DOI dx.doi.org/10.24866/VVSU/2073-3984/2019-2/139-149

УДК 531.19

В.П. Смагин[1]

С.В. Сёмкин[2]

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Владивосток. Россия

Рекуррентные решетки и самосогласованные уравнения в модели Изинга

В теоретических исследованиях критического поведения магнетиков часто используется модель Изинга – модель с максимально простым гамильтонианом, отражающим характерные особенности систем с коллективным взаимодействием. Однако даже для простых решеток модель Изинга не имеет точного решения, поэтому для исследования свойств этой модели прибегают к различным приближениям. Такие приближения могут отразить только отдельные особенности системы, остальными же приходится пренебрегать. При этом, как правило, не известно заранее, какие из характерных особенностей системы являются наиболее важными. Например, в реальных кристаллических решетках всегда существует минимальный замкнутый путь, содержащий определенное количество атомов – свое для каждой решетки. Но в известных приближениях, таких, как метод среднего поля или приближение Бете, наличие такого минимального цикла не учитывается. В данной работе исследуется возможность построения приближения, в котором явно учитывается наличие таких циклов. Построен класс самосогласованных уравнений, которые могут служить для приближенного решения модели Изинга на различных кристаллических решетках. Частным (и простейшим) примером уравнений этого класса является известное приближение Бете, в связи с чем наш класс самосогласованных уравнений можно рассматривать как обобщение приближения Бете. Как известно, приближение Бете можно интерпретировать как замену реальной кристаллической решетки так называемой решеткой Бете, являющейся внутренней частью дерева Кейли. Решения некоторых из предлагаемых нами самосогласованных уравнений могут быть интерпретированы как точные решения задачи Изинга на особым образом построенных рекурсивных решетках, что и будет показано ниже. Эти рекурсивные решетки отличаются тем, что каждый узел в них входит в некоторое количество замкнутых циклов. С помощью наших самосогласованных уравнений мы рассчитали температуры Кюри для простых решеток. Оказалось, что учет замкнутых циклов приводит к более точным результатам.

Ключевые слова и словосочетания: фазовые переходы, модель Изинга, рекурсивные решетки.

---

[1] Смагин Виктор Павлович – д-р физ.-мат. наук, зав. Лаборатории фундаментальной и прикладной физики; e-mail: Li15@rambler.ru

[2] Сёмкин Сергей Викторович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий и систем; e-mail: Li15@rambler.ru

V.P. Smagin

S.V. Semkin

Vladivostok State University of Economics and Service
Vladivostok. Russia

Recurrent lattices and self-consistent equations in the Ising model

In theoretical studies of the critical behavior of magnets, the Ising model is often used – a model with the simplest Hamiltonian that reflects the characteristic features of systems with collective interaction. However, even for simple lattices, the Ising model does not have an exact solution; therefore, to study the properties of this model, various approximations are used. Such approximations can only reflect certain features of the system, while the rest have to be neglected. In this case, as a rule, it is not known in advance which of the characteristic features of the system are the most important. For example, in real crystal lattices there always exists a minimal closed path that contains a certain number of atoms – its own for each lattice. But in known approximations, such as the mean field method or the Bethe approximation, the presence of such a minimum cycle is not taken into account. In this paper, we investigate the possibility of constructing an approximation that explicitly takes into account the presence of such cycles. We have constructed a class of self-consistent equations that can be used for the approximate solution of the Ising model on various crystal lattices. A particular (and simplest) example of equations of this class is the well-known Bethe approximation, and therefore our class of self-consistent equations can be viewed as a generalization of the Bethe approximation. As is well known, the Bethe approximation can be interpreted as a replacement of the real crystal lattice by the so-called Bethe lattice, which is the inner part of the Kaylee tree. Similarly, the solutions of some of the self-consistent equations we propose can be interpreted as exact solutions of the Ising problem on specially constructed recursive lattices, which will be shown below. These recursive lattices are distinguished by the fact that each node in them is included in a certain number of closed cycles. Using our self-consistent equations, we calculated Curie temperatures for simple lattices. It turned out that the inclusion of closed cycles leads to more accurate results.

Keywords: phase transitions, Ising model, recursive lattices.

Как известно, в теории систем с коллективным взаимодействием часто используется приближение Бете [1]. Применительно к модели Изинга это приближение можно понимать и как самосогласованное приближение [2], и как точное решение задачи Изинга на рекурсивной решетке Бете (точнее, на ее внутренней части – дереве Кейли) [1]. В работе [9] рассмотрена модель Гейзенберга на рекурсивных решетках с мультиспиновым взаимодействием в сильном внешнем магнитном поле как приближение двумерной решетки кагоме, а также рекурсивная шестиугольная решетка как приближение треугольной решетки для твердого 3He, а работе [10] изучены магнитные свойства антиферромагнитных моделей Поттса с двухчастичным и Изинга с трехчастичным взаимодействием на рекуррентных решетках. В настоящей работе мы рассмотрим некоторый класс самосогласованных приближений к решению задачи Изинга на произвольной решетке, частным случаем которого является приближение Бете. Оказывается, что некоторые из этих самосогласованных приближений можно рассматривать как точные решения задачи Изинга на определенным образом построенных рекурсивных решетках.

Рассмотрим граф, который строится следующим образом: возьмем N узлов и связей, образующих замкнутый N-угольник. От каждой вершины этого N-угольника достроим L таких же не пересекающихся между собой N-угольников. Повторяя это построение для каждой вершины новых N-угольников, получим рекуррентную решетку, являющуюся бесконечным кактусом [3]. Координационное число такой решетки $q = 2L + 2$. Заметим, что обычную решетку Бете с координационным числом q можно интерпретировать как рекуррентную решетку, построенную аналогичным способом из «двухугольников» (димеров), т.е. $N = 2$ и $L = q - 1$. Кроме того, этот граф переходит в решетку Бете с $q = 2L + 2$ при $N \to \infty$.

Поместим в узлы этой решетки изинговские спины σ_i и будем полагать, что соседние спины взаимодействуют между собой с энергией $-J\sigma_1\sigma_2$, а кроме того вся система находится во внешнем поле H_{ex}. Найдем намагниченность – среднее значение каждого такого спина. Это можно сделать следующим способом. Рассмотрим отдельный узел решетки, содержащий спин σ. Этот узел является общей вершиной $L+1$ N-угольников, образующих $L+1$ не пересекающихся ветвей с корневой точкой σ. Обозначив s_i совокупность спинов (кроме σ) *i*-й ветки, представим статистическую сумму системы в виде:

$$Z = \sum\nolimits_{\sigma 1, s1, \dots s_{l+1}} e^{\sigma h_{ex}} \Omega(\sigma, s_1) \dots \Omega(\sigma, s_L + 1), \qquad (1)$$

где $h_{ex} = H_{ex}/kT$ (k – постоянная Больцмана, T – температура), $\Omega(\sigma, s_i)$ – множитель, зависящий только от σ и совокупности спинов s_i. Обозначим $g(\sigma) = \sum\limits_s \Omega(\sigma, s)$. В силу симметрии эта величина одинакова для всех ветвей, то есть не зависит от i. Тогда статистическая сумма

$$Z = e^{h_{ex}} g^{L+1}(+1) + e^{-h_{ex}} g^{L+1}(-1),$$

а средняя намагниченность спина σ

$$m_1 = \frac{e^{h_{ex}} g^{L+1}(+1) - e^{-h_{ex}} g^{L+1}(-1)}{e^{h_{ex}} g^{L+1}(+1) + e^{-h_{ex}} g^{L+1}(-1)} = \frac{e^{h_{ex}} - x^{L+1} e^{-h_{ex}}}{e^{h_{ex}} + x^{L+1} e^{-h_{ex}}},$$

где $x = g(-1)/g(+1)$. Если обозначить $h_1 = h_{ex} - \frac{L+1}{2}\ln x$, то выражение для намагниченности m_1 принимает вид:

$$m_1 = thh_1. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь один из N-угольников рекуррентной решетки. Каждая вершина этого N-угольника является корневой точкой L непересекающихся ветвей, таких же как и рассмотренные выше. Пусть s_{ij} есть совокупность спинов, принадлежащих j-й ветви, отходящей от i-й вершины N-угольника. Статистическую сумму (1) можно представить как

$$Z = \sum_{\sigma_i, S_{ij}} e^{K\sum \sigma_i \sigma_{i+1} + h_{ex}\sum \sigma_i} \prod_{i,j} \Omega(\sigma, s_{ij}) = \sum_{\sigma_i} e^{K\sum \sigma_i \sigma_{i+1} + h_{ex}\sum \sigma_i} \prod_i g^L(\sigma_i), \qquad (3)$$

где $K = J/kT$, сумма $\sum \sigma_i \sigma_{i+1}$ есть сумма по i от 1 до N с циклическим условием $\sigma_{N+1} = \sigma_1$. Выражение (3) можно привести к виду:

$$Z = (g(+1)x^{\frac{1}{2}})^{NL} \sum \sigma_i e^{k\sum \sigma_i \sigma_i + 1 + hN\sum \sigma_i}, \qquad (4)$$

где $h_N = h_{ex} - \frac{L}{2}\ln x$. Для вычисления этой статистической суммы рассмотрим трансфер-матрицу [1]:

$$V = \begin{pmatrix} e^{K+h_N} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h_N} \end{pmatrix},$$

тогда $g(+1)x^{1/2^{NL}} SpV^N$.

Обозначим λ_1 и λ_2 собственные числа трансфер-матрицы V и запишем статсумму в виде:

$$Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N,$$

$$\lambda_{1,2} = e^K chh_N \pm \sqrt{e^{2K} sh^2 h_N + e^{-2K}}.$$

Среднее значение $m_N = \sum \sigma_i / N$ находится следующим образом:

$$m_N = \frac{1}{N}\frac{\partial \mathrm{n}Z}{\partial h_N} = \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1^N + \lambda_2^N} \frac{e^K sh(h_N)}{\sqrt{e^{2K} sh^2(h_N) + e^{-2K}}}. \qquad (5)$$

Поскольку m_1 и m_N являются одной и той же величиной – средним значением спина в узле решетки M, приравнивая правые части (2) и (5), получим уравнение относительно x:

$$thh_1 = \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1^N + \lambda_2^N} \frac{e^K sh(h_N)}{\sqrt{e^{2K} sh^2(h_N) + e^{-2K}}}. \qquad (6)$$

Решив это уравнение при заданных значениях K и h_{ex}, найдем намагниченность $M(K, h_{ex})$ по формуле (2) или (5). Легко показать, что при $h_{ex} = 0$ намагниченность M отлична от нуля только при $K > K_c$, где K_c находится из уравнения:

$$\frac{1-y^N}{1+y^N}\frac{1+y}{1-y}=\frac{L+1}{L},\ y=thK_c. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь любую простую плоскую или пространственную кристаллическую решетку с координационным числом q. Пусть N – число узлов в минимальном замкнутом пути на этой решетке. Например, у квадратной решетки $q=4$, $N=4$, и шестиугольной – $q=3$, $N=6$ и т.д. Как известно, у модели Изинга не существует аналитического решения на произвольной простой решетке, за исключением решения Онзагера для квадратной решетке в отсутствии внешнего поля [1]. В качестве одного из возможных приближенных способов решения задачи Изинга на произвольной решетке можно предложить следующую процедуру. Возьмем на решетке кластер, состоящий из одного атома. Его взаимодействие с внешним полем и обменное взаимодействие с соседними атомами опишем с помощью «эффективного» поля h_1. Тогда средняя намагниченность этого атома равна:

$$M_1(h_1)=th(h_1). \tag{8}$$

Будем полагать $h_1=qK\mu+h_{ex}$ где μ – некоторый параметр, который можно интерпретировать как «эффективную намагниченность» соседнего атома. Если принять $\mu=M_1(h_1)$, то из (7) получим известное приближение среднего поля [1].

Рассмотрим теперь кластер из двух соседних атомов, находящихся в эффективном поле $h_2=(q-1)K\mu+h_{ex}$. Средняя намагниченность атома кластера [4]:

$$M_2(h_2)=\frac{sh(2h_2)}{ch(2h_2)+e^{-2K}}. \tag{9}$$

(Приняв $\mu=M_2(h_2)$, получим несколько улучшенный метод среднего поля.)

Возьмем замкнутую цепочку из N изинговских спинов $\sigma_1,\sigma_2,..\sigma_N$, находящихся в эффективном поле $h_N=(q-2)K\mu+h_{ex}$. Статистическая сумма этой системы имеет следующий вид:

$$Z=\sum_{\{\sigma\}}\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}(K_{\sigma i,\sigma i+1}+h_{N\sigma i}\right\}. \tag{10}$$

Эту статистическую сумму и среднюю намагниченность спина цепочки $M_N(h_N)$ можно вычислить тем же способом, что и (4):

$$M_N(h_N)=\frac{1}{N}\frac{\partial \mathrm{nZ}}{\partial h}=\frac{\lambda_1^N-\lambda_2^N}{\lambda_1^N+\lambda_2^N}\frac{e^K sh(h_N)}{\sqrt{e^{2K}sh^2(h_N)+e^{-2K}}}. \tag{11}$$

(Для этого случая можно построить улучшенный метод среднего поля, приняв $\mu=M_N(h_N)$.)

Оказывается, что к более точным результатам приводят не улучшения метода среднего поля, описанные выше, а сопоставление кластеров разного размера между собой, что можно понимать как вариант ренормгруппового преобразования фиксированного масштаба [5, 6].

Сопоставляя друг с другом описанные выше кластеры, получим три варианта самосогласованных уравнений для определения параметра μ и намагниченности M:

$$m = M_1(h_1) = M_2(h_2), \tag{12}$$

$$m = M_1(h_1) = M_N(h_N), \tag{13}$$

$$m = M_2(h_2) = M_N(h_N). \tag{14}$$

Можно показать, что уравнения (12) не что иное, как известный метод Бете, являющийся точным решением для модели Изинга на дереве Кейли [7, 8].

Видно, что при четных значениях q уравнение (6) совпадает с уравнением (13), в котором нужно положить $q = 2(L+1)$ и $\mu = \frac{-1}{4K}\ln x$. Иначе говоря, точно так же, как приближение Бете можно интерпретировать как замену кристаллической решетки деревом Кейли с тем же координационным числом, приближение, основанное на уравнении (13) для четных q, можно понимать как замену исходной решетки на описанную выше рекуррентную решетку с соответствующим значением L. Для приближений (13) и (14) при нечетных значениях q нам не удалось построить простой «геометрической интерпретации», однако мы полагаем, что и эти приближения можно понимать как точные решения на некоторых рекуррентных решетках.

Критическое значение параметра $K = K_c$ находится из условия $h_{ex} = 0$ и

$$\left|\frac{\partial M_i}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \left|\frac{\partial M_j}{\partial \mu}\right|_{\mu=0},$$

что приводит для уравнения (13) к

$$\frac{1-y^N}{1+y^N}\frac{1+y}{1-y} = \frac{q}{q-2}, \text{ где } y = thK_c, \tag{15}$$

а для уравнения (14) к

$$\frac{1-y^N}{1+y^N} = \frac{q-1}{q-2}(1-y). \tag{16}$$

Значения K_c для простых решеток, найденные из уравнений (15) и (16), приведены в табл. 1, где в качестве N брался размер минимального простого цикла для соответствующей решетки. В этой же таблице приведены точные значения K_c для этих решеток и K_c, найденные в приближении Бете. Для приближенных значений указано отклонение (в процентах) от соответствующего точного значения.

Таблица 1

Значения $K_c = J/kT_c$ (T_c – температура Кюри) в различных приближениях для простых решеток

Решетка	(q,N)	Точное значение	Приближение Бете	Формула (7)	Формула (8)
Квадратная	(4, 4)	0,441	0,347 (-21%)	0,361 (-18%)	0,370 (-16%)
Шестиугольная	(3, 6)	0,658	0,549 (-16%)	0,568 (-14%)	0,575 (-13%)
Треугольная	(6, 3)	0,275	0,203 (-26%)	0,212 (-23%)	0,219 (-20%)
Кубическая	(6, 4)	0,214	0,203 (-5,1%)	0,204 (-4,7%)	0,206 (-3,7%)
Тетраэдрическая	(4, 6)	0,370	0,347 (-6,2%)	0,348 (-5,9%)	0,349 (-5,7%)

Рассмотрим рекуррентную решетку, которая строится несколько иначе, чем описанные выше, а именно: возьмем шесть узлов, соединенные ребрами в замкнутый шестиугольник без диагоналей. К каждой второй стороне этого шестиугольника присоединим еще L «внешних» шестиугольников, к которым таким же образом присоединяются следующие шестиугольники и т.д. Построенная таким образом структура может служить приближением к плоской шестиугольной решетке при $L = 1$ или к объемной тетраэдрической при $L = 2$. На такой решетке, как и на любой другой рекуррентной решетке, можно точно решить задачу Изинга. Действительно, рассмотрим два соседних узла решетки, образующих общую сторону $L+1$ шестиугольников. Обозначив спины в этих узлах через σ_1 и σ_2, запишем статистическую сумму в следующем виде:

$$Z = e^{K+2h_{ex}} g^{L+1}(1,1) + 2e^{-K} g^{L+1}(1,-1) + e^{K-2h_{ex}} g^{L+1}(-1,-1), \tag{17}$$

где $g(\sigma_1, \sigma_2)$ – сумма тех множителей статсуммы, которые зависят только от спинов, лежащих на одной из $L+1$ ветвей. Перепишем (17) (с точностью до постоянного множителя) в виде:

$$Z = e^{K_2+2h_2} + 2e^{-K_2} + e^{K_2-2h_2},$$

где

$$K_2 = K + (L+1)\kappa \text{ и } h_2 = h_{ex} + (L+1)\chi$$

$$\kappa = \frac{1}{4}\ln\frac{g(-1,-1)g(1,1)}{g^2(1,-1)}, \quad \chi = \frac{-1}{4}\ln\frac{g(-1,-1)}{g(1,1)}.$$

Выражая с помощью (17) средние значение $m_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ и $s_2 = \sigma_1\sigma_2$, получим:

$$m_2 = \frac{sh(2h_2)}{ch(2h_2) + e^{-2K_2}}, \tag{18}$$

$$s_2 = \frac{ch(2h_2) - e^{-2K_2}}{ch(2h_2) + e^{-2K_2}}. \qquad (19)$$

Рассмотрим теперь на данной решетке один из шестиугольников. Статистическую сумму (17) можно представить в другом виде, проводя суммирование по спинам в вершинах этого шестиугольника. Статсумма в этом случае имеет вид:

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp\left\{K_6(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_4 + \sigma_5\sigma_6) + K(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_4\sigma_5 + \sigma_6\sigma_1) + h_6\sum_{i=1}^{6}\sigma_i\right\}. \qquad (20)$$

Здесь

$$K_6 = K + L\kappa, \; h_6 = h_{ex} + L\chi .$$

С помощью (20) можно найти среднее значение спина в вершинах шестиугольника m_6 и s_6 – среднее значение произведения спинов на сторонах, к которым присоединены внешние шестиугольники:

$$m_6 = \frac{1}{6}\frac{\partial \ln Z}{\partial h_6}, \; s_6 = \frac{1}{6}\frac{\partial \ln Z}{\partial K_6}.$$

Приравнивая теперь m_2 и m_6, а также s_2 и s_6, получим два уравнения относительно неизвестных κ и χ. Решение этой системы и дает, собственно, точное решение задачи Изинга на данной рекуррентной решетке. Легко показать, что при $h_{ex} = 0$ ненулевое решение для намагниченности $M = m_2 = m_6$ есть только при $K > K_c$. Значение K_c зависит от L и при $L = 1$ составляет 0,579, а при $L = 2$ – 0,349.

Решение задачи Изинга на данной рекуррентной решетке само по себе интересное и подсказывает способ обобщения самосогласованных уравнений типа (12)–(14). Рассмотрим на произвольной решетке с координационным числом q кластер из двух соседних атомов, каждый из которых находится в поле h_2, а обменное взаимодействие между ними описывается параметром K_2. Тогда средняя намагниченность m_2 и среднее значение произведения спинов s_2 вычисляются по формулам (18) и (19) соответственно. Возьмем теперь замкнутую цепочку из N изинговских спинов и будем считать, что каждый из них находится в поле h_N, а обменное взаимодействие между спинами цепочки описывается параметром K_N. Статистическая сумма для такой замкнутой цепочки дается выражением (ч), в котором нужно заменить K на K_N. Средняя намагниченность m_N определяется по формуле (10), а среднее значение произведения спинов есть

$$s_N = \frac{1}{N}\frac{\partial \ln Z}{\partial K_N} = \frac{\lambda_1^{N-1} + \lambda_2^{N-1}}{\lambda_1^N + \lambda_2^N} e^{K_N} ch(h_N) + \frac{\lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1}}{\lambda_1^N + \lambda_2^N} \frac{e^{2K} sh^2(h_N) - e^{-2K_N}}{\sqrt{e^{2K} sh^2(h_N) + e^{-2K_N}}}. \qquad (21)$$

Приравнивая теперь m_2 и m_N, а также s_2 и s_N, получим два уравнения относительно четырех неизвестных параметров: h_2, h_N, K_2 и K_N. Если, как и в уравнениях (11)–(13), полагать $h_2 = h_{ex} + (q-1)\chi$ и $h_N = h_{ex} + (q-2)\chi$, где χ – некоторый параметр, получим два уравнения с тремя неизвестными. Для того чтобы найти из этих уравнений намагниченность как функцию температурного параметра K, необходимо предположить некоторую связь между K и параметрами K_2 и K_N. Не зависимо от того, какой будет эта связь, можно найти предельные значения параметров K_{2c} и K_{Nc} при $h_{ex} = 0$ и $\chi \to 0$. Эти предельные значения, как легко показать, находятся из уравнений:

$$\sum_{i=0}^{N-2} z^i = \frac{q}{q-1-z}, \quad z\frac{1+z^{N-2}}{1+z^N} = y, \tag{22}$$

где $z = thK_{Nc}$, $y = thK_{2c}$.

Таблица 2

Значения K_{2c} и K_{Nc} для простых решеток

Решетка	(q,N)	точное значение	K_{2c}	K_{Nc}
Квадратная	(4, 4)	0,441	0,458 (3,9%)	0,402 (-8,8%)
Шестиугольная	(3, 6)	0,658	0,633 (-3,7%)	0,592 (-10%)
Треугольная	(6, 3)	0,275	0,347 (26%)	0,275 (0%)
Кубическая	(6, 4)	0,214	0,221 (3,2%)	0,212 (-1,0%)
Тетраэдрическая	(4, 6)	0,370	0,355 (-4,0%)	0,351 (-5,2%)

В таблице 2 указаны решения уравнений (22) при различных N и q, соответствующих простым решеткам. Конечно, оценка температуры Кюри по этим значениям должна производиться с учетом той связи, которая будет определена для параметров K, K_2 и K_N. Однако из табл. 2 видно, что значения K_{2c} и K_{Nc} достаточно близки между собой и каждое из них в отдельности может служить неплохой оценкой критического значения температурного параметра K_c. Отдельно следует отметить, что для треугольной решетки значение $K_{Nc} = \frac{1}{4}\ln 3$ совпадает с точным значением K_c для этой решетки [1].

Таким образом, нами построено обобщение приближения Бете, которое в некоторых случаях может быть интерпретировано как точное решение для модели Изинга на рекурсивных решетках. Оказывается, что учет наличия замкнутых циклов действительно улучшает оценку температуры Кюри, особенно в том случае, когда учитывается «некактусная» геометрия реальных решеток, то есть то обстоятельство, что каждая связь принадлежит более чем одному циклу.

1. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985. 486 с.
2. Займан Дж. Модели беспорядка: Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем. М.: Мир, 1982. 591 с.
3. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004. 664 с.
4. Сёмкин С.В., Смагин В.П. Методы получения самосогласованных уравнений для изинговского магнетика // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56, № 2. С. 9–14.
5. Серков Л.А. Преобразование фиксированного масштаба с близкодействующими спиновыми корреляциям // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 92, № 1. С. 759–762.
6. Сёмкин С.В., Смагин В.П. Использование метода усреднения по полям взаимодействия для построения ренормгруппового преобразования фиксированного масштаба // Физика твердого тела. 2013. Т. 55, №5. С. 892–895.
7. Сёмкин С.В. Смагин В.П. Приближение Бете в модели Изинга с подвижными примесями // Физика твердого тела. 2015. Т. 57, №5. С. 926–931.
8. Семкин С.В. Смагин В.П. Модель Поттса на решетке Бете с немагнитными примесями // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2015. Т. 148, №4. С. 729–733.
9. Ананикян Л.Н. Магнитные свойства 3Не на рекурсивных решетках // Известия НАН Армении. Физика. 2007. № 42(1). С. 17–33.
10. Ананикян Н.С., Ананикян Л.Н., Чахмахчян Л.А. Циклическое окно периода три в антиферромагнитных моделях Поттса и Изинга на рекуррентных решетках // Письма в ЖЭТФ. 2011. №94(1). С. 40–44.

Транслитерация

1. Be`kster R. Tochno reshaemy`e modeli v statisticheskoj mexanike. M.:Mir, 1985. 486 s.
2. Zajman Dzh. Modeli besporyadka: Teoreticheskaya fizika odnorodno neuporyadochenny`x sistem. M.: Mir, 1982. 591 s.
3. Zy`kov A.A. Osnovy` teorii grafov. M.: Vuzovskaya kniga, 2004. 664 s.
4. Syomkin S.V., Smagin V.P. Metody` polucheniya samosoglasovanny`x uravnenij dlya izingovskogo magnetika // Izv. vuzov. Fizika. 2013. T. 56, № 2. S. 9–14.
5. Serkov L.A. Preobrazovanie fiksirovannogo masshtaba s blizkodejstvuyushhimi spinovy`mi korrelyaciyam» // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. 1992. T. 92, № 1. S. 759–762.
6. Syomkin S.V., Smagin V.P. Ispol`zovanie metoda usredneniya po polyam vzaimodejstviya dlya postroeniya renormgruppovogo preobrazovaniya fiksirovannogo masshtaba // Fizika tverdogo tela. 2013. T. 55, № 5. C. 892–895.
7. Syomkin S.V. Smagin V.P. Priblizhenie Bete v modeli Izinga s podvizhny`mi primesyami // Fizika tverdogo tela. 2015. T. 57, № 5. S. 926–931.
8. Semkin S.V., Smagin V.P. Model` Pottsa na reshetke Bete s nemagnitny`mi primesyami // Zhurnal e`ksperimental`noj i teoreticheskoj fiziki. 2015. T. 148, № 4. S. 729–733.
9. Ananikyan L.N. Magnitny`e svojstva 3Ne na rekursivny`x reshetkax» // Izvestiya NAN Ar-menii. Fizika, 2007. № 42(1). S. 17–33.
10. Ananikyan N.S., Ananikyan L.N., Chaxmaxchyan L.A. Ciklicheskoe okno perioda tri v antiferromagnitny`x modelyax Pottsa i Izinga na rekurrentny`x reshetkax // Pis`ma v ZhE`TF. 2011. № 94(1). S. 40–44.

Для цитирования: Смагин В.П., Сёмкин С.В. Рекуррентные решетки и самосогласованные уравнения в модели Изинга / Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса. 2019. Т. 11, № 2. С. 139–149.

For citation: Smagin V.P., Semkin S.V. Recurrent lattices and self-consistent equations in the Ising model, *The Territory of New Opportunities. The Herald of Vladivostok State University of Economics and Service*, 2019, Vol. 11, № 2, pp. 139–149.

DOI dx.doi.org/10.24866/VVSU/2073-3984/2019-2/139–149

Дата поступления: 13.06.2019.