



УДК 517.977

© 2024 г. **Г.В. Гренкин**, канд. физ.-мат. наук  
(Владивостокский государственный университет)

## УПРАВЛЕНИЕ НАГРЕВОМ ОБЛАСТИ В РАМКАХ МОДЕЛИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Рассмотрена задача управления сложным теплообменом в реальном времени: требуется нагреть тепловые источники до заданных значений средней температуры, используя только информацию о текущих значениях средней температуры источников. Для решения этой задачи предлагается алгоритм, изменяющий тепловую и радиационную энергию, сосредоточенную в каждом источнике, пропорционально разности между целевым и текущим значениями средней температуры в этом источнике. Показано, что, варьируя коэффициент пропорциональности, можно добиться разной скорости нагрева источников, не допуская их перегрева.

**Ключевые слова:** радиационный теплообмен, диффузионное приближение, обратная задача.

DOI: 10.22250/18142400\_2024\_79\_1\_121

### Введение

Моделирование сложного теплообмена проводится в рамках различных приближений уравнения переноса излучения. При этом расчет может расходиться с реальностью вследствие ошибок моделирования. В связи с этим можно поставить задачу управления сложным теплообменом в реальном времени, когда вновь поступающая информация о температурном поле используется для корректировки нагрева тепловых источников.

В работах [1, 2] исследованы обратные задачи для квазистационарных уравнений сложного теплообмена, состоящие в восстановлении неизвестных мощностей тепловых источников по заданной средней температуре в каждом из них. Установлено, что для любого изменения средней температуры источников во времени можно указать единственный способ изменения во времени их мощностей. Однако применение предложенного алгоритма требует длительных расчетов сразу для всего интервала времени, причем для

этого требуется знание начального распределения тепла в области теплообмена.

Статья [3] посвящена исследованию аналогичной задачи для стационарной модели сложного теплообмена. Предложен алгоритм, последовательно изменяющий тепловую и радиационную энергию, сосредоточенную в каждом источнике, пропорционально разности между целевым и текущим значениями средней температуры в этом источнике. Этот алгоритм будет использован в настоящей работе в нестационарном варианте. Будет поставлена задача нагревания тепловых источников до достижения заданных значений их средней температуры. Сходная задача оптимизации конечного температурного состояния рассмотрена в [4].

### Постановка задачи управления

Сложный теплообмен в области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  подчиняется следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^4 - \phi) = \sum_{i=1}^m q_i f_i, \quad (1)$$

$$-\alpha\Delta\phi + \kappa_a(\phi - \theta^4) = 0 \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$a\frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\frac{\partial \phi}{\partial n} + \gamma(\phi - \theta_b^4) = 0 \quad (3)$$

и начальным условием

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x). \quad (4)$$

Здесь  $\theta$  – поле нормализованной температуры,  $\phi$  – поле нормализованной интенсивности излучения, усредненной по всем направлениям. Положительные параметры  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa_a$  характеризуют радиационно-термические свойства среды, граничные функции  $\beta$ ,  $\gamma$  характеризуют отражающие свойства границы. Через  $\partial/\partial n$  обозначена производная в направлении внешней нормали.

Мощности источников тепла  $q_i(t)$  неизвестны. В [1, 2] для замыкания системы введено интегральное переопределение

$$\int_{\Omega} f_j(x)\theta(x, t)dx = r_j(t), \quad j=1, \dots, m. \quad (5)$$

Здесь  $f_j \geq 0$  – заданные функции, выражающие объемные плотности пространственно распределенных источников.

Таким образом, для любой заданной траектории  $r_j(t)$  существуют единственные мощности источников  $q_i(t)$ , удовлетворяющие системе (1) – (5).

Поставим задачу выбора чисел  $r_j(t)$ , зависящих от температуры –

таких, что будет обеспечен нагрев источников до целевых значений  $r_j^*$  без перегрева и с использованием при управлении лишь информации о текущих значениях величины  $\int_{\Omega} f_j(x)\theta(x,t)dx$ .

### Алгоритм

В [3] предложен итерационный метод решения обратной задачи для стационарных уравнений, использующий для управления нелинейной системой решение линейной обратной задачи. Алгоритм подбирает с помощью последовательных приближений значения интегрального переопределения для тепловой и радиационной энергии. На каждом шаге переопределение корректируется на величину разности между целевым и текущим значением средней температуры.

В динамическом варианте этот метод позволит замкнуть систему следующим образом: к системе (1) – (4) вместо уравнений (5) присоединим уравнения

$$\sum_{i=1}^m q_i(t)M_{ji} = \sum_{i=1}^m q_i(0)M_{ji} + \lambda \int_0^t \left( r_j^* - \int_{\Omega} f_j(x)\theta(x,\tau)dx \right) d\tau, \quad (6)$$

$$j=1, \dots, m.$$

Здесь  $M_{ji} = \int_{\Omega} f_j w_i dx$ , где  $w_i$  – решение краевой задачи

$$-a\Delta w_i = f_i, \quad a \frac{\partial w_i}{\partial n} + \beta w_i = 0.$$

Отметим, что величина  $\sum_{i=1}^m q_i(t)M_{ji} - \sum_{i=1}^m q_i(0)M_{ji}$  имеет смысл приращения интегрального переопределения для тепловой и радиационной энергии в  $j$ -м источнике.

У системы (1) – (4), (6) существует единственное решение, так как коэффициенты  $q_i(t)$ , входящие в уравнение (1), определяются с помощью каузального оператора, который вводится уравнением (6) и удовлетворяет условию Липшица.

### Вычислительные эксперименты

Для численного моделирования проведем дискретизацию: выделим на оси времени небольшие интервалы  $(t_k, t_{k+1})$  длины  $\Delta t$  и приблизим уравнения (6) к уравнениям

$$s_j(t_{k+1}) = s_j(t_k) + \lambda \Delta t \left( r_j^* - \int_{\Omega} f_j(x)\theta(x,t_{k+1})dx \right), \quad s_j(t_k) = \sum_{i=1}^m q_i(t_k)M_{ji}.$$

Для решения нестационарной системы (1) – (5) на каждом шаге дис-

кретизации применяем неявную схему Эйлера.

В качестве примера выберем следующие исходные данные для одномерной области (слоя) толщиной  $L = 50$ . Коэффициенты примерно соответствуют физическим параметрам воздуха:  $a = 0.92$ ,  $b = 18.7$ ,  $\kappa_a = 0.01$ ,  $\alpha = 3.3$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\theta_b = 0.4$ ,  $\theta_0 = 0.4$ . Определим три источника по формулам

$$f_1(x) = f_{10,20}(x), \quad f_2(x) = f_{30,40}(x), \quad f_3(x) = f_{45,50}(x),$$

где  $f_{l,r}(x) = 2(x-a)/(b-a)$  при  $x \in [l, (l+r)/2]$ ,  $f_{l,r}(x) = 2(b-x)/(b-a)$  при  $x \in [(l+r)/2, r]$  и  $f_{l,r}(x) = 0$  иначе. Начальные значения мощностей источников примем равными 0. Целевые значения средней температуры в источниках:  $r_1^* = 4$ ,  $r_2^* = 4$ ,  $r_3^* = 3$ . Сетка по пространственной переменной включает 51 узел, сетка по времени – 81 узел. Вычисления реализованы в пакете Octave методом конечных разностей [5].

На рис. 1 представлены графики функций  $r_j(t) = \int_{\Omega} f_j(x)\theta(x,t)dx$  и  $q_j(t)$  для  $\lambda = 1$ , на рис. 2 – для  $\lambda = 2$  и на рис. 3 – для  $\lambda = 0.5$ . Регулируя значение коэффициента  $\lambda$ , можно добиться разной скорости нагрева источников.

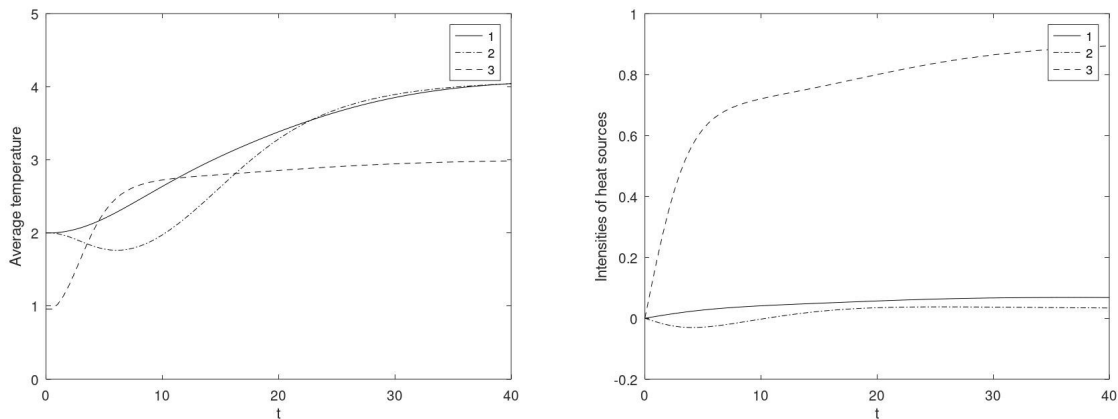


Рис. 1. Графики зависимости средней температуры источников и мощностей источников от времени при  $\lambda = 1$ .

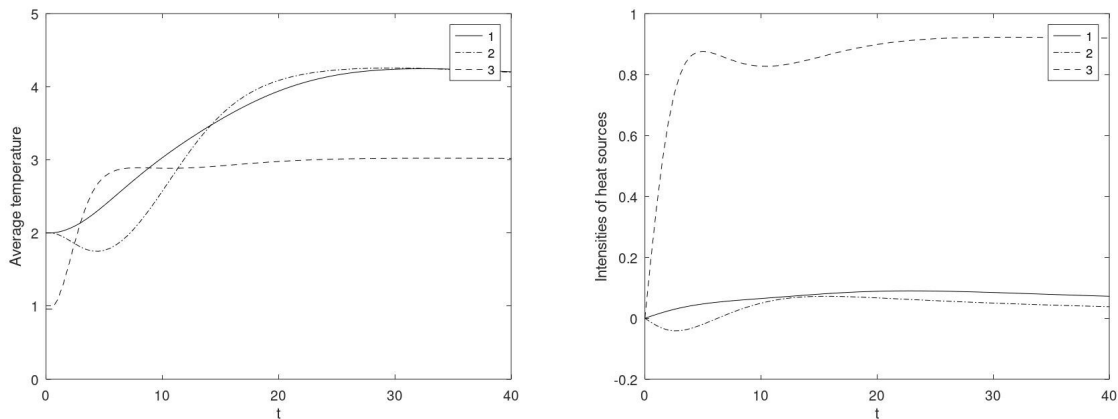


Рис. 2. Графики зависимости средней температуры источников и мощностей источников от времени при  $\lambda = 2$ .

## Заключение

Предложенный метод не требует знания начального распределения температурного поля, что позволяет организовать управление в реальном времени, основываясь лишь на информации о текущих значениях средней температуры каждого источника.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. 472. – P. 314–327.
2. *Chebotarev A., Mesenev P., Kovtanyuk A.* Inverse problem with unknown sources for a quasi-linear complex heat transfer model // 2023 Days on Diffraction (DD). – P. 31–35.
3. *Гренкин Г.В.* Единственность решения обратной задачи для модели сложного теплообмена // Сиб. электрон. матем. изв. – 2024. – Т. 21, № 1. – С. – 98–104.
4. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
5. <https://github.com/lapkin25/heat-inverse> (дата обращения: 31.01.2024).

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.А. Шеленком.*

*E-mail:*

*Гренкин Глеб Владимирович – [Gleb.Grenkin@vvsu.ru](mailto:Gleb.Grenkin@vvsu.ru).*