



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

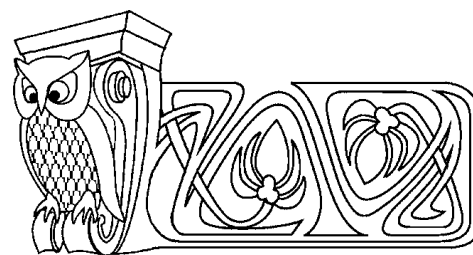
Рассмотрена задача о распространении тепла в бесконечном пространстве (горном массиве) от цилиндрической полости, по которой движется поток газа (воздуха). Методом функций Грина в сочетании с преобразованием Лапласа получено решение этой задачи при произвольном законе изменения температуры воздуха и произвольном начальном условии. Решение может быть использовано для расчета теплового режима подземных сооружений с формой, близкой к цилиндрической.

Библиографический список

1. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of Heat in Solids. Oxford : Clarendon Press, 1959. 450 p.
2. Щербань А. Н., Кремнев О. А. Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт : в 2 т. Киев : Изд-во АН УССР, 1959. Т. 1. 425 с.
3. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев : Наук. думка, 1976. 286 с.
4. Галицын А. С. Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. Киев : Наук. думка, 1983. 236 с.
5. Галкин А. Ф., Хохолов Ю. А. Теплоаккумулирующие выработки. Новосибирск : ВО «Наука», 1992. 133 с.
6. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М. : Физматлит, 2003. 688 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1987. 688 с.
9. Бицадзе А. В., Калинин Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. : Наука, 1985. 312 с.
10. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М. : Наука, 1971. 288 с.
11. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М. : Наука, 1984. 344 с.
12. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ. Киев : Наук. думка, 1984. 600 с.

УДК 539.374

ВЛИЯНИЕ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ



А. С. Устинова

Институт автоматизации и процессов управления
Дальневосточного отделения РАН, Владивосток,
лаборатория механики деформируемого твердого тела
E-mail: ustynova@iacp.dvo.ru

Рассматривается вязкопластическое течение несжимаемого упруговязкопластического материала между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, когда на одной из них возможно проскальзывание материала. Решение строится в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций. Рассмотрены обратимое деформирование, развите и торможение вязкопластического течения, разгрузка и деформирование при повороте в обратном направлении. Получены законы движения границ областей вязкопластического течения.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

Influence of Slipping on Viscosimetric Flow of a Elastoviscoplastic Material Between Rigid Coaxial Cylinders

A. S. Ustinova

Institute of Automation and Control Processes,
Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok,
Laboratory of a Deformable Solid Mechanics
E-mail: ustynova@iacp.dvo.ru

The viscoplastic flow of an incompressible elastoviscoplastic material between two rigid coaxial cylindrical surfaces is considered when slipping of a material is possible at one of them. The solution is constructed using the model of large elastoviscoplastic deformations. Reversible deformation, development and braking of a viscoplastic flow, unloading and deformation under rotation in the opposite direction are considered. Laws of movement of elastic-plastic boundaries are received.

Key words: elasticity, viscoplasticity, large deformations, residual stresses.

ВВЕДЕНИЕ

Вискозиметрические и прямолинейные течения неньютоновских материалов в рамках модели Шведова – Бингама рассматривались достаточно подробно [1–7]. Упругие свойства деформируемых материалов при этом не учитывались. В настоящее время представляет интерес исследование эффектов,



обусловленных упругими свойствами среды. К последним относятся недопустимые геометрические изменения деформированных тел в процессах разгрузки и формирования в них остаточных напряжений. Математическое моделирование подобных эффектов возможно только в рамках теории больших упругопластических деформаций. Ниже в рамках такой модели приводится решение задачи о вискозиметрическом течении среды между двумя жесткими цилиндрами, когда на одном из них возможно проскальзывание.

1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Задача решается в рамках модели больших упругопластических деформаций, предложенной в [8] и обобщенной на случай учета вязких свойств материала на стадии пластического течения [9]. В прямоугольной декартовой системе координат кинематика среды определяется зависимостями

$$\begin{aligned} d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \\ \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ r_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk} - \varepsilon_{sk}^p). \end{aligned} \tag{1}$$

В соотношениях (1) d_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} , p_{ij} — их обратимые и необратимые составляющие; u_i , v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; D/Dt — объективная производная тензоров по времени; ε_{ij}^p (источник в уравнении переноса для тензора необратимых деформаций) — компоненты тензора скоростей пластических деформаций. Наличие нелинейной составляющей z_{ij} тензора вращений r_{ij} , которая выписана полностью в [8, 9], связано с выполнением требования неизменности тензора пластических деформаций p_{ij} в процессах разгрузки.

Материал считаем несжимаемым и тогда, следуя [8, 9], получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0, \\ \sigma_{ij} &= -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \neq 0, \\ W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \\ J_k &= \begin{cases} L_k, & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\ I_k, & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \\ I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}. \end{aligned} \tag{2}$$

В зависимостях (2) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, p , p_1 — добавочные гидростатические давления, W — упругий потенциал, μ — модуль сдвига, b , χ — постоянные материала.

В качестве пластического потенциала используется функция нагружения Треска [10]:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p|, \tag{3}$$

где k — предел текучести; η — коэффициент вязкости; σ_i , ε_k^p — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций.

Связь скоростей необратимых деформаций с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \tag{4}$$



2. НАЧАЛЬНОЕ УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Пусть упруговязкопластический материал заполняет область $r_0 \leq r \leq R$ между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями. Решение будем искать в цилиндрической системе координат r, φ, z . Вначале рассмотрим случай, когда материал деформируется за счет поворота внутреннего цилиндра радиусом $r = r_0$, в то время как внешний цилиндр радиусом $r = R$ жестко закреплен, и на его поверхности выполнено условие прилипания:

$$u_r = u_\varphi = v_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (5)$$

Компоненты вектора перемещений при движении точек среды по окружностям определяются зависимостями

$$u_r = r(1 - \cos \theta(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \theta(r, t),$$

здесь $\theta(r, t)$ — центральный угол закручивания.

Отличными от нуля компонентами тензора деформаций Альманси являются следующие:

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}g^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}g, \quad g = r \frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

При увеличении угла поворота внутреннего жесткого цилиндра сначала происходит только упругое деформирование. При достижении некоторого значения $\theta_0 = \theta(r_0, t_0)$ в окрестности внутренней поверхности начинается пластическое течение. Считаем, что на внутренней жесткой стенке при обратимом деформировании выполняется условие прилипания, а при пластическом течении материала возможно его проскальзывание:

$$\begin{aligned} |\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} &\leq \gamma |\sigma_{rr}|_{r=r_0}, & [\omega] &= 0 & \text{обратимое деформирование,} \\ \sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} &= -\gamma |\sigma_{rr}|_{r=r_0} - \xi[\omega], & [\omega] &= \omega^+ - \omega^- & \text{вязкопластическое течение,} \end{aligned} \quad (6)$$

здесь γ — коэффициент сухого трения, ξ — коэффициент вязкого трения, ω^+ — угловая скорость жесткого цилиндра, ω^- — угловая скорость материала в окрестности внутреннего жесткого цилиндра.

Вычислим параметры напряженно-деформированного состояния в момент начала пластического течения. Из зависимостей (2) для компонент напряжений с точностью до слагаемых второго порядка малости по деформациям следуют соотношения

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)g^2 = -s, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -s + \mu g^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu g.$$

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (7)$$

и используя граничное условие (5), найдем

$$\theta = \frac{c}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{c^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0,$$

где c — неизвестная постоянная интегрирования, σ_0 — значение компоненты тензора напряжений σ_{rr} на поверхности $r = r_0$.

Из условия пластичности (3) и условия (6) в момент начала пластического течения найдем

$$\theta_0 = \frac{k}{2\mu} \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right), \quad c = -kr_0^2, \quad \sigma_0 = \frac{k}{\gamma}.$$

Начиная с момента времени $t = t_0 = 0$ в окрестности внутренней поверхности развивается область вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq r_1(t)$, $r_1(t)$ — движущаяся граница этой области, отделяющая ее от зоны упругого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$.



Согласно зависимостям (1) для компонент вектора скорости и тензора скоростей деформаций справедливы кинематические соотношения

$$v_\varphi = r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\varepsilon_{r\varphi}^p e_{r\varphi}.$$

Рассчитаем параметры напряженно-деформированного состояния в некоторый момент времени $t = t'_1 \geq t_0$. Интегрируя уравнения равновесия (квазистатическое приближение) в области упругого деформирования с использованием (5), найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c_1}{r^2}, \quad v_\varphi = 0, \quad \theta = \frac{c_1}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad c_1 = c(t'_1). \quad (9)$$

Из второго соотношения в (2) для компонент напряжений в области пластического течения имеем:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} - (p_1 + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)e_{r\varphi}^2 = -s_1(t), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -s_1(t) + 4\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}. \quad (10)$$

В то же время интегрированием уравнений равновесия можно получить

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{m(t'_1)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{m(t'_1)}{2\mu r^2}. \quad (11)$$

Из условия непрерывности компонент напряжений и соотношений (10) и (11) следует, что

$$m(t'_1) = c_1, \quad s(t'_1) = s_1(t'_1).$$

Согласно условию пластичности (3) и ассоциированному закону пластического течения (4) получаем

$$\sigma_{r\varphi} = -k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \lambda = -\varepsilon_{r\varphi}^p / (k - \eta \varepsilon_{r\varphi}^p). \quad (12)$$

Используя (11) и (12), можно вычислить скорость пластической деформации в области $r_0 \leq r \leq r_1(t)$

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c_1}{r^2} + k \right).$$

С учетом кинематических зависимостей (8) и условий непрерывности перемещений, деформаций и скоростей на упругопластической границе $r = r_1$ в области необратимого деформирования найдем

$$\theta = tF(c_1, r, r_1) + A(c_1), \quad v_\varphi = rF(c_1, r, r_1), \quad c_1 = -kr_1^2,$$

$$F(c_1, r, r_1) = \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r}{r_1} + \frac{c_1}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right), \quad A(c_1) = \frac{c_1}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right).$$

Если скорость поворота жесткого цилиндра изменяется со временем, например по закону $\omega^+ = \alpha t$, то для определения границы вязкопластической области, используя граничное условие (6), получим уравнение

$$F(c_1, r_0, r_1) = \alpha t + H(r_1), \quad H(r_1) = \frac{k}{\xi} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2} \right).$$

На рис. 1 показано развитие области вязкопластического течения при значении постоянных

$$\frac{r_0}{R} = 0.5, \quad \frac{\eta\sqrt{\alpha}}{\mu} = 0.01, \quad \frac{\xi\sqrt{\alpha}}{\mu} = 0.05, \quad \frac{k}{\mu} = 0.00621. \quad (13)$$



По найденной функции $r_1(t)$ определяются функция $\theta(r, t)$, напряжения, полные и обратимые деформации как в области обратимого деформирования, так и в области вязкопластического течения. Согласно (1) компоненты пластических деформаций определяются зависимостями

$$p_{r\varphi} = \frac{kt}{\eta} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right), \quad p_{\varphi\varphi} = 2e_{r\varphi}p_{r\varphi},$$

$$p_{rr} = 2d_{r\varphi}(e_{r\varphi} - d_{r\varphi}).$$

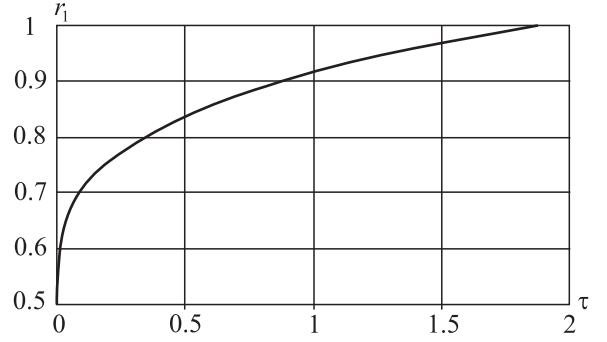


Рис. 1. Развитие области вязкопластического течения

3. ТОРМОЖЕНИЕ, РАЗГРУЗКА И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ ПОВОРОТЕ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОБРАТНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Далее рассмотрим процесс торможения, когда начиная с момента времени t_1 ($r_1(t_1) < R$) угловая скорость внутреннего цилиндра уменьшается по закону

$$\omega^+ = \alpha t_1 - \beta(t - t_1). \tag{14}$$

При уменьшении скорости поворота внутренней жесткой поверхности и неизменном напряжении $\sigma_{r\varphi} = \frac{c_2}{r^2}$, $c_2 = -kr_1^2$ вязкопластическое течение продолжается в области $r_0 \leq r \leq r_2(t)$, в области $r_2(t) \leq r \leq r_1$ пластические деформации перестают изменяться, в области $r_1 \leq r \leq R$ происходит обратимое деформирование.

В упругой области по-прежнему справедливы зависимости (9). В области с неизменяющимися пластическими деформациями, используя условие непрерывности скоростей при $r = r_1$, получим, что угловая скорость $\omega = 0$ во всей этой области. В области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ из равенства скоростей на поверхности $r = r_2$ найдем $\omega = F(c_2, r, r_2)$.

Используя граничные условия (6) и (14) для определения границы r_2 , получим уравнение

$$\alpha t_1 - \beta(t - t_1) + H(r_1) = F(c_2, r_0, r_2).$$

Компонента $p_{r\varphi}$ пластических деформаций в области $r_2(t) \leq r \leq r_1$ с накопленными неизменяющимися пластическими деформациями находится по формуле

$$p_{r\varphi} = \frac{k}{\eta} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) t_1 + \frac{H(r_1)}{\beta} - \frac{1}{\beta} F(c_2, r_0, r) \right].$$

Используя соотношение $d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi}$ и условие непрерывности перемещений при $r = r_2$, определим функцию θ в области $r_2(t) \leq r \leq r_1$

$$\theta = \left[t_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + \frac{1}{2\beta} \left[F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + A(c_2).$$

В области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ получим

$$\theta = \left[t_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r_2, r_1) + \frac{1}{2\beta} \left[F^2(c_2, r_0, r_2) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + F(c_2, r, r_2) + A(c_2).$$

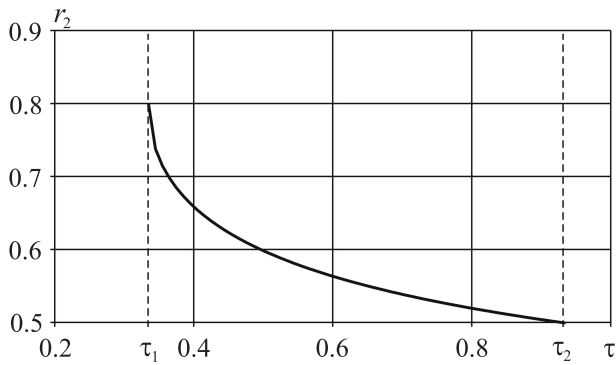


Рис. 2. Изменение границы области вязкопластического течения в процессе торможения

Полученное решение справедливо до момента времени $t = t_2$, в который граница r_2 совпадает с поверхностью $r = r_0$. На рис. 2 показано изменение границы r_2 с течением времени.

Далее в материале будет происходить разгрузка, при которой напряжение $\sigma_{r\varphi}$ будет уменьшаться по абсолютной величине. Функция θ в этом случае определяется следующими зависимостями:

– в упругой области:

$$\theta = A(c_3), \quad c_3 = -r_0^2(k + \xi(\alpha t_1 - \beta(t - t_1))),$$

– в пластической области:

$$\theta = \left[t_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + \frac{1}{2\beta} \left[F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + A(c_3). \quad (15)$$

В момент времени $t = t_3$ скорость поворота внутреннего жесткого цилиндра станет равной нулю ($\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = -k$). Рассмотрим, как будет изменяться напряженно-деформированное состояние, если с момента времени $t = t_3$ поворачивать цилиндр в обратную сторону. До достижения углом поворота значения $\theta(r_0, t_4) = \theta_4$ в материале будет происходить только обратимое деформирование, а на жесткой стенке будет выполняться условие прилипания (первое соотношение (6)). В конечный момент разгрузки $t = t^*$ ($\sigma_{r\varphi} = 0$) для функции θ найдем

– в упругой области:

$$\theta = 0,$$

– в пластической области: $\theta = \left[t_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + \frac{1}{2\beta} \left[F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right]$.

Начиная с момента времени $t = t^*$ напряжение $\sigma_{r\varphi}$ возрастает, до тех пор пока в окрестности внутренней поверхности $r = r_0$ напряженное состояние не выйдет на поверхность нагружения

$$\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = k, \quad (16)$$

и не начнет развиваться новая область пластического течения. Начальный параметр для пластического течения равен

$$\theta_4 = \left[t_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r_0, r_1) - \frac{1}{2\beta} F^2(c_2, r_0, r_1) + A(c_4), \quad c_4 = kr_0^2.$$

После того как на поверхности $r = r_0$ выполнится условие пластичности (16) ($t = t_4$), начнет свое развитие область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_3(t)$. В области $r_1 \leq r \leq R$, как и выше, справедливы зависимости (9), в которых c_1 следует заменить новым значением c_5 , в области с накопленными необратимыми деформациями $r_3(t) \leq r \leq r_1$ функция $\theta(r, t)$ находится по формуле (15), где c_3 заменено текущим значением c_5 . В области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_3(t)$ найдем

$$p_{r\varphi} = \frac{t}{\eta} \left(\frac{c_5}{r^2} - k \right) + \frac{k}{\eta} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) t_1 + \frac{H(r_1)}{\beta} - \frac{1}{\beta} F(c_2, r_0, r) \right], \quad c_5 = kr_3^2,$$

$$\theta = \frac{1}{2\beta} \left[F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + \left[t_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + tF_1(c_5, r_3, r) + A(c_5), \quad (17)$$

$$F_1(c_5, r_3, r) = \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r_3}{r} - \frac{c_5}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \right), \quad \omega = F_1(c_5, r_3, r).$$



Рассмотрим напряженно-деформируемое состояние, начиная с момента времени $t = t_5$, в который движущаяся граница $r_3(t)$ достигнет поверхности $r = r_1$, первоначально ограничивающей пластическую область. При этом в материале будут три области: упругая область $r_3(t) \leq r \leq R$ и области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1$ и $r_1 \leq r \leq r_3(t)$, в которых пластические деформации вычисляются по-разному. В области обратимого деформирования функция $\theta(r, t)$ определяется зависимостями (9), где c_1 заменено значением c_5 .

В области вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq r_3(t)$, используя условие непрерывности перемещений, найдем

$$p_{r\varphi} = \frac{t - t_5}{\eta} \left(\frac{c_5}{r^2} - k \right), \quad \theta = (t - t_5)F_1(c_5, r_3, r) + A(c_5), \quad \omega = F_1(c_5, r_3, r).$$

В области $r_0 \leq r \leq r_1$ компонента $p_{r\varphi}$ пластических деформаций находится по формуле (17), а для угла поворота и угловой скорости будут выполняться соотношения

$$\theta = \frac{1}{2\beta} \left[F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_1) \right] + \left[t_2 \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{H(r_1)}{\beta} \right] F(c_2, r, r_1) + tF_1(c_5, r_1, r) + (t - t_5)F_1(c_5, r_3, r_1) + A(c_5), \quad \omega = F_1(c_5, r_3, r_1).$$

Для определения упругопластической границы r_3 в этом случае следует уравнение $-\alpha t - H(r_3) = F_1(c_5, r_3, r_0)$.

На рис. 3. показана функция $\theta(r)$ в моменты времени $t_1, t_1 < t'_2 < t_2, t_2, t_4, t_4 < t'_5 < t_5, t_5, t_5 < t'_6$.

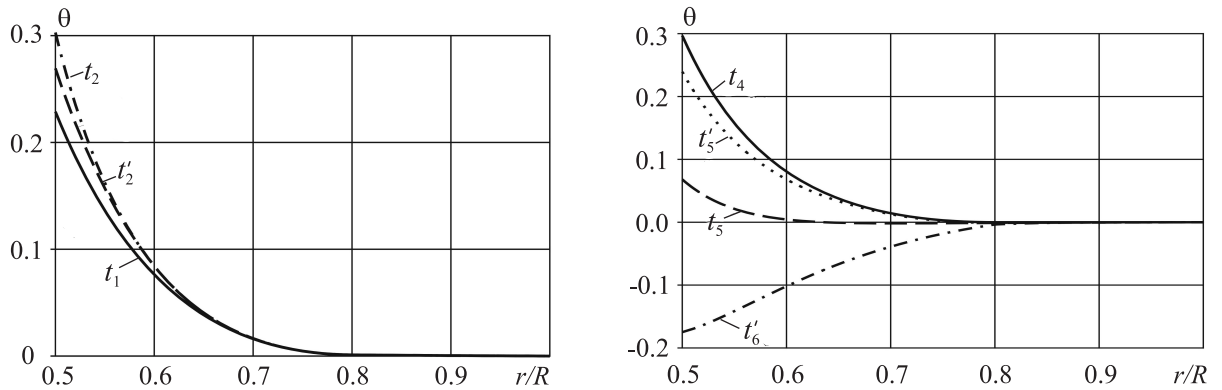


Рис. 3. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

4. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ НА ВНЕШНЕЙ ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим теперь деформирование материала в случае ускоренного вращения внутреннего жесткого цилиндра, когда условие проскальзывания выполняется в окрестности внешнего цилиндра, а условие прилипания — на внутреннем:

– обратимое деформирование : $|\sigma_{r\varphi}|_{r=R} \leq \gamma |\sigma_{rr}|_{r=R} \quad u_r|_{r=R} = u_\varphi|_{r=R} = \omega|_{r=R} = 0,$

– вязкопластическое течение : $\sigma_{r\varphi}|_{r=R} = -\frac{kr_0^2}{R^2} - \omega|_{r=R}, \quad \omega|_{r=r_0} = \alpha t.$

При обратимом деформировании материала будут справедливы соотношения п. 2. В условиях пластического течения материала имеем

– в упругой области:

$$\omega = -\frac{r_0^2}{R^2} H(r_1), \quad \theta = tF(c_1, r_1, r_0) + \theta_0 + \frac{\alpha t^2}{2} + A_1(c_1), \quad A_1(c_1) = \frac{c_1}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right),$$



– в области вязкопластического течения:

$$\omega = F(c_1, r, r_0) + \alpha t, \quad \theta = tF(c_1, r, r_0) + \theta_0 + \frac{\alpha t^2}{2} + A_1(c_1), \quad c_1 = -kr_1^2.$$

Для определения границы области вязкопластического течения следует решить уравнение

$$\alpha t + F(c_1, r_1, r_0) = -\frac{r_0^2}{R^2}H(r_1).$$

При уменьшении скорости поворота внутреннего цилиндра найдем:

– в упругой области:

$$\begin{aligned} \omega &= F(c_2, r_2, r_0) + \alpha t_1 - \beta(t - t_1), \quad c_2 = -kr_1^2(t_1), \\ \theta &= \left[t_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{r_0^2 H(r_1)}{\beta R^2} \right] F(c_2, r_1, r_2) + \frac{1}{2\beta} \left[F^2(c_2, r_0, r_1) - F^2(c_2, r_0, r_2) \right] + \\ &+ tF(c_2, r_2, r_0) + \theta_0 + \alpha t_1 t - \frac{\alpha t_1^2}{2} - \frac{\beta(t - t_1)^2}{2} + A_1(c_2), \end{aligned}$$

– в области с неизменяющимися пластическими деформациями:

$$\begin{aligned} \omega &= F(c_2, r_2, r_0) + \alpha t_1 - \beta(t - t_1), \\ \theta &= \left[t_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) + \frac{r_0^2 H(r_1)}{\beta R^2} \right] F(c_2, r, r_2) + \frac{1}{2\beta} \left[F^2(c_2, r_0, r) - F^2(c_2, r_0, r_2) \right] + \\ &+ tF(c_2, r_2, r_0) + \theta_0 + \alpha t_1 t - \frac{\alpha t_1^2}{2} - \frac{\beta(t - t_1)^2}{2} + A_1(c_2), \end{aligned}$$

– в области вязкопластического течения:

$$\omega = F(c_2, r, r_0) + \alpha t_1 - \beta(t - t_1), \quad \theta = tF(c_2, r, r_0) + \theta_0 + \alpha t_1 t - \frac{\alpha t_1^2}{2} - \frac{\beta(t - t_1)^2}{2} + A_1(c_2).$$

После того как граница r_2 достигнет поверхности r_0 , напряжение $\sigma_{r\varphi}$ будет уменьшаться по абсолютной величине, пока угловая скорость внутреннего жесткого цилиндра не уменьшится до нуля. При повороте цилиндра в обратную сторону наблюдаются те же эффекты, что и в случае, описанном в п. 2–3. На рис. 4. приведено распределение угла поворота в зависимости от радиуса в различные моменты времени.

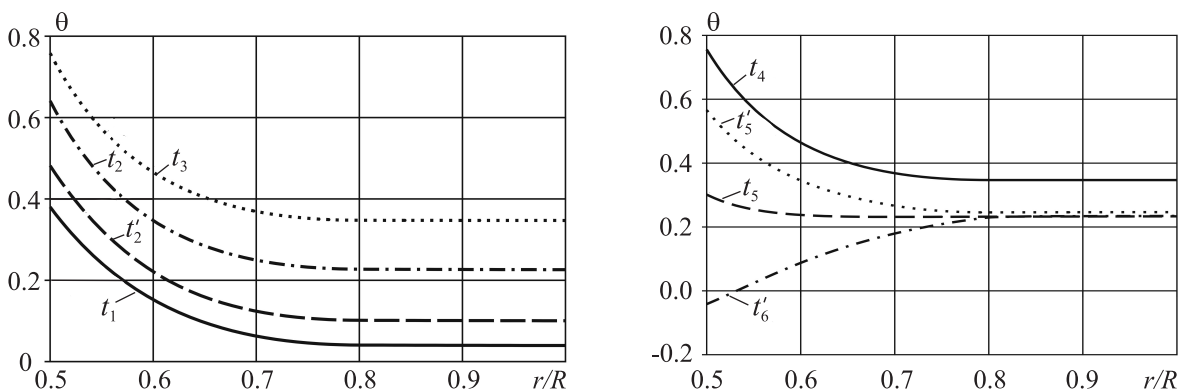


Рис. 4. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

Аналогично были получены решения краевых задач в случае поворота внешнего жесткого цилиндра, когда проскальзывание материала возможно либо в окрестности неподвижного внутреннего цилиндра, либо подвижного внешнего.

**Библиографический список**

1. Бахшиян Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязкопластичной среде // ПММ. 1948. Т. 12, вып. 6. С. 650–661.
2. Быковцев Г. И., Чернышов А. Д. О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления // ПМТФ. 1964. № 4. С. 94–96.
3. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. М. : Наука, 1981. 208 с.
4. Мясников В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды // ПМТФ. 1961. № 2. С. 79–86.
5. Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1970. 415 с.
6. Резунов А. В., Чернышов А. Д. Задача о чистом сдвиге вязкопластического материала между двумя цилиндрическими поверхностями // Механика деформируемого твердого тела : межвуз. сб. Куйбышев: Волжская коммуна, 1975. С. 32–36.
7. Сафрончик А. И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 6. С. 998–1014.
8. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
9. Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В. О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов // Вестн. ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87–93.
10. Знаменский В. А., Ивлев Д. Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.