоэластического деформирования разделяются на подобласти упругого (обратимого) деформирования и пластического течения, а последняя в свою очередь разделяется на части, в которых развитие пластического течения подчинено различным системам уравнений в зависимости от принадлежности напряженных состояний определенным граням и ребрам кусочно-линейного условия текучести. Данное обстоятельство существенно усложняет методы расчетов температурных напряжений в упругоупругоэластических телах, так как возникающие и исчезающие границы разделов между такими областями течения наряду с

Поступила XX.XX.200X

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН "Дальний Восток" проект 0262-2015-0064.

упругопластичными границами остаются неизвестными, и их положение определяется только в процессе решения соответствующих краевых задач. Для определения на каждом шаге расчетов положений таких продвигающихся границ и мест их возникновения необходимы специальные алгоритмы, тем более, что температурное поле, согласно которому рассчитываются напряженно-деформированные состояния в качестве следствия предварительных вычислений, известно, чаще всего в форме численных массивов. Указанные обстоятельства привели к тому, что теория температурных напряжений в упругопластических телах, в отличие от такой теории в упругих телах, получила свое развитие только одновременно с совершенствованием вычислительных возможностей, то есть только в конце прошлого века [6,8].

Температурные напряжения сопровождают абсолютное большинство технологических процессов, связанных с термомеханическим воздействием на материалы (прокатка, штамповка, сварка, сверление, резанье и т.д.). Развившись в условиях изменяющейся температуры, они могут оставаться в теле в качестве остаточных напряжений, когда температура по нему выравнивается. Иногда присутствие в теле остаточных напряжений полезно, например, тогда, когда они обеспечивают в сборке требуемый натяг, но часто значительный их уровень недопустим, как, например, в окрестности сварного шва, и тогда назначаются технологические операции по снижению уровня остаточных напряжений (отпуск, отжиг). Расчетное прогнозирование уровня и распределения температурных напряжений в упругих телах сведено в настоящее время [3,4], по существу, к инженерной задаче, но когда требуется учесть пластические свойства материала, такое прогнозирование становится достаточно сложной задачей. Использование кусочно-линейных пластических потенциалов [2] (условий пластичности Треска, Ишлинского-Ивлева) упрощает задачу, но, как уже отмечалось, область течения в таком случае разбивается неизвестными границами, а расчетная необходимость вычисления расположений таких границ наоборот существенно затрудняет расчеты температурных напряжений. Здесь на примере простейшей одномерной задачи о сборке цилиндрических деталей горячей посадкой проследим за возникновением и движением таких границ, укажем алгоритмы и результаты расчетов.

Ряд краевых задач теории температурных напряжений наряду с [1], рассмотрел Ю.Н. Шевченко [5] с учениками. Вопросом отыскания температурных напряжений при осесимметричном деформировании с учетом линейной зависимости предела текучести от температуры посвящены также работы [6, 7]. При том же предположении о линейной зависимости предела текучести от температуры в [8-10] вычисляется итоговый натяг [11] в сборке горячей посадкой цилиндрических деталей как для случая плоской деформации [9], так и для случая плоского напряженного состояния [8,10]. Ниже на примере посадки горячей муфты на холодный вал рассмотрим особенности расчета как процессов, следующих за моментом посадки, так и итогового натяга в сборке.

Исходные модельные зависимости. Считаем материал сборки изотропным и упругопластическим. Деформации d_{ij} полагаем малыми и складываемися из обратимых (упругих) e_{ij}^e и необратимых (пластических) e_{ij}^p , ($i, j = 1, 2, 3$) деформаций

$$d_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (0.1)$$

Здесь u_i – компоненты вектора перемещений, индексом после запятой обозначается производная по соответствующей пространственной координате. Обратимые деформации, температуру T и напряжения связывают соотношения Дюамеля–Неймана [3, 4]

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (\lambda e_{kk}^e - K\theta) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \\ \theta &= 3\alpha (T - T_0).\end{aligned}\tag{0.2}$$

В записи (2.1) и (2.2) использована прямоугольная декартова система координат и правило суммирования по повторяющемуся индексу, δ_{ij} – компоненты единичного тензора (символ Кронекера), λ , μ , K – упругие постоянные материала $K = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)$, λ , μ – параметры Ламе, K – модуль всестороннего сжатия, α – коэффициент линейного температурного расширения, T_0 – комнатная температура.

Пластические деформации накапливаются в материале только при напряжениях, удовлетворяющих условию текучести $f(\sigma_{ij}) = 0$. В принимаемых далее условиях принципа максимума Мизеса уравнение поверхности $f(\sigma_{ij}) = 0$ в пространстве напряжений выполняет роль пластического потенциала со следованием ассоциированного закона пластического течения

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\lambda > 0.\tag{0.3}$$

В качестве поверхности нагружения далее будет использоваться призма Треска [8]

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k,\tag{0.4}$$

где σ_i – главные значения тензора напряжений, $k = k(\theta)$ – предел текучести материала. Далее, для предела текучести принимаем следующую его зависимость от температуры

$$k = k_0 \left((T_p - T_0)^{-2} (T_p - T(r, t))^2 \right).\tag{0.5}$$

В (0.5) k_0 – предел текучести материала при комнатной температуре T_0 , T_p – температура плавления материала.

Постановка задачи. Термоупругое деформирование. Полагаем, что муфта (полый цилиндр), нагретая до температуры T_* и имеющая при этом размеры $R_1 \leq r \leq R_2$, в момент времени $t = 0$ насаживается на вал, находящийся при комнатной температуре T_0 и имеющий размеры $0 \leq r \leq R_1$. Считая сборку муфты и вала достаточно длинной и пренебрегая краевыми эффектами, приходим, таким образом, к одномерной задаче температурных напряжений. Распределение температуры по элементам сборки найдем, решая уравнение теплопроводности, записанное в цилиндрической системе координат r, φ, z

$$T_{,t} = a (T_{,rr} + r^{-1}T_{,r})\tag{0.6}$$

В (0.6) индексом после запятой обозначается соответствующее частное дифференцирование: $T_{,t} = \partial T / \partial t$; $T_{,r} = \partial T / \partial r$, a – коэффициент температуропроводности ($a = a_1$ для материала вала и $a = a_2$ для материала муфты).

Уравнение теплопроводности (0.6) следует дополнить начальными и краевыми условиями. В качестве начальных условий имеем

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= T_0, & \text{при } 0 < r \leq R_1 \\ T(r, 0) &= T_*, & \text{при } R_1 \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (0.7)$$

Граничными условиями рассматриваемой одномерной задачи являются значения: на свободной границе $r = R_2$

$$\psi_2 T_{,r} \Big|_{r=R_2} = \chi (T_0 - T) \quad (0.8)$$

на контактной поверхности $r = R_1$

$$\begin{aligned} T^{(1)} \Big|_{r=R_1} &= T^{(2)} \Big|_{r=R_1} \\ \psi_1 T_{,r}^{(1)} \Big|_{r=R_1} &= \psi_2 T_{,r}^{(2)} \Big|_{r=R_1} \end{aligned} \quad (0.9)$$

на центральной оси вала

$$T_{,r} = 0 \quad (0.10)$$

В (0.8)–(0.10) ψ_1 , ψ_2 – коэффициенты теплопроводности для материала вала и муфты соответственно, χ – коэффициент теплоотдачи от внешней поверхности муфты $r = R_2$ в окружающую среду.

Первоначально за моментом времени $t = 0$ материалы сборки деформируются упруго. Деформации в них связаны с единственной отличной от нуля компонентой вектора перемещений $u_r = u$ зависимостями

$$\begin{aligned} e_{rr} &= u_{,r}, \\ e_{\varphi\varphi} &= r^{-1}u. \end{aligned} \quad (0.11)$$

Остальные компоненты тензора деформаций равны нулю. Для компонент тензора напряжений в таком случае из (0.1) следует

$$\begin{aligned} \sigma_r &= wu_{,r} + \lambda r^{-1}u - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= wr^{-1}u + \lambda u_{,r} - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda (u_{,r} + r^{-1}u) - K\theta, \\ w &= \lambda + 2\mu. \end{aligned} \quad (0.12)$$

Задающим состояние равновесия материала сборки является единственное не тривиальное уравнение равновесия, следующее из закона сохранения импульса

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0. \quad (0.13)$$

Подстановка соотношений (0.12) в уравнение равновесия (0.13), приводит к дифференциальному уравнению второго порядка относительно $u(r, t)$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = \frac{K}{w} \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (0.14)$$

Подставляя решение уравнения (0.14) в (0.12), получим соотношения для вычисления напряженно-деформируемых состояний упруго деформируемых материалов сборки в зависимости от распределения по ней температуры. Данное распределение полагаем далее известным, найденным при решении температурной задачи (0.6) – (0.10). Последнее можно в данном простейшем случае найти аналитически, а в случае более сложной геометрии численно. Таким образом, решение механической части задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 u &= w^{-1}F(-1, l_j, r) + rC_1^{(j)}(t) + r^{-1}C_2^{(j)}(t), \\
 \sigma_r &= -2\mu(wr)^{-1}F(-1, l_j, r) + 2gC_1^{(j)}(t) - 2\mu r^{-2}C_2^{(j)}(t), \\
 \sigma_\varphi &= 2\mu(wr)^{-1}F(-1, l_j, r) - 2\mu w^{-1}\theta(r, t) + 2gC_1^{(j)}(t) + 2\mu r^{-2}C_2^{(j)}(t), \\
 \sigma_z &= 2\lambda C_1^{(j)}(t) - 2\mu w^{-1}\theta(r, t) \\
 F(h, l_j, r) &= r^{-h} \int_{l_j}^r \rho^h \theta(\rho, t) d\rho, \quad g = (\lambda + \mu).
 \end{aligned} \tag{0.15}$$

Здесь $j = 1$ для материала вала и $j = 2$ для материала муфты, $l_1 = 0$, $l_2 = R_1$. Следует также учитывать, что параметры λ и μ для материалов вала и муфты могут принимать разные значения (также как и значения коэффициентов температуропроводности).

В (0.15) $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ – главные значения тензора напряжений. (рис. 1 а). Коэффициенты интегрирования (функции времени) находятся из граничных условий. В качестве последних принимаем

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}|_{r=0} &= 0, \quad \sigma_r^{(2)}|_{r=R_2} = 0, \\
 u^{(1)}|_{r=R_1} &= u^{(2)}|_{r=R_1}, \quad \sigma_r^{(1)}|_{r=R_1} = \sigma_r^{(2)}|_{r=R_1}.
 \end{aligned} \tag{0.16}$$

Заметим, что для того, чтобы внутренний размер муфты оказался при нагревании ее до температуры T_* равным R_1 , необходимо изготовить ее с внутренним радиусом $r = r_*$

$$r_* = R_1 \left(1 - \frac{3K\alpha(T_* - T_0)}{2g} \right). \tag{0.17}$$

Зависимости (0.15) задают решения справедливые только до некоторого последующего за моментом посадки момента времени $t < t_1$. С момента времени $t = t_1$ в материале муфты возникает и далее распространяется область пластического течения.

Пластическое течение. Расчетно можно показать, что пластическое течение возникает в материале муфты на ее контактной поверхности $r = R_1$ и распространяется далее по муфте, отделяя пластическую область от упругой упругопластической границей, движущейся по закону $r = n_1(t) > R_1$. Пластическое течение материала в области $R_1 \leq r \leq n_1(t)$ осуществляется в условиях соответствия напряжений грани призмы Треска: $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$. Следовательно, материал сборки разделяется таким

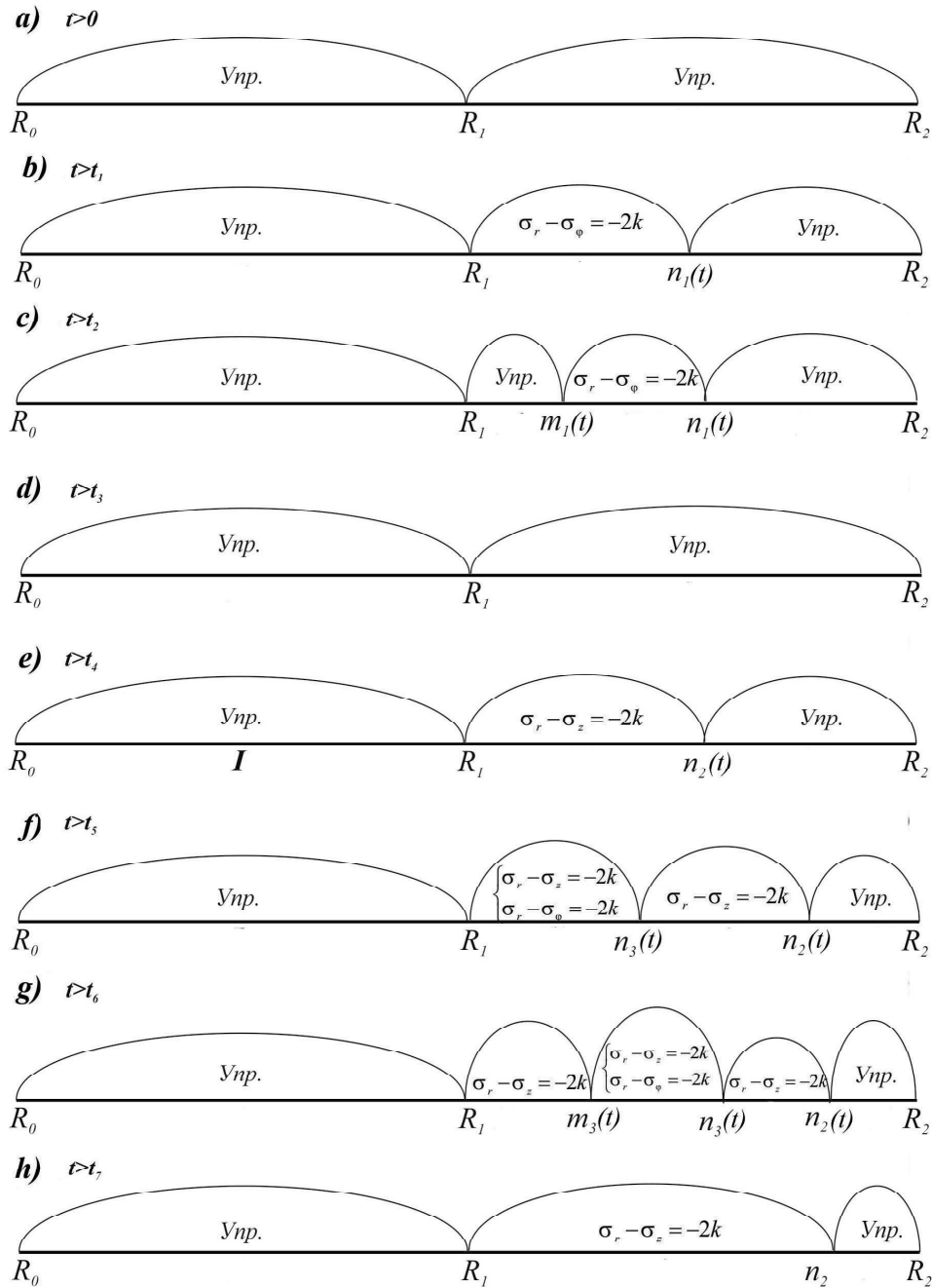


Рис. 1. Схематичное представление возникновения и исчезновения различных областей пластического деформирования: а) – термоупругое деформирование, б) – развитие первой области пластического течения и т.д.

способом на три области, в двух из которых $0 \leq r \leq R_1$, $n_1(t) \leq r \leq R_2$ он продолжает

деформироваться упруго, а в третьей области $R_1 \leq r \leq n_1(t)$ деформируется необратимо (пластически). На рис.1 данное положение представлено схематически: верхний рисунок до момента времени t_1 , следующий до некоторого последовательного момента времени t_2 (ниже такой момент будет задан) и так далее.

Для нахождения напряжений в области пластического течения перепишем соотношения (0.12) с учетом развивающихся пластических деформаций e_r^p, e_φ^p .

$$\begin{aligned}\sigma_r &= w(u_{r,r} - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(u_{r,r} - e_r^p) + w(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u_r + u_{r,r} - e_\varphi^p - e_r^p) - K\theta.\end{aligned}\quad (0.18)$$

Используя принадлежность напряжений к определенной грани ($\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$) призмы Треска и, как следствие ассоциированного закона пластического течения, условие пластической несжимаемости $e_r^p + e_\varphi^p = 0, e_z^p = 0$, найдем

$$e_r^p = 0.5(u_{r,r} - r^{-1}u + k\mu^{-1}). \quad (0.19)$$

Перепишем соотношение (0.18) для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned}\sigma_r &= g(u_{r,r} + r^{-1}u) + k - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= g(u_{r,r} + r^{-1}u) + k - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(u_{r,r} + r^{-1}u) - K\theta.\end{aligned}\quad (0.20)$$

Уравнение равновесия (0.13) с учетом (0.20) запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) \right) = -g^{-1} \left(\frac{2}{r}k + \frac{\partial k}{\partial r} + K \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (0.21)$$

Подставляя решение дифференциального уравнения (0.21) в (0.20) и (0.19), получим зависимости для нахождения перемещений и напряжений в пластически деформируемой области. Отметим еще раз, что получены данные зависимости с использованием условия, что напряжения соответствуют определенной грани призмы Треска: $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$.

$$\begin{aligned}u &= g^{-1} (F(-1, l, r) + G(1, l, r)) + 0.5C_1^{(3)}(t)r + C_2^{(3)}(t)r^{-1}, \\ \sigma_r &= gC_1^{(3)}(t) + 2r^{-1}G(1, l, r), \\ \sigma_\varphi &= gC_1^{(3)}(t) + 2r^{-1}G(h, l, r) + 2k(r, t),\end{aligned}\quad (0.22)$$

$$\sigma_z = -g^{-1} (K\mu\theta(r, t) - \lambda(2r^{-1}G(h, l, r) + k(r, t))) + \lambda C_2^{(3)}(t),$$

$$e_r^p = (2g)^{-1} (K\theta(r, t) + w\mu^{-1}k(r, t)) - r^{-1} (g^{-1}F(-1, l, r)) - r^{-2}C_2^{(3)}(t),$$

$$F(h, l, r) = Kr^{-h} \int_l^r \rho^h \theta(\rho, t) d\rho, \quad G(h, l, r) = r^h \int_l^r \rho^{-h} k(\rho, t) d\rho, \quad l = R_1.$$

Зависимости (0.22) справедливы для области пластического течения $R_1 \leq r \leq n_1(t)$. Они решают задачу вместе с зависимостями (0.15), которые справедливы в областях обратимого деформирования. Однако во всех таких зависимостях присутствует шесть неизвестных функций времени: $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$, и $C_1^{(3)}$ (0.15) и $C_2^{(3)}$ в (0.22). Эти функции определяются в каждый рассчитанный момент времени из краевых и контактных условий (0.16) совместно с условиями непрерывности перемещений и радиальных напряжений σ_r на упругопластической границе. Более того, на каждом шаге (по времени) расчетов необходимо определить положение упругопластической границы $r = n_1$, для чего следует воспользоваться условием равенства нулю на упругопластической границе пластических деформаций. Соответствующую систему алгебраических уравнений необходимо разрешить на каждом временном шаге расчетов. Дальнейшее перераспределение температуры по сборке остывание снова приведет к качественному изменению в характере последующего деформирования, поскольку напряжения в материале муфты при $r = R_1$ сдвинутся внутрь поверхности нагружения, то есть материал снова возвратится в упругое состояние.

Разгрузка. Расчётные зависимости (0.15) вместе с (0.22) позволяют построить решение задачи только до некоторого последующего момента времени $t = t_2 > t_1 > 0$. В момент времени $t = t_2$ от поверхности $r = R_1$ отделится, перемещаясь по материалу муфты, новая упругопластическая граница $r = m_1(t)$ (рис. 1, с). В материале муфты формируется область упругого деформирования $R_1 \leq r \leq m_1(t)$ при наличии в данной области накопленных, но далее не изменяющихся пластических деформаций $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$. Отличие $e_r(r, t)$ и $e_\varphi(r, t)$ от $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$ соответственно заключается в том, что последнее есть то же, что и первые, только в них t фиксировано моментом прихода в точку с текущей координатой r упругопластической границы $r = m_1(t)$ (для каждой координаты r это свой момент времени).

Заменив в соотношении (0.18) e_r^p , e_φ^p на p_r , p_φ и подставив такие зависимости в уравнение равновесия (0.13), получим дифференциальное уравнение для изменяющейся компоненты перемещения $u(r, t)$ в форме

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = \frac{K}{w} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{rw} (p_r - p_\varphi) - \frac{\lambda}{w} \frac{\partial}{\partial r} (p_\varphi) + \frac{\partial p_r}{\partial r}. \quad (0.23)$$

Разрешая обыкновенное дифференциальное уравнение (0.23) для поля перемещений в области упругого деформирования $R_1 \leq r \leq m_1(t)$, получим

$$\begin{aligned} u(r, t) &= 0.5rC_1^{(4)}(t) + r^{-1}C_2^{(4)}(t) + w^{-1} (F(1, l, r) + 2\mu\Phi_r(1, l, r)), \\ \Phi_r(1, l, r) &= r \int_l^r \rho^{-1} p_r(\rho) d\rho, \quad l = R_1 \end{aligned} \quad (0.24)$$

Подстановка (0.24) в (0.18) позволяет записать соотношения, задающие распределения напряжений в исследуемой области в любой рассчитываемый момент времени.

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= gC_1^{(4)}(t) + (-2\mu)r^{-2}C_2^{(4)}(t) + 2\mu(rw)^{-1}(2g\Phi_r(1, l, r) - F(1, l, r)), \\
 \sigma_\varphi &= 2\mu(rw)^{-1}(g(2\Phi_r(1, l, r) - 2rp_\varphi(r, t)) + F(1, l, r) - rK\theta(r, t)) + \\
 &+ C_1^{(4)}(t)g + 2r^{-2}\mu C_2^{(4)}(t), \\
 \sigma_z &= \lambda C_1^{(4)}(t) + 2\mu w^{-1}(\lambda(r^{-1}\Phi_r(1, l, r) - p_\varphi(r)) - K\theta(r, t)).
 \end{aligned} \tag{0.25}$$

Теперь материал сборки разделен на четыре области: в областях $(0 \leq r \leq R_1)$ и $(n_1(t) \leq r \leq R_2)$ материал продолжает деформироваться упруго, в области $m_1(t) \leq r \leq n_1(t)$ продолжается пластическое течение и, наконец, в области $R_1 \leq r \leq m_1(t)$ деформирование обратимо, но в условиях присутствия неизменяющихся необратимых деформаций. К граничным условиям добавятся условия непрерывности u и σ_r на упругопластической границе $r = m_1(t)$, а к прежним коэффициентам (неизвестным функциям времени) добавляются ещё и $C_1^{(4)}$, $C_2^{(4)}$. Таким образом, для их нахождения на каждом временном шаге следует решить систему уже из десяти алгебраических уравнений, добавляя еще неизвестные на данном шаге расчетов m_1 , n_1 .

С выравниванием температуры в материале сборки в момент времени $t = t_3$ происходит полное затухание пластического течения: $n_1(t_3) = m_1(t_3)$. Теперь материал сборки снова деформируется только упруго, напряжения в материале муфты найдутся из соотношений (0.25), в материале вала из (0.15). Однако, значения функции времени следует снова находить на каждом временном шаге по времени решением алгебраической системы уравнений (пять уравнений), следующих из граничных условий.

Казалось бы, данный процесс на этом заканчивается. Однако, это не так. Дальнейшее перераспределение температуры за счет теплопроводности и остывания приведет в некоторый момент времени $t = t_4 > t_3$ возникновению новой области пластического течения.

Повторное пластическое течение. Течение в состоянии полной пластичности. Продолжая расчёты процесса теперь уже только упруго деформирования (производя последующие шаги по времени), заметим, что в некоторый момент времени $t = t_4 > t_3$ в материале муфты на её граничной поверхности $r = R_1$ снова выполняется условие пластичности теперь в форме: $\sigma_r - \sigma_z = -2k$. Таким способом возникает новая упругопластическая граница $r = n_2(t)$ ($n_2(t_4) = R_1$) и новая область течения $R_1 \leq r \leq n_2(t)$ (рис. 1e). Последняя будет называться областью повторного пластического течения [12]. Напряжения в данной области подчинены зависимостями, следующими из закона Дюамеля – Неймана

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= w(u_{,r} - p_r - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u - p_\varphi - e_z^p) - K\theta, \\
 \sigma_\varphi &= \lambda(u_{,r} - p_r + e_z^e - e_r^p - e_z^p) + w(r^{-1}u - p_\varphi) - K\theta, \\
 \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u + u_{,r} - p_\varphi - p_r - e_r^p) - w(e_z^p) - K\theta.
 \end{aligned} \tag{0.26}$$

Отличие $p_r(r)$ от $e_r^p(r, t)$, $p_\varphi(r)$ от $e_\varphi^p(r, t)$ ранее уже отмечалось, только теперь $e_r^p(r, t)$ и $e_\varphi^p(r, t)$ отсчитываются от своих начальных значений, которыми и являются $p_r(r)$ и

$p_\varphi(r)$. Потому же для $e_z^p(r, t)$ начальными значениями являются их нулевые значения. На данной грани призмы Треска условие пластической несжимаемости переписется в форме: $e_r^p + e_z^p = 0$, $e_\varphi^p = 0$. Отсюда следует

$$e_r^p = 0.5 (u_{,r} + k\mu^{-1}) - 0.5p_r. \quad (0.27)$$

С учетом (0.26) и (0.27) уравнение равновесия (0.13) в рассматриваемой области повторного пластического течения $R_1 \leq r \leq n_2(t)$ сводится к дифференциальному уравнению для нахождения перемещения $u(r, t)$

$$g \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{g}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{u}{r^2} = K \frac{\partial \theta}{\partial r} + \left(\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r} \right) + \mu r^{-1} (p_r - 0.5p_\varphi) + gp_{r,r} + \lambda p_{\varphi,r} \quad (0.28)$$

Подстановка результата интегрирования (0.28) в (0.27) и (0.26) позволяет записать соотношения, задающие перемещение $u(r, t)$, напряжения σ_r , σ_φ , σ_z и деформации e_r^p , а следовательно и e_z^p , в зависимости от распределения температуры по материалу муфты в рассматриваемой области повторного пластического течения.

$$\begin{aligned}
 u &= (2gh)^{-1} [q_1\Phi_r(-h, l, r) + q_2\Phi_r(h, l, r) + s_1\Phi_\varphi(-h, l, r)] + \\
 &+ (2gh)^{-1} [-s_2\Phi_\varphi(h, l, r) + h(G(-h, l, r) + G(h, l, r))] + \\
 &+ (2gh)^{-1} [(h+1)F(-h, l, r)_* + (h-1)F(h, l, r)] + \\
 &+ r^{-h}C_1^{(5)}(t) + r^hC_2^{(5)}(t), \\
 \sigma_z &= (2ghr)^{-1} (-q_1s_2\Phi_\varphi(h, l, r) + q_2s_1\Phi_\varphi(-h, l, r)) + \\
 &+ (2ghr)^{-1} (-q_1q_2(\Phi_r(h, l, r) - \Phi_r(-h, l, r))) + + \\
 &+ (2ghr)^{-1} q_1((h-1)F(h, l, r) - hG(h, c, r)) + \\
 &+ (2ghr)^{-1} q_2((h+1)F(-h, l, r)_* - hG(-h, l, r)) + \\
 &+ q_2r^{-1-h}C_1^{(5)}(t)q_1r^{h-1}C_2^{(5)}(t) + 2k(r, t), \\
 \sigma_\varphi &= (2ghr)^{-1} q_1q_2(\Phi_\varphi(-h, l, r) - \Phi_\varphi(h, l, r)) + \\
 &+ (2ghr)^{-1} (s_2q_1\Phi_r(-h, l, r) - s_1q_2\Phi_r(h, l, r)) + \\
 &+ (2ghr)^{-1} s_1((h-1)F(h, l, r) - hG(h, l, r)) + \\
 &+ (2ghr)^{-1} s_2((h+1)F(-h, l, r) - hG(-h, l, r)) + \\
 &- (w - \lambda^2g^{-1})p_\varphi(r, t) - \mu g^{-1}\theta(r, t) - \lambda b g^{-1}k(r, t) + \\
 &+ s_1r^{h-1}C_2^{(5)}(t) - s_2C_1^{(5)}(t)r^{-(1+h)}, \\
 e_r^p &= (4gr)^{-1} (-q_1\Phi_r(-h, l, r) - q_2\Phi_r(h, l, r)) + \\
 &+ (4gr)^{-1} (-s_2\Phi_\varphi(h, l, r) - s_1\Phi_\varphi(-h, l, r)) + k(r, t)w(2g\mu)^{-1} \\
 &+ (4gr)^{-1} (F(h, l, r)(h-1) - F(-h, l, r)(h+1)) + \\
 &+ (4gr)^{-1} h(G(-h, l, r) - G(h, l, r)) + (2g)^{-1} K\theta(r, t) + \\
 &+ (2g)^{-1} p_\varphi(r, t) + 0.5hr^{h-1}C_2^{(5)}(t) - 0.5hC_1^{(5)}(t)r^{-(1+h)},
 \end{aligned} \tag{0.29}$$

$$\Phi_r(h, l, r) = r^h \int_l^r \rho^{-h} p_r(\rho) d\rho, \quad \Phi_\varphi(h, l, r) = r^h \int_l^r \rho^{-h} p_\varphi(\rho) d\rho,$$

$$F(h, l, r) = Kr^h \int_l^r \rho^{-h} \theta(\rho, t) d\rho, \quad G(h, l, r) = -r^h \int_l^r \rho^{-h} k(\rho, t) d\rho,$$

$$h = \sqrt{w/g}, \quad s_1 = h\lambda + w, \quad s_2 = w - h\lambda, \quad s_3 = (hg)^2 - \lambda^2,$$

$$q_1 = hg + \lambda, \quad q_2 = \lambda - hg, \quad q_3 = gh - w, \quad l = R_1.$$

Зависимости (0.29) справедливы в области повторного пластического течения $R_1 \leq r \leq n_2(t)$. В других двух областях происходит обратимое деформирование. Для этих областей остаются справедливыми зависимости (0.15), (0.25) и (0.24). Следует только учесть в (0.25) и (0.24), что $l = n_2(t)$. Новые значения функций времени $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(4)}$, $C_2^{(4)}$, появившиеся в результате интегрирования (0.28), функций $C_1^{(5)}$, $C_2^{(5)}$ так же, как и ранее вычисляются на каждом временном шаге расчетов согласно краевым условиям и условиям непрерывности перемещения u и напряжения σ_r на упругопластической границе $r = n_2(t)$.

Продолжая расчеты по обозначенному алгоритму, убеждаемся, что в некоторый последующий момент времени $t = t_5 \leq t_4$ на контактной поверхности материала муфты выполнится условие Треска $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$. Вместе с продолжающим выполняться требованием $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ данное условие определит состояние полной пластичности [2] (ребро призмы Треска). С момента времени $t = t_5$ от поверхности $r = R_1$ продвигается поверхность $r = n_3(t)$, разделяющая пластическую область $R_1 \leq r \leq n_2(t)$ на две подобласти, в которых пластическое течение осуществляется в соответствии с различными системами уравнений. В подобласти $n_3(t) \leq r \leq n_2(t)$ напряжения соответствуют грани $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, а в подобласти $R_1 \leq r \leq n_3(t)$ ребру призмы Треска. В первой из них остаются справедливыми (с точностью до функций времени $C_1^{(5)}$, $C_2^{(5)}$, которые придется определить заново) зависимости (0.29). В подобласти полной пластичности необходимо найти зависимости, аналогичные (0.29). Так из закона Дюгамеля – Неймана для области полной пластичности следует

$$\begin{aligned} \sigma_r &= w(u_{,r} - p_r - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u - p_\varphi - e_\varphi^p - e_z^p) - K\theta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(u_{,r} - p_r - e_r^p - e_z^p) + w(r^{-1}u - p_\varphi - e_\varphi^p) - K\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u + u_{,r} - p_\varphi - p_r - e_r^p - e_\varphi^p) - w(e_z^p) - K\theta. \end{aligned} \quad (0.30)$$

Условие полной пластичности $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ и $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$ и условие пластической несжимаемости $e_r^p + e_\varphi^p + e_z^p = 0$ приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} e_r^p &= 2/3u_{,r} - 1/(3r)u + 2k(r, t)(3\mu)^{-1} + 1/3(p_\varphi - 2p_r), \\ e_\varphi^p &= -1/3u_{,r} - 2/(3r)u - k(r, t)(3\mu)^{-1} - 1/3(2p_\varphi - p_r). \end{aligned} \quad (0.31)$$

Подставляя соотношения (0.30) с учетом (0.31) в уравнение равновесия (0.13), получим дифференциальное уравнение

$$K \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) \right) = K \frac{\partial \theta}{\partial r} + 4/3 \frac{\partial k}{\partial r} + 2 \frac{k}{r} + \frac{\partial p_r}{\partial r} + \frac{\partial p_\varphi}{\partial r} \quad (0.32)$$

Подставляя решение дифференциального уравнения (0.32) в выражения (0.30) и (0.31), получим, что в области полного пластического течения $R_1 \leq r \leq n_3(t)$ справедливы зависимости

$$\begin{aligned} u &= K^{-1}F(-1, l, r) + (3K)^{-1}G(-1, l, r) + 2K^{-1}G(1, l, r) + \\ &+ 0.5C_1^{(6)}(t)r + C_2^{(6)}(t)r^{-1}, \\ \sigma_r &= KC_1^{(6)}(t) + k(r, t) + 4r^{-1}G(1, l, r), \\ e_r^p &= (2G(1, l, r) - 3G(-1, l, r)) (3rK)^{-1} + 1/6C_1^{(6)}(t) + \\ &+ 2/3\theta(r, t) - r^{-2}C_2^{(6)}(t) + p_\varphi(r, t) + \\ &- 1/3 \left(-14(3K)^{-1} - 2\mu^{-1} \right) k(r, t) - (Kr)^{-1}F(-1, l, r) \\ e_\varphi^p &= (2G(1, x, r) + 3G(-1, x, r)) (3rK)^{-1} + \\ &+ 1/6C_1^{(6)}(t) + r^{-2}C_2^{(6)}(t) - 3^{-1}\theta(r, t) - p_\varphi(r, t) + \\ &+ 1/3 \left(-7(3K)^{-1} - \mu^{-1} \right) k(r, t) + (Kr)^{-1}F(-1, l, r). \end{aligned} \quad (0.33)$$

$$l = R_1.$$

Перемещения, напряжения и деформации в материале сборки в областях, кроме области полной пластичности определяются теми же зависимостями (0.15), (0.25), в которых следует считать $l_2 = n_2(t)$ в (0.15), $l = n_3(t)$ в (0.25).

Затухание полного пластического течения начинается с момента времени $t = t_6$. У поверхности контакта скорость роста окружной пластической деформации становится равной нулю, из чего следует, что перестает выполняться условие Треска $\sigma_r - \sigma_\varphi = -2k$. Напряженное состояние возвращается на грань $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ призмы Треска. На поверхности $r = R_1$ зарождается разгружающая пластическая граница $m_3(t)$, которая продвигаясь по материалу муфты, достигает в момент времени $t = t_7$ пластической границы $r = n_3(t_7)$, что приводит к затуханию полного пластического течения. В области $R_1 \leq r \leq m_3(t)$ $e_\varphi^p(r, t) = e_\varphi^p(r, t_7) = p_\varphi(r)$, при этом пластические деформации e_r^p, e_z^p продолжают свой рост.

Во временном интервале $t_6 \leq t \leq t_7$ перемещения, деформации и напряжения задаются ранее приведенными зависимостями. В области $R_1 \leq r \leq m_3(t)$ выполняются соотношения (6.4), в области $m_3(t) \leq r \leq n_3(t)$ – (6.8) с тем только отличием, что $l = m_3(t)$. В области $n_3(t) \leq r \leq n_2(t)$ задачу решают те же зависимости (6.4) при $l = n_3(t)$. Область материала муфты $n_2(t) \leq r \leq R_2(t)$ остается упругой и здесь справедливы соотношения (3.10) с $l = n_2(t)$. На каждом временном шаге расчетов наряду с положениями упругопластических границ необходимо снова осуществлять перерасчет

коэффициентов (функций времени) интегрирования уравнений равновесия, записанных по-разному для различных областей течения и упругого деформирования.

Когда полное пластическое течение перестанет существовать, в материале сборки останется три области, две из которых ($0 \leq r \leq R_1$, $n_2(t) \leq r \leq R_2$) деформируются упруго, а одна ($R_1 \leq r \leq n_2(t)$) деформируется необратимо в соответствии с условием пластичности $\sigma_r - \sigma_z = -2k$.

Остаточные напряжения. Итоговый натяг. После завершения процесса теплопроводности (данный процесс завершится, когда температура по элементам сборки выровняется и станет равной комнатной температуре T_0) напряжения в элементах сборки будут иметь некоторое распределение по пространственной координате r . Такие напряжения называют остаточными, а значения σ_r на поверхности контакта $r = R_1$ называют натягом в соединении [11]. В рассматриваемом случае при комнатной температуре в части муфты напряженно-деформированное состояние по-прежнему продолжает удовлетворять грани $\sigma_r - \sigma_z = -2k$ призмы Треска (рис.1, h). Следовательно в условиях, когда $T = T_0$ в материале муфты присутствуют две области: область $R_1(t) \leq r \leq n_2 - const$, где $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, и область $n_2(t) \leq r \leq R_2(t)$, где нет необратимых деформаций. В последней области уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = 0. \quad (0.34)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (0.34), получим остаточные напряжения и перемещения в области деформирования $R_1(t) \leq r \leq n_2 - const$.

$$\begin{aligned} u &= 0.5rC_1^{(j)} + r^{-1}C_2^{(j)} \\ \sigma_r &= gC_1^{(j)} + (-2\mu)r^{-2}C_2^{(j)} - K\theta \\ \sigma_\varphi &= C_1^{(j)}g + 2r^{-2}\mu C_2^{(j)} - K\theta \\ \sigma_z &= \lambda C_1^{(j)} - K\theta \\ l_1 &= 0, \quad l_2 = n_2. \end{aligned} \quad (0.35)$$

Дифференциальное уравнение равновесия (0.28), определяющее состояние нейтрального нагружения области материала, в которой выполняется условие Треска $\sigma_r - \sigma_z = -2k$, в случае отсутствия температурного градиента примет вид:

$$g \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{g}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{u}{r^2} = -b \left(\frac{k}{r} \right) + \mu r^{-1} (p_r - 0.5p_\varphi) + gp_{r,r} + \lambda p_{\varphi,r}. \quad (0.36)$$

Подставляя решение уравнения (0.36) в соотношения (0.28) и (0.27), получим выражения для нахождения напряжений, перемещений и деформаций нейтрально нагруженной области, в которой выполняется условие Треска $\sigma_r - \sigma_z = -2k$.

$$\begin{aligned}
 u_r &= -(2gh)^{-1} (\mu - g(h+1)) \Phi_r(-1, n_2, r) + r^{-h} C_1^{(8)} + r^h C_2^{(8)} + \\
 &- (2gh)^{-1} (2\mu - \lambda(h+1)) \Phi_\varphi(-1, n_2, r) + r^h C_2^{(8)} + \\
 &(2gh)^{-1} [(\mu - g(h-1)) \Phi_r(1, n_2, r)] + \\
 &+ (2gh)^{-1} \left[-(2\mu + \lambda(1-h)) P_\varphi(1, n_2, r) - 2hr(1-h^2)^{-1} k_0 \right], \\
 \sigma_z &= -h^{-1} (2\mu p_\varphi(r) + g(h-1) \Phi_r(r)) + (\lambda - hg) r^{-1-h} C_1^{(8)} + \\
 &+ (\lambda + hg) r^{h-1} C_2^{(8)} + (2ghr)^{-1} q_1 (s_2 (\Phi_\varphi(1, n_2, r) - \Phi_r(1, n_2, r))) + \\
 &+ (2ghr)^{-1} q_2 (P_\varphi(-1, n_2, r) (\lambda(h+1) - 2\mu)) - K\theta + \\
 &- (2ghr)^{-1} [q_3 \Phi_r(-1, n_2, r)] - (\lambda - g(h^2 - 2)) (g(h^2 - 1))^{-1} k_0, \\
 \sigma_\varphi &= (2ghr)^{-1} [-s_1 s_3 \Phi_r(1, n_2, r) - \Phi_\varphi(1, n_2, r) (4\mu g + \lambda^2 (1 - h^2))] + \quad (0.37) \\
 &+ (2ghr)^{-1} [-s_2 (\Phi_\varphi(-1, n_2, r) (\lambda(1+h) - 2\mu) + q_1 \Phi_r(-1, n_2, r))] + \\
 &+ \lambda (h^{-1} - 1) p_r(r) - g^{-1} (\mu (3kh + 2\lambda) h^{-1} p_\varphi(r)) + \\
 &- 2k_0^{(2)} (h^2 - 1)^{-1} - K\theta^{(2)} + s_1 r^{h-1} C_2^{(8)} - s_2 C_1^{(8)} r^{-(1+h)}, \\
 e_r^p &= 0.5 (h^{-1} - 1) p_r(r) - p_\varphi(r) (\mu (gh)^{-1} - \lambda (2g)^{-1}) + \\
 &+ (4gr)^{-1} [(2\mu - \lambda(h+1)) \Phi_\varphi(-1, n_2, r) - s_3 \Phi_r(1, n_2, r)] + \\
 &+ (4gr)^{-1} [s_2 \Phi_\varphi(1, n_2, r) - q_1 \Phi_r(-1, n_2, r)] \\
 &+ k_0 (\mu - g(h^2 - 1)) (2\mu g (1 - h^2))^{-1} + \\
 &+ 0.5hr^{h-1} C_2^{(8)} - 0.5hC_1^{(8)} r^{-(1+h)}.
 \end{aligned}$$

Теперь для определения остаточных напряжений остается по неоднократно описанному здесь алгоритму определить на последнем шаге по времени расчетов постоянные интегрирования C_1^8 и C_2^8 вместе со значением n_2 в момент остановки этой упругопластической границы и значениями C_1^1 , C_2^1 , C_1^2 и C_2^2 из (0.35), выполняя граничные условия и условия непрерывности u и σ_r при $r = n_2$.

Остается заметить, что приведенная схема деформирования является общей в том смысле, что в конкретных условиях некоторые из описанных стадий пластических течений могут отсутствовать. Так, например, в случае когда вал и муфта изготовлены из одного материала (бронзы), состояние полной пластичности отсутствует [9].

Заклучение. В заклочении приведем в качестве иллюстрации некоторые качественные результаты расчетов по полученным в настоящей статье решениям. Эти расчеты были проведены с использованием специально построенного для этих целей комплекса программ [13], основанного на использовании алгоритмических приемов данной публикации.

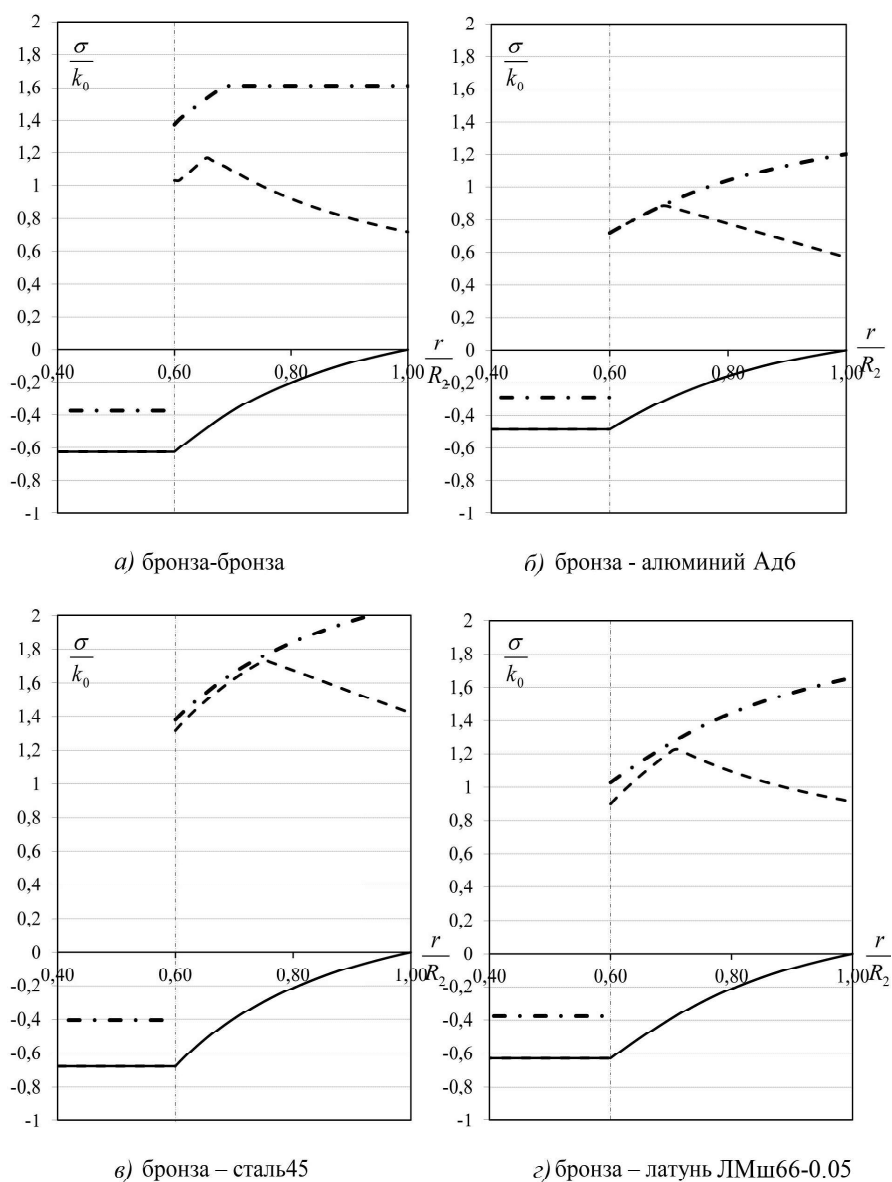


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений в цилиндрическом соединении, полученном в результате горячей посадки муфты на вал.

Как уже отмечалось, не все стадии пластического течения осуществляется в конкретных задачах. Полная пластичность возникает в материале муфты при достаточно

высокой температуре ее первоначального нагрева. В случае, когда начальная температура нагрева не достигает некоторого своего порогового значения, состояние полной пластичности отсутствует. Однако, при учете существенной зависимости предела текучести от температуры пластическое течение может возникнуть при достаточно умеренном нагреве муфты. Следовательно, не учитывать пластическое течение в металлических цилиндрических элементах сборки горячей посадкой, как это рекомендуется современными техническими условиями, совершенно непозволительно.

Некоторые качественные стороны процесса посадки иллюстрируют графики распределения остаточных напряжений. В них принято, что радиус вала 0,06 м., внешний радиус муфты 0,1 м., во всех четырех представленных случаях температура нагрева муфты одинакова и равна 280°, также принято, что во всех таких случаях материал вала одинаков (бронза БрАЭС9-4). Все различие заключается в том, что разными приняты материалы, из которых изготовлена муфта (они указаны в подписях под рисунками). Константы материалов, задающие их физико-механические свойства здесь приводить не станем (они не являются специфическими); марки металлов указаны на рис. 2. Важнее указать качественные особенности.

Если муфта изготовлена из бронзы той же марки, что и вал, то область пластического течения (рис. 2 а) окажется незначительной, менее $0.4(R_2 - R_1)$, а материал алюминиевой муфты в полном объеме переходит в итоге в пластическое состояние. Более того, в последнем случае состояние полной пластичности не исчезает даже при полном остывании материалов сборки. Это крайне качественное различие иллюстрирует рис. 2, где сплошной линией указывается распределение σ_r , пунктирной σ_φ , штрих-пунктирной σ_z , отнесенные к пределу текучести при комнатной температуре. Случай, когда до полного остывания материал проходит все описанные здесь стадии пластического течения, иллюстрируется на рис. 2 в и на рис. 2 г.

Натяг оказывается наибольшим, когда муфта выполнена из стали (рис. 2 в), наименьшим, когда из алюминия (рис. 2 б)

Авторы благодарны А.А. Буренину и Е.В. Мурашкину за оказанное внимание к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Bland D. R.* Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // *Journal of the mechanics and physics of solids*. Vol. 4. 1956. pp. 209–229.
- [2] *Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
- [3] *Паркус Г.* Неустоявшиеся температурные напряжения. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. стр. С. 252.10.
- [4] *Боли Б.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
- [5] *Шевченко Ю.Н.* Термопластичность при переменных нагружениях. Киев.: Наукова думка, 1970.
- [6] *Orcan Y., Gamer U.* Elastic-plastic deformation of centrally heated cylinder // *Acta Mechanica*. Vol. 90. Issue 1–4. 1991. pp. 61–80.
- [7] *M. Bengeri, W. Mack.* The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mechanica* Vol. 103. 1994. pp. 243–257.

[8] Kovacs A. Residual stresses in thermally loaded shrink fits // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. Vol. 40. №. 2. 1996. pp. 103-112.

[9] Буренин А.А., Дац Е.П., Ткачева А.В. К вопросу математического моделирования процесса горячей посадки цилиндрических металлоизделий // Сибирский журнал промышленной математики. Новосибирск, Издательство Института математики / Т. 17, №3 (59) С. 40 - 47.

[10] Дац Е.П., Ткачева А.В., Шпорт Р.В. Сборка конструкции «кольцо в кольцо» способом горячей посадки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, Серия: Механика предельного состояния №4(22) 2014 С. 204-213.

[11] Берникер Е.И. Посадки с натягом в машиностроении. Л.: Машиностроение, 1966. 168 с.

[12] Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // ДАН, 2000. Т. 375, № 6. С.767-769.

[13] Дац Е.П., Ткачева А.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617259 «Математическое моделирование температурных и деформационных процессов, сопровождающих технологию горячей посадки в сборке металлоконструкций» 3 июля 2015.

Дац Евгений Павлович,

ассистент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток

e-mail: dats@mail.dvo.ru

Петров Михаил Радиевич

кандидат технических наук, доцент Комсомольского - на - Амуре государственного технического университета, г. Комсомольск - на - Амуре

e-mail: mail@imim.ru

Ткачева Анастасия Валерьевна,

младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск - на - Амуре

e-mail: 4nansi4@mail.ru

E. P. Dats, M. R. Petrov, A. V. Tkacheva

PIECEWISE LINEAR PLASTIC POTENTIALS WITHIN THE FRAMEWORK OF THE THEORY OF THE THERMAL STRESSES CONCERNING TO SHRINK FIT.

Vladivostok State University of Economics and Service

Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS

Abstract. Piecewise linear plastic potentials within the framework of the theory of the thermal stresses concerning to shrink fit The boundary problem in the theory of the thermal stresses on shrink fit of cylinder shaped details is solved. The peculiarities of the task formulation and the methods for solution of this task using piecewise linear plastic potentials are considering. The numerical algorithms are proposed in case, when the temperature stresses, sequentially changing under variable yield point, could correspond to different planes and fins of an yield surface. It's mentioned, that such changes at configuration of the plastic flow are influencing considerably on forming of the resulting interference.

Keywords: elasticity, plasticity, shrink fit, thermal stresses, residual deformation, residual stresses

REFERENCES

- [1] *Bland D.R.* Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // Journal of the mechanics and physics of solids. Vol. 4. 1956. pp.– 209–229.
- [2] *Bykovtsev G.I.* Theory of plasticity. Dalnauka, Vladivostok, 1998.
- [3] *Parkus G.* Unsteady thermal stresses . Moscow : State publishing house of physical and mathematical literature, 1963 p.
- [4] *B. Boly, J.H. Weiner* Theory of thermal stresses. Moscow: Mir, 1964.
- [5] *Shevchenko Yu.N.* Thermoplasticity with variable loading . Naukova Dumka, Kiev, 1970.
- [6] *Orcan Y., Gamer U.* Elastic–plastic deformation of centrally heated cylinder // Acta Mechanica. Vol. 90. Issue 1–4. 1991. pp. 61–80.
- [7] *Burenin A. A., Dats E.P., Murashkin E.V.*, Formation of the residual stress field under local thermal actions // Mechanics of Solids, №2, 2014, pp. 124 - 131.
- [8] *Kovacs A.* Residual Stresses in thermally loaded shrink fits // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. Vol. 40. №. 2. 1996. pp. 103-112.
- [9] *Burenin A.A., Dats E.P., Tkacheva A.V.* On the modelling of the shrink fit technology // Siberian journal of industrial mathematics. Novosibirsk, Publishing house of the Institute of mathematics. T. 17, №3 (59), pp 40 - 47 .
- [10] *Dats E.P., Tkacheva A.V., Shport R.V.* The Assemblage of "Ring in Ring "constructions with the shrink fit method // Chuvash State Pedagogical University IY Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state, №4 (22), 2014, pp. 204-213.
- [11] *Berniker E.I.* Interference fit in the Mechanical Engineering . L.: Engineering, 1966. 168 pp.
- [12] *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Polonik M.V.* Possibility of repeating plastic flow under the general unloading of an elastic-plastic medium// DAN. 2000 T. 375, № 6. S.767-769.
- [13] *Dats E.P., Tkacheva A.V.* Certificate of the software state registration №2015617259 « Mathematical modeling of temperature and deformation processes accompanying a technology of a shrink fit in assembly of metal structures "July 3, 2015 .

Dats Evgeniy Pavlovich

Assistant, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok

Petrov Mikhail Radionovich

Assistant professor, Komsomolsk - on - Amur State Technical University, Komsomolsk - on - Amur

Tkacheva Anastasia Valerevna

Research Assistant, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur