УДК 004.023

Семенов Сергей Максимович

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Россия. Владивосток

Об одном способе решения задач на интервалы

Рассматривается подход к решению задач на интервалы при подготовке к ЕГЭ по информатике. Предлагается способ, основанный на преобразовании выражений к одному из трех типов, с использованием формул математической логики.

Ключевые слова и словосочетания: задачи на интервалы, математическая логика, ЕГЭ.

Мы рассмотрим один вопрос из материалов по подготовке к ЕГЭ по информатике – решение задач на интервалы из раздела математической логики. На наш взгляд, требуется более детальное изложение методики в дополнение к той, которая приведена в [1], а также в других источниках. Главными требованиями к методике решения любой задачи из ЕГЭ должны быть однозначность способа решения, его простота, ясность и краткость. Под однозначностью способа мы понимаем наличие основного, предпочтительного способа, который всегда должен приводить к результату. Задача на интервалы относится к разделу математической логики, поэтому основной способ заключается в применении формул математической логики.

Формулировки задач взяты из [2]. Требуется найти такой интервал A, при котором заданное логическое выражение тождественно истинно (или ложно) на всей числовой оси. Решения основаны на преобразовании любого выражения к виду $X \vee \neg Y$, $\neg X \vee Y$, $\neg X \vee \neg Y$, где X и Y могут быть комбинациями A, P, Q и R, где P, Q и R – фиксированные отрезки. В первом случае отрезок Y должен лежать целиком в отрезке X. Во втором случае отрезок X – в Y. В третьем случае отрезок X должен лежать вне отрезка Y. В третьем случае выражение может иметь вид $\neg X \vee \neg Y \vee Z$, где Z – также может быть комбинацией фиксированных отрезков. При этом если найдется такой отрезок A, что X и Y не будут пересекаться, то задача будет решена независимо от Z. В противном случае выражение $\neg X \vee \neg Y \vee Z$ нужно привести к $\neg(X \wedge Y) \vee Z$. Но такой вид фактически соответствует виду $\neg X \vee Y$. Такой подход позволяет школьнику решать задачу строго в соответствии с заданным алгоритмом (сведение выражения к указанному виду). При этом для решения используется исключительно аппарат математической логики. Приведенные примеры в основном охватывают различные варианты заданий, представленные в [2] и в других источниках. Следует отметить, что предлагаемый подход характеризуется краткостью приводимых решений.

Задачи на интервалы

Задача 1. На числовой прямой даны два отрезка P=[2, 10] и Q=[6, 14]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула $((x \in A) \to (x \in P)) \vee (x \in Q)$ была тождественно истинна, то есть приняла значение 1 при любом значении переменной x.

1) [0, 3], 2) [3, 11], 3) [11, 15], 4) [15, 17].

Решение. Введем обозначения $x \in A$ – A, $x \in P$ – P, $x \in Q$ – Q. Тогда $((x \in A) \to (x \in P)) \vee (x \in Q) = (A \to P) \vee Q = \neg A \vee P \vee Q = \neg A \vee (P \vee Q)$. Выражение $\neg A \vee (P \vee Q)$ соответствует случаю $\neg X \vee Y$, поэтому вся числовая ось будет покрываться в том случае, если отрезок A полностью лежит в объединении отрезков P и Q [2, 14]. Очевидно, что это отрезок [3, 11], то есть вариант (2).

Задача 2. На числовой прямой даны два отрезка P=[2, 20] и Q=[15, 25]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула $((x \notin A) \to (x \notin P)) \vee (x \in Q)$ была тождественно истинна, то есть приняла значение 1 при любом значении переменной x.

1) [0, 15], 2) [10, 25], 3) [2, 10], 4) [15, 20].

Решение. С учетом обозначений исходное выражение запишется как $(\neg A \to \neg P) \vee Q = A \vee \neg P \vee Q = \neg P \vee (A \vee Q)$. Выражение $\neg P \vee (A \vee Q)$ соответствует случаю $\neg X \vee Y$. Чтобы оно было тождественно истинно, нужно чтобы отрезок P целиком лежал в объединении отрезков A и Q. Отрезок [0, 15] подходит. Таким образом, вариант (1).

Задача 3. На числовой прямой даны три отрезка P=[10, 27], Q=[15, 30] и R=[25, 40]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула $((x \in Q) \to (x \notin R)) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin P)$ была тождественно ложна, то есть приняла значение 0 при любом значении переменной x.

1) [0, 15], 2) [10, 40], 3) [25, 35], 4) [15,25].

Решение. С учетом обозначений исходное выражение запишется как $((Q \to \neg R) \wedge A \wedge \neg P = ((\neg Q \vee \neg R) \wedge A \wedge \neg P = A \wedge \neg P \wedge \neg(Q \wedge R) = \neg(\neg A \vee \neg (\neg P \wedge \neg(Q \wedge R)) = \neg(\neg A \vee (P \vee (Q \wedge R)))$. Выражение $\neg(\neg A \vee (P \vee (Q \wedge R)))$ соответствует случаю $\neg(\neg X \vee Y)$. Чтобы исходное выражение было ложно, нужно чтобы выражение в скобке было истинно. Но для этого нужно, чтобы отрезок A целиком лежал в объединении отрезков $P \vee (Q \wedge R)$. Пересечение отрезков $(Q \wedge R)$ дает отрезок [25, 30]. Тогда объединение $P \vee (Q \wedge R)$ даст отрезок [10,30]. Полностью в этот отрезок попадает отрезок [15, 25], то есть вариант (4).

Задача 4. На числовой прямой даны три отрезка P=[5, 10], Q=[10,20] и R=[25, 40]. Выберите такой отрезок A, чтобы выражения $(x \in A) \to (x \in P)$ и (x

$\in$ Q) $\rightarrow$ (x $\in$ R) были тождественно равны, то есть приняли одинаковые значения при любом значении переменной x (кроме, возможно, конечного количества точек).

1) [7, 20], 2) [2, 12], 3) [10, 25], 4) [20, 30].

Под конечным количеством точек имеется в виду, что на концах отрезков выражения могут иметь различные значения.

Решение. Преобразуем исходное выражение к следующему $\neg A \vee P$ и $\neg Q \vee R$. Второе выражение истинно во всех точках, кроме отрезка [10, 20]. Нужно, чтобы первое выражение имело такую же область истинности. Только отрезок [7, 20] покрывает отрезок [10, 20]. При этом его часть [7, 10] входит в отрезок P, то есть не влияет на истинность выражения. На отрезке [10,20] первое выражение ложно, так как этот отрезок входит в A, но не входит в P. Во всех остальных точках первое выражение истинно. Таким образом, подходит отрезок [7, 20], то есть вариант (1).

Задача 5. На числовой прямой даны три отрезка P=[10,15], Q=[5,20] и R=[15,25]. Выберите такой отрезок A, чтобы выражения (x $\notin$ A) $\rightarrow$ (x $\in$ P) и (x $\in$ Q) $\rightarrow$ (x $\in$ R) приняли разные значения при любом значении переменной x (кроме, возможно, конечного количества точек).

1) [7,20], 2) [2,15], 3) [5,12], 4) [20,25].

Под конечным количеством точек имеется в виду, что на концах отрезков выражения могут иметь различные значения.

Решение. Преобразуем исходное выражение к следующему $A \vee P$ и $\neg Q \vee R$. Второе выражение истинно во всех точках кроме отрезка [5, 15] (часть отрезка Q, которая не входит в отрезок R). Нужно, чтобы первое выражение было истинно на отрезке [5, 15], а вне его ложно. Объединение отрезков [5, 12] и [10, 15] дает отрезок [5, 15]. Таким образом, подходит вариант (3).

Задача 6. На числовой прямой даны три отрезка: P = [10, 40], Q = [5, 15] и R= [35, 50]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула ((x $\in$ P) $\rightarrow$ (x $\in$ Q)) $\vee$ ((x $\in$ A) $\rightarrow$ (x $\in$ R)) была тождественно истинна, то есть приняла значение 1 при любом значении переменной *x*.

1) [10, 20] 2) [15, 25] 3) [20, 30] 4) [120, 130].

Решение. Преобразуем исходное выражение к следующему $(\neg P \vee Q) \vee (\neg A \vee R) = (\neg A \vee \neg P) \vee (Q \vee R)$. Выражение $(\neg A \vee \neg P) \vee (Q \vee R)$ соответствует случаю $\neg X \vee \neg Y \vee Z$. Это выражение будет эквивалентно $(\neg A \vee \neg P)$, если найдется такой отрезок A, который не имеет пересечений с отрезком P. Такой отрезок есть - это [120, 130]. Тогда выражение $(\neg A \vee \neg P)$ тождественно истинно независимо от $(Q \vee R)$. Таким образом, вариант (4).

Задача 7. На числовой прямой даны три отрезка: P = [20, 50], Q = [15, 20] и R= [40, 80]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула ((x $\in$ P) $\rightarrow$ (x $\in$ Q))

$\vee$ ((x $\in$ A) $\rightarrow$ (x $\in$ R)) была тождественно истинна, то есть приняла значение 1 при любом значении переменной *x*.

1) [10, 25] 2) [20, 30] 3) [40, 50] 4) [35, 45].

Решение. Преобразуем исходное выражение к следующему ($\neg$P $\vee$ Q) $\vee$ ($\neg$A $\vee$ R) = ($\neg$A $\vee$ $\neg$P) $\vee$ (Q $\vee$ R) = $\neg$(A $\wedge$ P) $\vee$ (Q $\vee$ R). В отличие от предыдущей задачи в этом примере нет отрезка A, не пересекающегося с отрезком P. Поэтому нужно искать пересечение (A $\wedge$ P), которое будет полностью входить в Q или в R. Такой отрезок есть – это [40, 50], который полностью входит в отрезок R. Таким образом, вариант (3).

Задача 8. На числовой прямой даны три отрезка: P = [10, 50], Q = [15, 20] и R = [30, 80]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула ((x $\in$ P) $\rightarrow$ (x $\in$ Q)) $\vee$ ((x $\notin$ A) $\rightarrow$ (x $\notin$ R)) была тождественно истинна, то есть приняла значение 1 при любом значении переменной x.

1) [10, 25] 2) [25, 50] 3) [40, 60] 4) [50, 80].

Решение. Преобразуем исходное выражение к виду ($\neg$P $\vee$ Q) $\vee$ (A $\vee$ $\neg$R) = A $\vee$ Q $\vee$ ($\neg$P $\vee$ $\neg$R) = $\neg$(P $\wedge$ R) $\vee$ A $\vee$ Q. Выражение $\neg$(P $\wedge$ R) $\vee$ A $\vee$ Q соответствует случаю $\neg$X $\vee$ Y. Это выражение будет истинно, если пересечение P $\wedge$ R будет целиком лежать в объединении A $\vee$ Q (или только в A). Пересечение P $\wedge$ R [30, 50] целиком содержится в отрезке [25, 50], то есть подходит вариант (2).

Задача 9. На числовой прямой даны два отрезка: P = [5, 15] и Q = [10, 20]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула (x $\in$ P) $\wedge$ (x $\notin$ Q) $\wedge$ (x $\in$ A) была тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x.

1) [0, 7]2) [8, 15] 3) [15, 20] 4) [7, 20].

Решение. Если формула ложна, то ее отрицание истинно, поэтому преобразуем исходное выражение к виду $\neg$(P $\wedge$ $\neg$Q $\wedge$ A) = $\neg$P $\vee$ $\neg$A $\vee$ Q. Выражение $\neg$P $\vee$ $\neg$A $\vee$ Q соответствует случаю $\neg$X $\vee$ $\neg$Y $\vee$ Z с точностью до обозначений. Если найдется отрезок A, который не пересекается с отрезком P, то это и будет решение. Такой отрезок есть – это [15, 20]. Правда, есть пересечение в граничной точке отрезка, но, как и в задаче 4, будем считать, что это допустимо. Итак, вариант (3).

Задача 10. На числовой прямой даны два отрезка: P = [10, 20] и Q = [5, 15]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула ((x $\in$ Q) $\rightarrow$ (x $\in$ P)) $\wedge$ (x $\in$ A) была тождественно ложна, то есть приняла значение 0 при любом значении переменной x.

1) [0, 6]2) [5, 8]3) [7, 15] 4) [12, 20].

Решение. Если формула ложна, то ее отрицание истинно, поэтому преобразуем исходное выражение к виду $\neg$(($\neg$Q $\vee$ P) $\wedge$ A) = $\neg$($\neg$Q $\vee$ P) $\vee$ $\neg$A = (Q $\wedge$ $\neg$P) $\vee$ $\neg$A. Выражение (Q $\wedge$ $\neg$P) $\vee$ $\neg$A соответствует случаю X $\vee$ $\neg$Y. Тогда отрезок A должен целиком лежать внутри пересечения Q $\wedge$ $\neg$P. Легко увидеть, что этим пересечением является отрезок [5, 10]. Целиком внутри него лежит отрезок [5 ,8]. Таким образом, получаем вариант (2).

Задача 11. На числовой прямой даны два отрезка: P = [41, 61] и Q = [11, 91]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула $((x \in P) \to (x \in A)) \wedge ((x \in A) \to (x \in Q))$ была тождественно истинна, то есть приняла значение 1 при любом значении переменной *x*. Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

1) [7, 43] 2) [7, 73] 3) [37, 53] 4) [37, 63].

Решение. Преобразуем исходное выражение к виду $(\neg P \vee A) \wedge (\neg A \vee Q)$. Обе части выражения будут истинны, если P целиком находится в A и A целиком находится в Q. Для первого условия подходит отрезок только [37, 63]. Для второго условия он тоже подходит. Таким образом, вариант (4).

Задача 12. На числовой прямой даны два отрезка: P = [10, 30] и Q = [20, 40]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула $(x \in A) \to ((x \in P) \equiv (x \in Q))$ была тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*. Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

1) [10, 19] 2) [21, 29] 3) [31, 39] 4) [9, 41].

Решение. Преобразуем исходное выражение к виду $\neg A \vee (P \equiv Q) = \neg A \vee (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q)$. Выражение $\neg A \vee (P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q)$ соответствует случаю $\neg X \vee Y$. Попробуем найти такой отрезок A, чтобы он целиком лежал в пересечении $P \wedge Q$, то есть в отрезке [20, 30]. Отрезок [21, 29] подходит, то есть вариант (2).

С использованием рассмотренной методики были проведены занятия со школьниками, с учителями информатики. Можно отметить весьма позитивное восприятие методики как школьниками, так и учителями. Следовательно, формальный подход, использованный в методике, упрощает решение задачи. Нужно только уметь применять формулы математической логики для преобразования логических выражений. Причем, как правило, достаточно формул для преобразования импликации и законов де Моргана.

1. Крылов С.С. ЕГЭ 2014. Информатика. Тематические тестовые задания / С.С. Крылов, Д.М.Ушаков. – М.: Изд-во «Экзамен». – 245 с.
2. Официальный сайт К.Ю. Полякова: http:/kpolyakov.spb.ru.