

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА  
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал  
№ 4(22)  
Октябрь – декабрь 2014 г.**

**Учредитель**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"  
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых  
должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание  
ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко

**Ответственные секретари:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский,  
Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов,  
С. И. Сенапов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов,  
А. И. Шапкин

**Международный совет:** Р. Ю. Амспзаде (Азербайджан), С. В. Вардапян (Армения),  
В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж (Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 62-16-19.

**Email:** predel21@mail.ru.

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева», 2014

Е. П. Дац, А. В. Ткачова, Р. В. Шпорт

## СБОРКА КОНСТРУКЦИИ "КОЛЬЦО В КОЛЬЦЕ" СПОСОБОМ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКИ

*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса*

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН*

**Аннотация.** В рамках теории температурных напряжений приводится решение последовательности одномерных краевых задач о сборке конструкции, состоящей из двух толстых колец, контактирующих по общей цилиндрической границе и изготовленных из одинакового упругопластического материала. Устанавливаются моменты и места зарождения и исчезновения пластических течений, закономерности продвижения упругопластических границ. Рассчитывается итоговый уровень остаточных напряжений, обеспечивающий натяг в сборке.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, температурные напряжения, остаточные деформации

УДК: 539.374+ 539.224

**Введение.** Теория температурных напряжений восходит к работам классиков механики деформирования, таких как Р. Хилл, В. Койтер, Ю.Н. Работнов. Одномерную задачу о формировании поля остаточных напряжений в длинной толстостенной трубе за счет стационарного нагрева боковых поверхностей рассмотрел Д. Бленд [1]. Применительно к задачам посадки подобные задачи рассмотрели Ю. Оркан [2] и А. Ковач[3]. В нашей стране ряд задач термопластичности был рассмотрен Ю.Н. Шевченко[4] и его учениками. Остаточные напряжения [1] оказываются следствием возникновения и остановки пластических течений при росте напряжений в упругопластических материалах из-за повышения уровня в градиенте температуры. При сборке посадкой развивающиеся пластические течения приводят к уменьшению итогового натяга по сравнению с рассчитанным по теории температурных напряжений. Но именно по последним теориям рассчитаны нормативные параметры отечественных технологических методик. Присутствие пластических течений при горячей посадке тесно связано с зависимостью предела текучести от температуры, ведь тело разогревается до температуры сравнимой с температурой плавления материала сборки.

Рассмотрим здесь задачу о температурных напряжениях в сборке из двух колец малой толщины, изготовленных из одного и того же упругопластического материала. Принимаемое

---

Поступила 11.11.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33064-мол\_а\_вед „Развитие моделей и методов механики необратимого деформирования для описания процессов формоизменения материалов с нелинейными теплофизическими и реологическими свойствами“) и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам на выполнение НИР (№ 2014/292).

положение об одинаково малой толщине элементов сборки позволяет считать, что материал колец находится в условиях плоского напряженного состояния. В таком случае задача оказывается одномерной.

**Исходные модельные зависимости.** Деформации в материале сборки  $d_{ij}$  полагаем малыми и складываемыми из упругих (обратимых)  $e_{ij}$  и пластических (необратимых)  $p_{ij}$ :

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1)$$

В зависимости (1) используется прямоугольная система декартовых координат  $x_i$ ,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений, запятая перед индексом означает дифференцирование по данной пространственной координате так, что  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .

Напряжения в деформируемом материале задаются уровнем и распределением в нем температуры  $T$  и упругих деформаций в соответствии с законом Дюамеля – Неймана [5]:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} - m(T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ламе,  $m = 3K\alpha$  и  $\alpha$  коэффициент линейного расширения,  $K = \lambda + 2/3\mu$  – упругий модуль объёмного сжатия,  $T, T_0$  – текущая и начальная температуры. Пластическое течение возможно только в условиях достижения напряженными состояниями в деформируемых телах поверхности нагружения  $f(\sigma_{ij}) = 0$  в пространстве напряжений. В принимаемых условиях принципа максимума Мизеса данная поверхность оказывается пластическим потенциалом и следует ассоциированный закон пластического течения

$$dp_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\lambda > 0 \quad (3)$$

В качестве конкретной поверхности нагружения будем использовать условие пластичности Треска [6].

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k \quad (4)$$

В (4)  $\sigma_i$  – главные значения тензора напряжения,  $k(r, t)$  – предел текучести, в общем случае зависящий от температуры. В качестве закона изменения предела текучести на основе экспериментальных данных выбрана квадратичная зависимость:

$$k(r, t) = k_1 \left( 1 - (T_p - T_1)^{-2} (T_p - T(r, t))^2 \right) \quad (5)$$

где  $k_1$  – предел текучести при температуре  $T_1$ ,  $T_p$  – температура плавления материала.

**Постановка задачи. Обратимое деформирование.** В начальный момент времени  $t = 0$  внутреннее кольцо, имеющее внутренний радиус  $R_0$  и внешней  $R_1$ , находится при комнатной температуре  $T_1$ . Внешнее кольцо, разогретое до температуры  $T_2$ , имеет внутренний радиус  $R_1$  и внешний  $R_2$ . Начальные перемещения отсутствуют. Уравнение равновесия, условие совместности деформации и соотношения между компонентами деформаций и перемещений колец в условиях цилиндрической симметрии примут вид:

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0 \quad (6)$$

$$d_{\varphi\varphi,r} + r^{-1}(d_{\varphi\varphi} - d_{rr}) = 0 \quad (7)$$

$$d_{rr} = u_{rr,r} \quad d_{\varphi\varphi} = r^{-1}u_{rr} \quad (8)$$

Воспользовавшись зависимости (2) для плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)e_{rr} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{zz}) - m\Delta \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)e_{\varphi\varphi} + \lambda(e_{rr} + e_{zz}) - m\Delta \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - m\Delta = 0\end{aligned}\quad (9)$$

получим уравнение для определения радиальной компоненты напряжений в начальный момент времени

$$(r\sigma_{rr,r})_r + 2\sigma_{rr,r} = 0,$$

решая которое, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_1 - r^{-2}c_2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_1 + r^{-2}c_2\end{aligned}\quad (10)$$

Поскольку до момента посадки кольца не испытывают внешнего воздействия, из (10) следует  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ , т.е. начальные напряжения колец при любой постоянной начальной температуре отсутствуют. Из (3–4) с учетом зависимостей (5) можно определить внутренний радиус горячего кольца перед нагревом:

$$\begin{aligned}\rho &= R_1(1 - ms^{-1}(T_2 - T_1)) \\ s &= (3\lambda + 2\mu)\end{aligned}\quad (11)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния колец после момента посадки необходимо рассчитать поле температур, возникающее при теплообмене. Процесс распространения тепла в материале колец описывается известным уравнением теплопроводности [7]

$$T_{,t}^{(v)} = a(rT_{,r}^{(v)})_r \quad (12)$$

Индекс  $v$  обозначает номер кольца (1 – внутреннее, 2 – внешнее). Пренебрегая теплоотдачей с поверхностей, и, используя условия теплообмена между кольцами, найдем распределение температурного поля, применив любой из известных численных методов. Граничные условия для численного решения уравнения (12) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}T_{,r}^{(1)}(R_0, t) &= 0, \quad T_{,r}^{(2)}(R_2, t) = 0 \\ T_{,r}^{(1)}(R_1, t) &= T_{,r}^{(2)}(R_1, t) \\ T^{(1)}(R_1, t) &= T^{(2)}(R_1, t)\end{aligned}\quad (13)$$

Записав соотношения между компонентами напряжений и перемещений согласно зависимостям (8) и (9) в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(v)} &= 4\mu gw^{-1}u_{r,r}^{(v)} + 2\mu\lambda(wr)^{-1}u_r^{(v)} - 2\mu tw^{-1}\Delta_v \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} &= 4\mu gw^{-1}u_r^{(v)} + 2\mu\lambda(wr)^{-1}u_{r,r}^{(v)} - 2\mu tw^{-1}\Delta_v \\ g &= (\lambda + \mu) \quad w = (\lambda + 2\mu) \\ \Delta_v &= T^{(v)} - T_v\end{aligned}\quad (14)$$

и, подставив (14) в (6), получим дифференциальное уравнение для определения единственной отличной от нуля компоненты перемещений

$$u_{r,rr}^{(v)} + (r^{-1}u_r^{(v)})_r = 2g^{-1}m\Delta_v, \quad (15)$$

решением которого является функция:

$$\begin{aligned}u_r^{(v)}(r, t) &= 2g^{-1}rF_v(r_v, r, t) + rc_1^{(v)}(t) + r^{-1}c_2^{(v)}(t) \\ F_v(r_v, r, t) &= mr^{-2} \int_{r_v}^r \Delta_v(\rho, t) d\rho \\ r_v &= R_{v-1},\end{aligned}\quad (16)$$

тогда зависимости для напряжений согласно (14) и (15) примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(v)}(r, t) &= -\mu \left( g^{-1} F_v(r_v, r, t) - 2sw^{-1}c_1^{(v)}(t) + 2r^{-2}c_2^{(v)}(t) \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}(r, t) &= \mu \left( g^{-1} F_v(r_v, r, t) - mg^{-1}\Delta_v(r, t) + 2sw^{-1}c_1^{(v)}(t) + 2r^{-2}c_2^{(v)}(t) \right)\end{aligned}\quad (17)$$

Граничные условия на свободных краях колец

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R_0, t) = 0 \quad \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, t) = 0 \quad (18)$$

и условия непрерывности напряжений и перемещений в зоне контакта

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R_1, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(R_1, t) \quad u_r^{(1)}(R_1, t) = u_r^{(2)}(R_1, t) \quad (19)$$

позволят определить из (18–19) неизвестные константы интегрирования (функции времени), которые здесь и далее не приводятся из-за громоздкости их выражений.

**Пластическое течение.** Дальнейшее изменение напряженно-деформированного состояния колец связано с их выходом на поверхность нагружения (4). Развитие зоны пластического течения начинается в некоторый момент времени  $t_1$  на границе контакта внешнего кольца и определяется условием:

$$\sigma_{rr}^{(v)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} = -2k_2 \quad (20)$$

При  $t_1 > 0$  во внешнем кольце появляется область необратимого деформирования с упруго-пластической границей  $a_2$ . Соотношения для напряжений в области  $R_1 \leq r < a_2(t)$  после интегрирования уравнения равновесия (6) с учетом условия (20) примут вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(r, t) &= 2 \int_{r_2}^r \rho^{-1} k_2(\rho, t) d\rho + c_3^{(2)}(t) \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t) &= 2 \int_{r_2}^r \rho^{-1} k_2(\rho, t) d\rho + 2k_2(r, t) + c_3^{(2)}(t)\end{aligned}\quad (21)$$

Символом "тильда" над компонентами напряжений и перемещений в дальнейшем обозначены выражения для напряжений и перемещений, справедливые в области пластического течения. Для определения поля перемещений в области пластического течения внешней пластинки воспользуемся ассоциированным законом течения (3), согласно которому в случае, когда поверхность  $f$  определяется равенством (20), будут иметь место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}dp_{rr}^{(2)} + dp_{\varphi\varphi}^{(2)} &= 0 \\ dp_{zz} &= 0\end{aligned}\quad (22)$$

Следствием (22) является уравнение

$$u_{r,r}^{(2)} + r^{-1}u_r^{(2)} = e_{rr}^{(2)} + e_{\varphi\varphi}^{(2)} \quad (23)$$

Выразив упругие деформации  $e_{ij}$  через напряжения (21) согласно соотношениям (9):

$$\begin{aligned}e_{rr}^{(v)} &= (\mu s)^{-1}(\mu m \Delta_v + g \sigma_{rr}^{(v)} - 0.5 \lambda \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}) \\ e_{\varphi\varphi}^{(v)} &= (\mu s)^{-1}(\mu m \Delta_v + g \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)} - 0.5 \lambda \sigma_{rr}^{(v)}) \\ e_{zz}^{(v)} &= w^{-1}(m \Delta_2(r, t) - \lambda(e_{rr}^{(v)} + e_{\varphi\varphi}^{(v)}))\end{aligned}\quad (24)$$

, и, подставив их в (23), запишем уравнение для определения радиальной компоненты перемещений в области пластического течения  $R_1 \leq r < a_2(t)$ :

$$(r \tilde{u}_r^{(2)})_{,r} - 2ms^{-1}r \Delta_2 - 0.5(\mu s)^{-1}wr(\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}) = 0 \quad (25)$$

Интегрируя последнее, получим:

$$\tilde{u}_r^{(2)}(r, t) = 2s^{-1}rF_2(R_1, r, t) + 0.5(\mu s)^{-1}wr\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(r, t) + r^{-1}c_4^{(2)}(t) \quad (26)$$

Величину пластической деформации  $p_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t)$  найдем как разность полной и упругой деформации ( $r^{-1}\tilde{u}_{rr}^{(2)} - \tilde{e}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t)$ ):

$$p_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, t) = -p_{rr}^{(2)}(r, t) = s^{-1}(2F_2(R_1, r, t) - 2\mu^{-1}gk_2(r, t) - m\Delta_2(r, t) + sr^{-2}c_4^{(2)}(t)) \quad (27)$$

Соотношения для напряжений и перемещений в областях обратимого деформирования в каждом из колец (16), (17) (при  $r_2 = a_2$ ) по-прежнему справедливы с точностью до новых констант интегрирования, которые вместе с константами в области пластического течения внешнего кольца (21), (26) требуют определения. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений, являющихся краевыми условиями (18) – (19) и условиями непрерывности радиальных напряжений и перемещений на упругопластической границе  $a_2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}(R_0, t) = 0 & \quad \sigma_{rr}^{(1)}(R_1, t) = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(R_1, t) & \quad \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(a_2, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(a_2, t) \\ \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, t) = 0 & \quad u_r^{(1)}(R_1, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(R_1, t) & \quad \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t) \end{aligned} \quad (28)$$

Значение  $a_2$  найдем из условия непрерывности на ней окружных напряжений ( $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}(a_2, t) = \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(a_2, t)$ ):

$$\mu mg^{-1}\Delta_2(a_2, t) - 4\mu a_2^{-2}c_2^{(2)}(t) + 2k_2(a_2, t) = 0 \quad (29)$$

Численно решая уравнение (29) для различных моментов времени, определим закон движения упругопластической границы  $a_2(t)$  во внешнем кольце.

По мере выравнивания уровня температур колец на внутреннем радиусе внутреннего кольца в некоторый момент времени  $t_2$  выполняется условие:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -2k_1, \quad (30)$$

которое означает начало процесса пластического течения во внутреннем кольце. Таким образом, при  $t > t_2$  в окрестности внутреннего радиуса каждого кольца имеются области необратимого ( $R_{v-1} < r < a_v(t)$ ) и обратимого ( $a_v(t) < r < R_v$ ) деформирования. Напряжения в области пластического течения найдем, проинтегрировав уравнение равновесия (6) с учетом условия (30):

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, t) &= -2k_1(r, t) \\ \sigma_{rr}^{(1)}(r, t) &= -2r^{-1} \int_{R_0}^r k_1(\rho, t) d\rho + r^{-1}c_3^{(1)}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

Из ассоциированного закона течения (3) для поверхности (30) можно получить следующие соотношения для приращений пластической деформации:

$$\begin{aligned} dp_{zz}^{(1)} + dp_{\varphi\varphi}^{(1)} &= 0 \\ dp_{rr}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

следствием которых является равенство

$$du_{r,r}^{(1)} = e_{rr}^{(1)} \quad (33)$$

Подставив в (33) деформацию  $e_{rr}^{(1)}$  из (24) при условии, что напряжения теперь определяются по формулам (30), найдем уравнение для определения радиальной компоненты перемещений:

$$\tilde{u}_{r,r}^{(1)} = (\mu s)^{-1} \left( \mu m \Delta_1 - 2gr^{-1} \int_{R_0}^r k_1 dr + gr^{-1}c_{13} + \lambda k_1 \right), \quad (34)$$

интегрируя которое, получим:

$$u_r^{(1)}(r, t) = (\mu s)^{-1} \left( \mu \int_{R_0}^r \Delta_1(\rho, t) d\rho + (\lambda - 2g \ln(r)) \int_{R_0}^r k_1(\rho, t) d\rho + \right. \\ \left. + 2g \int_{R_0}^r k_1(\rho, t) \ln(\rho) d\rho + g \ln(r) c_3^{(1)}(t) \right) + c_4^{(1)}(t) \quad (35)$$

По найденным напряжениям (31) и перемещениям (35) найдем пластическую деформацию  $p_{\varphi\varphi}^{(1)}$ :

$$p_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, t) = r^{-1} u_r^{(1)}(r, t) - e_{rr}^{(1)}(r, t) = r^{-1} c_4^{(1)}(t) - m s^{-1} \Delta_1(r, t) + \\ + 2g(rms)^{-1} \left( \int_{R_0}^r \ln(\rho) k_1(\rho, t) d\rho + 0.5g^{-1} m \mu \int_{R_0}^r \Delta_1(\rho) d\rho + 2gr k_1(r, t) + \right. \\ \left. + 0.5(\ln(r) + g^{-1}\lambda) c_3^{(1)}(t) - \ln(r) \int_{R_0}^r k_1(\rho) d\rho \right) \quad (36)$$

Соотношения, определяющие напряженно-деформированное состояние для остальных областей остаются справедливыми, если заменить пределы интегрирования  $r_1 = a_1$ ,  $r_2 = a_2$  и запово определить константы  $c_i^{(v)}(t)$ , которые, как и прежде, паходятся из условий непрерывности напряжений и перемещений на упругопластических границах  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , в зоне контакта (19) и краевых условий (18)

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(R_0, t) = 0 \quad \sigma_{rr}^{(1)}(R_1, t) = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(R_1, t) \quad \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(a_2, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(a_2, t) \\ \tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(a_1, t) = \sigma_{rr}^{(1)}(a_1, t) \quad \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, t) = 0 \quad u_r^{(1)}(R_1, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(R_1, t) \\ \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t) = \tilde{u}_r^{(2)}(a_2, t) \quad \tilde{u}_r^{(1)}(a_1, t) = \tilde{u}_r^{(1)}(a_1, t) \end{aligned} \quad (37)$$

Для определения положения упруго-пластических границ следует решить систему уравнений непрерывности напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}$ , добавив к (29) условие  $(\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(a_1, t) = -2k_1(a_1, t))$ :

$$2w^{-1} \mu s c_1^{(1)}(t) + 2\mu a_1^{-2} c_2^{(1)}(t) - g^{-1} \mu m \Delta_1(a_1, t) + 2k_1(a_1, t) = 0 \quad (38)$$

Области необратимого деформирования и пластические деформации продолжают рост до момента времени  $t_3$ , при котором температура в обоих кольцах станет одинаковой:

$$T^{(v)}(r, t) = T_k \quad (39)$$

**Остывание.** Пусть, начиная с некоторого момента времени  $t_k$  происходит процесс остывания колец. Уровень  $T_k$  уменьшается до значения комнатной температуры  $T_1$ . Так как материал колец предполагается одинаковым, равномерное уменьшение температурного поля не приведет к изменению поля температурных напряжений, однако, за счет увеличения предела текучести, условия пластичности (20), (30) перестанут выполняться, т.е. произойдет разгрузка материала в областях с накопленными необратимыми деформациями. Необратимые деформации  $\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(v)}$  рассчитываются по формулам (27), (36) при подстановке в них максимального значения  $T_k$ . Символ  $\hat{\phantom{x}}$  обозначает область с накопленными деформациями. Для расчета уровня напряжений в области  $R_0 < r < a_1$  во внутреннем кольце воспользуемся условием совместности (7), которое, учитывая разложение деформаций  $\hat{d}_{rr}^{(1)} = \hat{e}_{rr}^{(1)}, \hat{d}_{\varphi\varphi}^{(1)} = \hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)} + \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}$ , представим в виде:

$$\hat{e}_{\varphi\varphi, r}^{(1)} + r^{-1}(\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)} - \hat{e}_{rr}^{(1)}) = -(\hat{p}_{\varphi\varphi, r}^{(1)} + r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}) \quad (40)$$

Воспользовавшись соотношениями (24), (6), из (40) получим дифференциальное уравнение для определения радиальной компоненты напряжений:

$$(r\hat{\sigma}_{rr, r}^{(1)} + \hat{\sigma}_{rr}^{(1)})_{,r} = -\mu g^{-1} s(\hat{p}_{\varphi\varphi, r}^{(1)} + r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}) \quad (41)$$

решая которое, найдем  $\hat{\sigma}_{rr}^{(1)}$ :

$$\hat{\sigma}_{rr}^{(1)}(r) = -0.5\mu g^{-1} s \left( r^{-2} \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho) \rho d\rho + \int_{R_0}^r \rho^{-1} \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho) d\rho \right) + \hat{c}_5^{(1)} - r^{-2} \hat{c}_6^{(1)} \quad (42)$$

Используя (42), из уравнения равновесия найдем  $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(1)}$ :

$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(1)}(r) = -0.5\mu g^{-1}s \left( 2\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(r) - r^{-2} \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho d\rho + \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho^{-1}d\rho \right) + \hat{c}_5^{(1)} + r^{-2}\hat{c}_6^{(1)} \quad (43)$$

Перемещение в области  $R_0 < r < a_1$  определим через деформацию  $\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)}$  (24) и напряжения (42), (43):

$$\hat{u}_r^{(1)}(r, T_k) = r\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(1)} = (4g)^{-1} \left( sr^{-1} \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho d\rho - wr \int_{R_0}^r \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(1)}(\rho)\rho^{-1}d\rho \right) + 0.5(\mu s)^{-1}(2\mu mr(T_k - T_1) + wr\hat{c}_5^{(1)} + sr^{-1}\hat{c}_6^{(1)}) \quad (44)$$

Условие совместности для области с необратимыми деформациями  $R_1 < r < a_2$  внешнего кольца примет вид:

$$\hat{e}_{\varphi\varphi,r}^{(2)} + r^{-1}(\hat{e}_{\varphi\varphi}^{(2)} - \hat{e}_{rr}^{(2)}) = -(\hat{p}_{\varphi\varphi,r}^{(2)} + 2r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}) \quad (45)$$

Из (45) следует уравнение для определения напряжения  $\hat{\sigma}_{rr}^{(2)}$ :

$$(r\hat{\sigma}_{rr,r}^{(2)} + \hat{\sigma}_{rr}^{(2)})_r = -\mu g^{-1}s(\hat{p}_{\varphi\varphi,r}^{(2)} + 2r^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}), \quad (46)$$

проинтегрировав которое, получим:

$$\hat{\sigma}_{rr}^{(2)}(r) = -\mu g^{-1}s \int_{R_1}^r \rho^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho)d\rho + \hat{c}_5^{(2)} - r^{-2}\hat{c}_6^{(2)} \quad (47)$$

Напряжения  $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}$  и перемещения  $\hat{u}_r^{(2)}$  найдем по аналогии с расчетами для внутреннего кольца:

$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r) = -\mu g^{-1}s \left( \int_{R_1}^r \rho^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho)d\rho + \hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(r) \right) + \hat{c}_5^{(2)} - r^{-2}\hat{c}_6^{(2)} \quad (48)$$

$$\hat{u}_r^{(2)}(r, T_k) = -0.5g^{-1}wr \int_{R_1}^r \rho^{-1}\hat{p}_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho)d\rho + 0.5(\mu s)^{-1}(2\mu mr(T_k - T_2) + wr\hat{c}_5^{(2)} + sr^{-1}\hat{c}_6^{(2)}) \quad (49)$$

Напряжения и перемещения в областях  $a_v < r < R_v$  в условиях отсутствия температурного градиента ( $\Delta_r(r, T_k) = 0$ ) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(v)}(r) &= c_1^{(v)} - r^{-2}c_2^{(v)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(v)}(r) &= c_1^{(v)} + r^{-2}c_2^{(v)} \\ u_r^{(v)}(r, T_k) &= 0.5(\mu s)^{-1}(2\mu mr(T_k - T_v) + wrc_1^{(v)} + sr^{-1}c_2^{(v)}) \end{aligned} \quad (50)$$

Новые константы интегрирования можно найти из системы (37) заменив, соответствующие величины для каждой области новыми соотношениями, вычисленными при остывании. Заметим, что константы не зависят от уровня текущей температуры колец, поэтому поля напряжений при равномерном температурном распределении не изменяются. Перемещения при полном остывании вычисляются, если положить  $T_k = T_1$ .

Остановка пластического течения происходит, когда температура выравнивается по всему кольцу, в это время происходит полная разгрузка. В работе [8], где исследовался, локальный нагрев пластины, разгрузка области пластического деформирования, происходила также мгновенно. Постепенное торможение пластического течения в упругопластичном материале описано в работах [9-11].

Распределения напряжений и необратимой деформации  $p_\varphi$ , приведены на рис. 1 – 3. Напряжения  $\sigma_\varphi$  (рис. 1) в области необратимого деформирования ниже, чем напряжения  $\sigma_\varphi$ , рассчитанные по соотношениям (16), выведенным для упругого деформирования. Следовательно, учет зарождения и развития пластического течения уменьшает уровень остаточных



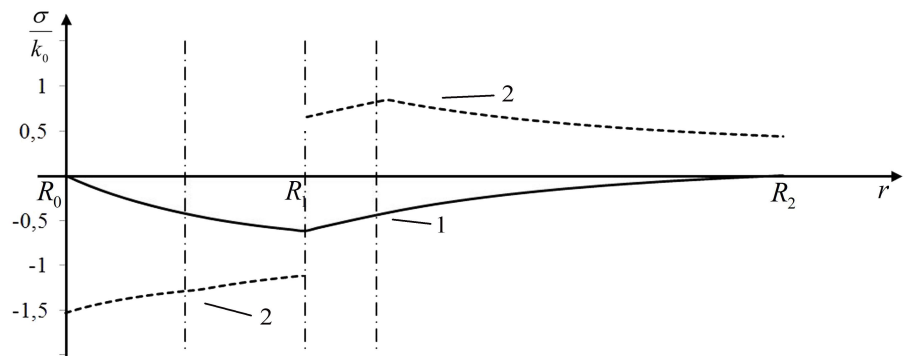


Рис. 1. Распределение остаточных напряжений: 1 –  $\sigma_r$ , 2 –  $\sigma_\varphi$

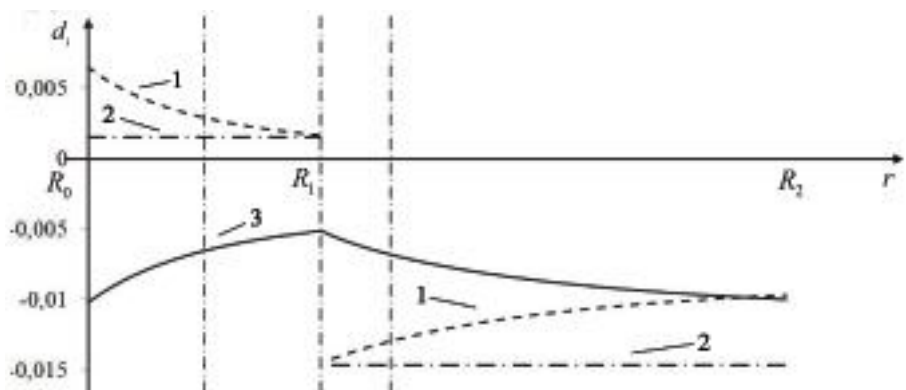


Рис. 2. Распределение остаточных деформаций: 1 –  $d_r$ , 2 –  $d_z$ , 3 –  $d_\varphi$ .

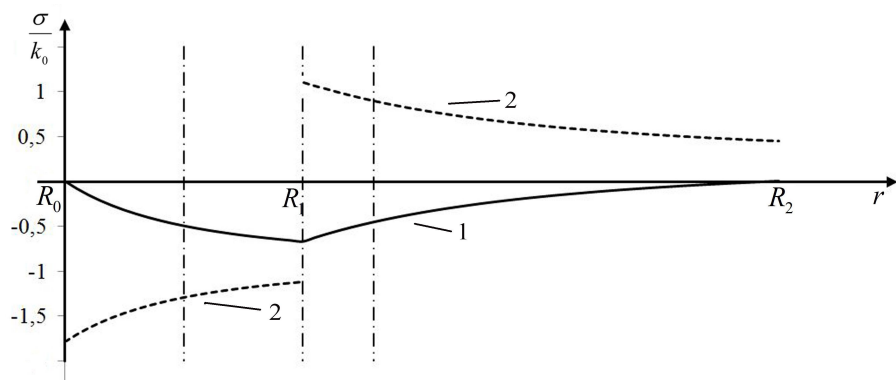


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений, найденных по закону Дюамеля - Неймана : 1 –  $\sigma_r$ , 2 –  $\sigma_\varphi$

напряжений, при этом практически не влияет на радиальные напряжения. Сами же необратимые деформации достигают наибольшего значения в области зарождения пластического течения и уменьшаются по мере продвижения упругопластической границы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Bland D. R.* Elastoplastic Thick-Walled Tubes of Work-Hardening Material Subject to Internal and External Pressures and to Temperature Gradients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 4. 1956. pp. 209–229.
- [2] *Orcan Y., Gamer U.* Elastic–Plastic deformation of centrally heated cylinder. *Acta Mechanica*. Vol. 90. Issue 1–4. 1991. pp. 61–80.
- [3] *Kovacs A.* Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits. *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* Vol. 40. №. 2. 1996. pp. 103–112.
- [4] *Шевченко Ю.Н.* Термопластичность при переменных нагрузениях. Киев.: Наукова думка, 1970.
- [5] *Боли Б.* Теория температурных напряжений // Б. Боли, Дж. Уэйпер. М.: Мир, 1964.
- [6] *Быковцев Г. И.* Теория пластичности // Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
- [7] *Лыков А.В.* Теория теплопроводности // А.В. Лыков. М: Высшая школа, 1967.
- [8] *Буренин А. А.* Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // А.А. Буренин, Е.П. Дац, Е.П. Мурашкин, *Механика твердого тела* №2 2014, стр. 124–131.
- [9] *Ковтанюк Л. В.* О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // *ДАН*. 2005. Т. 400. № 6. С. 764–767.
- [10] *Буренин А. А.* Большие необратимые деформации и упругое последствие // А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк. Владивосток: Дальнаука, 2013.
- [11] *Буренин А. А., Ковтанюк Л.В.* Развитие и торможение течения упруговязкопластической среды в цилиндрической трубе // *ПММ*.– 2013. -Т. 77. №. 5. С. 788–798.

*Дац Евгений Павлович,*

ассистент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток

e-mail: dats@mail.dvo.ru

*Ткачева Анастасия Валерьевна,*

младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск - на - Амуре

e-mail: 4nansi4@mail.ru

*Шпорт Роман Вячеславович,*

кандидат технических наук, соискатель, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск - на - Амуре

e-mail: mail@imim.ru

*E. P. Dats, A. V. Tkacheva, R. V. Shport*

## THE ASSEMBLAGE OF "RING IN RING" CONSTRUCTIONS WITH SHRINK FIT METHOD

*Vladivostok State University of Economics and Service*

*Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS*

**Abstract.** Within the framework of thermal stresses the solution is given on sequence of one-dimensional boundary problems on fold construction of two thin rings consisting of the same elastic-plastic material and contacting through shared cylindrical bound. The moments and locations of the formation or disappearance of plastic flows and also mechanisms of progression elastic-plastic bounds are determining. The final level of residual stresses, which provide final tightness, is estimated.

**Keywords:** elasticity, plasticity, shrink fit, thermal stresses, residual deformation, residual stresses

### REFERENCES

- [1] *Bland D. R.* Elastoplastic Thick-Walled Tubes of Work-Hardening Material Subject to Internal and External Pressures and to Temperature Gradients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 4. 1956. pp.– 209–229.
- [2] *Orcan Y., Gomer U.* Elastic–Plastic deformation of centrally heated cylinder. *Acta Mechanica*. Vol. 90. Issue 1–4. 1991. pp. 61–80.
- [3] *Kovacs A.* Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits. *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* Vol. 40. №. 2. 1996. pp. 103–112.
- [4] *Shevchenko Yu. N.* Thermoplasticity under Variable Loads, *Naukova Dumka, Kiev, 1970*
- [5] *B. Boly, J. H. Weiner* Theory of Thermal Stresses, Wiley, New York, 1960; Mir, Moscow, 1964
- [6] *Bykovtsev G. I.* Theory of Plasticity, Dalnauka, Vladivostok, 1998
- [7] *Lykov A. V.* The theory of heat conduction AV Lykov. M: Higher School, 1967.
- [8] *Burenin A. A.* Formation of residual strain field in a local thermal effects // AA Burenin, E.P. Dats, E.V. Murashkin, *Mechanics of Solids №2 2014*, pp. 124 - 131.
- [9] *Kovtanyuk L. V.* About bursting elastic viscous plastic material through a rigid circular cylindrical matrix // DAN. 2005. Vol 400. № 6. S. 764–767.
- [10] *Burenin A. A.* Large irreversible deformation and springback // AA Burenin, LV Kovtanyuk. Vladivostok: Dal'nauka 2013.
- [11] *Burenin A. A., Kovtanyuk L. V.* Development and braking currents elastoviscoplastic environment in a cylindrical tube // *J. Appl.* 2013. T. 77. №. 5, pp 788–798.

*Dats Evgeniy Pavlovich*

*Assistant, Vladivostok State University of Economics and Service, Vladivostok*

*Tkacheva Anastasia Valerevna*

*Research Assistant, Institute of Machine Science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur*

*Shport Roman Vyacheslavovich*

*Applicant, Candidate of Engineering Sciences, Institute of Machine Science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur*

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Баженов В. Г., Дюкина Н. С.</i> Численное решение трехмерных задач сейсмостойкости заглубленных сооружений.....	3
<i>Кукуджанов К. В., Коломиец А. В., Левитин А. Л.</i> Процессы деформирования и разрушения стохастически неоднородных упруговязкопластических материалов с дефектами при электродинамическом и термомеханическом нагружении .....	11
<i>Матвеев К. А., Моховнев Д. В., Немировский Ю. В.</i> Предельное упругое состояния сжимаемых кольцевых пластин при различных структурах армирования .....	22
<i>Васильев А. Н.<sup>1</sup>, Кузнецов Е. Б.<sup>2</sup>, Леонов С. С.<sup>2</sup></i> Идентификация параметров модели разрушения для анизотропных конструкций .....	32
<i>Пузино Ю. А.</i> Определение параметров модели при горячей деформации стали AISI304 по результатам испытаний на сжатие .....	46
<i>Серёгин С. В.</i> Изгибно-крутильные колебания бисимметричного тонкостенного стержня, как системы связанных пластин .....	53
<i>Никитин А. В., Миронов Б. Г.</i> Предельное состояние многослойной анизотропно-неоднородной толстостенной трубы .....	57
<i>Шашкин А. И., Переяславская И. И.</i> Применение метода быстрых разложений для нахождения напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра с учетом силы тяжести.....	64
<i>Башкатов А. А., Теличко В. Г., Трещев А. А.</i> Моделирование напряженно-деформированного состояния конструкций из железобетона и полимербетона с учетом влияния агрессивной среды .....	76
<i>Бутенко А. Э., Бугрова А. Д., Аксенов С. А., Бобер С. А.</i> Термоупругий анализ комплекса Atmospheric Chemistry Suite орбитального зонда Trace Gas Orbiter миссии ExoMars .....	86
<i>Абруков Д. А.</i> Изгиб полуполосы со свободными продольными краями, на торце которой заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Точное решение краевой задачи.....	91
<i>Гоцев Д. В., Бунтов А. Е.</i> Устойчивость монолитной крепи подземного нефтехранилища сферической формы с учетом начальной пористости материала .....	105
<i>Минаева Н. В., Шашкин А. И.</i> Анализ и исследование проблемы существования квазистатического процесса .....	114

<i>Ахундова П. Э.</i> Предельно-равновесное состояние втулки контактной пары при наличии трещины .....	120
<i>Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.</i> Вязкопластическое течение в плоском слое при учете разогрева за счет деформирования и трения на границе .....	127
<i>Белых С. В., Бормотин К. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н.</i> О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами .....	134
<i>Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю.</i> Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области .....	147
<i>Казбеков Б. Б.</i> Поперечный изгиб перфорированной пластины, ослабленной прямолинейными трещинами .....	156
<i>Чичурин А. В., Швычкина Е. Н.</i> Об интегрируемости систем третьего порядка, эквивалентных уравнению Швази с шестью неподвижными полюсами ....	164
<i>Пилягин А. В.</i> Повышение достоверности определения модуля деформации грунтов по данным прессиометрических испытаний .....	174
<i>Никитин А. В., Коваленко М. Д.</i> Полуполоса, заземлённая по продольным сторонам. Точное аналитическое решение .....	177
<i>Орлов В. Н., Иванов С. А.</i> Приближенное решение в области аналитичности одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка .....	185
<i>Семенова И. А.</i> Примеры аналитических решений обратной симметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе .....	194
<i>Дац Е. П., Ткачева А. В., Шпорт Р. В.</i> Сборка конструкции "кольцо в кольце" способом горячей посадки .....	204
<i>Миронов Б. Г.</i> О кручении стержней из неоднородного анизотропного идеально-пластического материала .....	214
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	218
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	221
СОДЕРЖАНИЕ .....	223

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2014. № 4 (22)**

**Отв. за выпуск:** А. В. Балашникова

**Технические редакторы:** Л. Н. Улюкова, Л. А. Судленикова, П. А. Шалимова

**Компьютерная верстка:** А. В. Балашникова

**Макет:** А. В. Балашникова

---

Подписано в печать 26.12.2014 г. Выход в свет 30.12.2014.  
Формат 70х100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2ε. Усл. печ. л. 22,88.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

---

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет  
им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38