

Бегун А. С.
A. S. Begun

ВРАЩЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИСКА С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

ROTATION OF ELASTIC-PLASTIC DISK WITH VARIABLE SPEED

Бегун Александра Сергеевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, доцент кафедры математики и моделирования Владивостокского государственного университета экономики и сервиса (Россия, Владивосток). E-mail: ustinova@iacp.dvo.ru.

Aleksandra S. Begun – PhD in Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Associate Professor, Department of Mathematics and Modeling, Vladivostok State University of Economics and Service (Russia, Vladivostok). E-mail: ustinova@iacp.dvo.ru.

Аннотация. В работе проводится математическое моделирование процесса деформирования упругопластического диска при его вращении с изменяющейся скоростью (разгон, вращение с постоянной скоростью, торможение). При моделировании деформирования диска принимается гипотеза о плоском напряжённом состоянии. В условиях упругого равновесия получено точное аналитическое решение; при пластическом течении получена система уравнений, которая решается численно. В результате работы рассчитаны обратимые и необратимые деформации, напряжения, перемещения и скорости. Найдена закономерность развития области пластического течения.

Summary. This work involves mathematical modeling of the process of deformation of an elastic-plastic disk during its rotation with changing velocity (acceleration, rotation with constant velocity, and deceleration). In modeling the disk deformation, the hypothesis of a flat stress state is assumed. Under elastic equilibrium conditions an exact analytical solution has been obtained, and under plastic flow a system of equations has been obtained and solved numerically. As a result of the work, the reversible and irreversible deformations, stresses, displacements and velocities have been calculated. The regularity of development of plastic flow area has been found.

Ключевые слова: упругость, пластичность, вращающийся диск, остаточные деформации.

Key words: elasticity, plasticity, rotating disk, residual deformation.

УДК 539.37

Введение. Ввиду практической значимости напряжённо-деформируемое состояние вращающихся дисков рассматривалось неоднократно [1-16]. Для упругопластических задач о вращающихся дисках при постоянной скорости с условием пластичности Треска существуют точные аналитические решения [1-3]. Для условия пластичности Мизеса также получены решения ряда задач [4; 7; 11]. Как правило, расчёты проводятся при фиксированной скорости вращения диска, что не позволяет исследовать напряжённое состояние вращающихся дисков, работающих при изменяющихся режимах эксплуатации. Поведение упругого функционально-градиентного диска при уменьшающейся скорости вращения исследовано в работах [13; 14]. В [15] исследовано напряжённо-деформированное состояние вязкоупругого диска, вращающегося с переменной скоростью.

В настоящей работе рассматривается деформирование кольцевого диска, вращающегося с возрастающей, постоянной и уменьшающейся скоростью, в процессе упругого деформирования и при пластическом течении материала. При исследовании напряжённо-деформированного состояния дисков турбомашин их можно рассматривать как тонкие пластины. Поэтому для постановки и решения задачи считаем, что в диске реализуется плоское напряжённое состояние с симметрией полей напряжений, деформаций и перемещений относительно оси вращения.

Основные соотношения модели. Для описания процесса деформирования воспользуемся классической теорией течения упругопластичности в предположении малости деформаций. Ком-

поненты полных деформаций d_{ij} определяются как сумма обратимых e_{ij} и пластических p_{ij} составляющих:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

где u_i – компоненты вектора перемещений; x_j – координаты точки среды. В условиях упругого равновесия $p_{ij} = 0$.

Для тензора скоростей деформации в данном случае справедливы зависимости

$$\varepsilon_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{p}_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (1)$$

Напряжения в теле определяются упругими деформациями e_{ij} согласно закону Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij},$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе.

Будем считать, что материал деформируется обратимо, если напряжённое состояние соответствует в пространстве напряжений неравенству

$$f(\sigma_{ij}) < 0.$$

Поверхность нагружения $f(\sigma_{ij}) = 0$ в условиях принципа максимума Мизеса

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij}^p \geq 0,$$

где σ_{ij}^* – статически допустимое напряжение, является пластическим потенциалом. Тогда ассоциированный закон пластического течения записывается в форме

$$\varepsilon_{ij}^p = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\xi \geq 0, \quad f = 0, \quad \dot{f} > 0 \quad \text{нагрузка};$$

$$\xi = 0, \quad f < 0, \quad \dot{f} < 0 \quad \text{разгрузка};$$

$$\xi = 0, \quad f = 0, \quad \dot{f} = 0 \quad \text{нейтральное нагружение}.$$

В качестве поверхности нагружения примем условие максимального октаэдрического напряжения (цилиндр Мизеса):

$$\tau_{ij} \tau_{ji} = \frac{8}{3} k^2, \quad (2)$$

где $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$; k – предел текучести материала.

Начальное упругое равновесие. Рассмотрим задачу о деформировании кольцевого упруго-пластического диска постоянной толщины h (внутренний радиус $r = r_0$, внешний радиус $r = R$), который вращается с угловым ускорением $\frac{d\omega(t)}{dt}$, задаваемым на временных промежутках следующим образом:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \begin{cases} ate^{bt}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ a(2t_1 - t)e^{b(2t_1 - t)}, & t_1 \leq t \leq 2t_1 \\ 0, & 2t_1 \leq t \leq t_3 \\ a(t_3 - t)e^{b(t - t_3)}, & t_3 \leq t \leq t_4 \\ a(t - 2t_1 + t_3)e^{b(2t_1 - t + t_3)}, & t_4 \leq t \leq t_5 \\ 0, & t_5 \leq t \end{cases}. \quad (3)$$

Скорость вращения диска находится интегрированием (3) с использованием начального условия $\omega(0) = 0$ и условия непрерывности по времени. В начальный момент времени $t = 0$ считаем, что напряжения и деформации в материале отсутствуют.

Полагая $R/h \geq 10$, рассмотрим плоское напряжённое состояние диска, в случае осевой симметрии отличными от нуля остаются компоненты напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$.

Для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью граничные условия запишутся в виде

$$\sigma_{rr} |_{r=r_0} = \sigma_{rr} |_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} |_{r=R} = 0. \quad (4)$$

Отличными от нуля компонентами полных деформаций остаются следующие:

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad (5)$$

$$d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}.$$

Напряжения связаны с обратимыми деформациями законом Гука (1), для отличных от нуля компонент получим

$$\sigma_{rr} = \frac{2\lambda\mu(e_{rr} + e_{\varphi\varphi})}{\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{rr}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\lambda\mu(e_{rr} + e_{\varphi\varphi})}{\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}.$$

При вращении диска с изменяющейся скоростью на каждую точку диска, помимо центростремительного ускорения $r\omega^2$, будет действовать вращательное ускорение $r \frac{d\omega}{dt}$. То есть на диск будут действовать две системы инерционных сил, связанные с наличием центростремительного и вращательного ускорений. Следовательно, уравнения равновесия запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\varphi\varphi} = -\rho r^2 \omega^2, \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{r\varphi}) + \sigma_{r\varphi} = \rho r^2 \frac{d\omega}{dt}. \quad (6)$$

Интегрируя второе уравнение (6) при граничном условии (4) найдём

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{\rho}{4} \frac{d\omega}{dt} \left(r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right). \quad (7)$$

Введение функции напряжений $\varphi(r, t)$ в виде

$$\sigma_{rr} = \frac{\varphi}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \rho \omega^2 r^2$$

позволяет удовлетворить первому уравнению равновесия.

Используя соотношения (5) и учитывая, что при обратимом деформировании $d_{ij} = e_{ij}$, получим уравнение для определения функции напряжений $\varphi(r, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi(r, t)) \right] = -\frac{7\lambda + 6\mu}{2(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t) r.$$

Интегрируя данное уравнение и используя граничные условия (4), найдём

$$\varphi(r, t) = \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \frac{\rho \omega^2}{r} (r^2 - r_0^2) (R^2 - r^2).$$

По найденной функции $\varphi(r, t)$ находятся напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ и деформации d_{rr} , $d_{\varphi\varphi}$. Компонента перемещений u_r находится из известных деформаций: $u_r = r d_{\varphi\varphi}$. Для определения компоненты перемещений u_φ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 2d_{r\varphi} = \frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu}$$

при граничном условии

$$u_\varphi|_{r=r_0} = r_0 \sin \theta(t), \quad \theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt.$$

Полученное решение будет справедливо, если режим нагружения выбран таким образом, что ни в одной точке диска не развивается пластическое течение. Далее рассмотрим случаи, когда диск подвергается значительным нагрузкам и в некоторых его областях возможно пластическое течение.

Пластическое течение. При увеличивающейся скорости вращения диска напряжения в материале также растут, и в момент времени $t = t_*$ на некотором радиусе $r = r_*$ напряжённое состояние достигает поверхности нагружения. Для такой поверхности принимается условие пластичности Мизеса (2), которое для рассматриваемой задачи запишется в виде

$$\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2 = 2k^2. \quad (8)$$

Используя решение упругой задачи, найдём, что пластическое течение впервые начинается на внутренней поверхности $r = r_0$. Момент времени $t = t_*$ найдём решая уравнение

$$\left(\left(\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t_*) \left(2R^2 + 2 \frac{\lambda + 2\mu}{7\lambda + 6\mu} r_0^2 \right) \right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{d\omega}{dt} \Big|_{t=t_*} \left(r_0^2 - \frac{R^4}{r_0^2} \right) \right)^2 \right) = k^2.$$

Далее в диске развивается пластическое течение, и решение задачи теперь будем искать в двух областях: в упругой области $r_1 \leq r \leq R$ и в области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_1$. В области упругого деформирования, используя граничное условие на внешней поверхности диска, найдём

$$\begin{aligned} \varphi^e(r, t) &= -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t) \left(r^3 - \frac{R^4}{r} \right) + \frac{C_1}{2} \left(r - \frac{R^2}{r} \right), \\ \frac{\partial \varphi^e(r, t)}{\partial r} &= -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t) \left(3r^2 + \frac{R^4}{r^2} \right) + \frac{C_1}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\varphi^e(r, t)$ – функция напряжений в упругой области, соответственно, $\varphi^p(r, t)$ будем обозначать функцию напряжений в области пластического течения. Используя условие пластичности (8) и граничное условие (4), для нахождения функции $\varphi^p(r, t)$ в каждый фиксированный момент времени (временной шаг будем задавать согласно требуемой точности) получим уравнение

$$\frac{\varphi^{p^2}}{r^2} - \frac{\varphi^p}{r} \left(r^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \right) + \left(r^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(r^2 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right)^2 = k^2, \quad \varphi^p|_{r=r_0} = 0. \quad (10)$$

Решение данного уравнения может быть получено численно на каждом временном шаге при граничном условии на внутренней поверхности диска $r = r_0$ (4). Производная функции напряжений $\frac{\partial \varphi^p}{\partial r}$ в пластической области, согласно (10), имеет вид

$$\frac{\partial \varphi^p}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\varphi^p}{r} - \rho r^2 \omega^2 + \sqrt{k^2 - \frac{3}{4} \frac{\varphi^{p^2}}{r^2} - \frac{3}{16} \left(r^2 - \frac{R^2}{r^2} \right)^2 \rho^2 \omega^2}. \quad (11)$$

Из условия непрерывности напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ на упругопластической границе $r = r_1$ имеем $\varphi^p|_{r=r_1} = \varphi^e|_{r=r_1}$, $\frac{\partial \varphi^p}{\partial r}|_{r=r_1} = \frac{\partial \varphi^e}{\partial r}|_{r=r_1}$.

Последние соотношения позволяют найти неизвестную функцию C_1 из (9) и уравнение для определения упругопластической границы в каждый момент времени:

$$C_1 = 2 \left(\frac{r_1 \varphi^p|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t) (r_1^2 + R^2) \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi^p}{\partial r}|_{r=r_1} = -\frac{7\lambda + 6\mu}{8(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t) (r_1^2 - R^2) + \frac{\varphi^p|_{r=r_1} (r_1^2 + R^2)}{r_1 (r_1^2 - R^2)}.$$

Тогда функция напряжений в упругой области $\varphi^e(r, t)$ и её производная $\frac{\partial \varphi^e}{\partial r}$ находятся по формулам

$$\varphi^e = -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 \left(r^3 - \frac{R^4}{r} \right) + \left(\frac{r_1 \varphi^p|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 (r_1^2 + R^2) \right) \left(r - \frac{R^2}{r} \right),$$

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial r} = -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 \left(3r^2 + \frac{R^4}{r^2} \right) + \left(\frac{r_1 \varphi^p|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 (r_1^2 + R^2) \right) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right).$$

Для напряжений получим:

- в пластической области

$$\sigma_{rr}^p = \frac{\varphi^p}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^p = \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} + \rho \omega^2 r^2;$$

- в упругой области

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^e &= -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)}\rho\omega^2\left(r^2 - \frac{R^4}{r^2}\right) + \left(\frac{r_1\varphi^p(r_1)}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)}\rho\omega^2(r_1^2 + R^2)\right)\left(r - \frac{R^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^e &= -\frac{(7\lambda + 6\mu)\rho\omega^2}{16(\lambda + \mu)}\left(3r^2 + \frac{R^4}{r^2}\right) + \left(\frac{r_1\varphi^p(r_1)}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)}\rho\omega^2(r_1^2 + R^2)\right)\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \rho\omega^2r^2.\end{aligned}\quad (13)$$

Для нахождения скоростей и перемещений необходимо определить полные деформации и скорости деформаций в обеих областях. В упругой области деформации определяются по напряжениям (13) по формулам (7), для скоростей деформаций получим

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^{e1} = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr}^e - \lambda\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^e}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{e1} = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^e - \lambda\dot{\sigma}_{rr}^e}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\varphi}}{2\mu}.$$

В пластической области, используя закон Гука и ассоциированный закон пластического течения, для скоростей деформаций найдём

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^e &= \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr}^p - \lambda\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^p - \lambda\dot{\sigma}_{rr}^p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\varphi}}{2\mu}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^p \frac{2\sigma_{rr}^p - \sigma_{\varphi\varphi}^p}{2\sigma_{\varphi\varphi}^p - \sigma_{rr}^p}, \quad r \frac{\partial(\varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)}{\partial r} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Тогда для определения компоненты скоростей пластических деформаций $\varepsilon_{\varphi\varphi}^p$ получим уравнение

$$\frac{2\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^p - \lambda\dot{\sigma}_{rr}^p}{2\mu} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^p - \lambda\dot{\sigma}_{rr}^p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \right) + r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial r} + 3\varepsilon_{\varphi\varphi}^p \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^p - \sigma_{rr}^p}{2\sigma_{\varphi\varphi}^p - \sigma_{rr}^p} = 0. \quad (15)$$

Для решения данного уравнения необходимо найти граничное условие $\varepsilon_{\varphi\varphi}^p|_{r=r_1}$. Для этого воспользуемся условием непрерывности скоростей деформаций на упругопластической границе $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{e1}|_{r=r_1} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^e|_{r=r_1} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p|_{r=r_1}$.

Следовательно,

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^p|_{r=r_1} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{e1}|_{r=r_1} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^e|_{r=r_1} = \frac{2(\lambda + \mu)(\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^e|_{r=r_1} - \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^p|_{r=r_1}) - \lambda(\dot{\sigma}_{rr}^e|_{r=r_1} - \dot{\sigma}_{rr}^p|_{r=r_1})}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Так как напряжения являются непрерывными функциями от радиуса и времени, то изменение напряжений на упругопластической границе является непрерывным:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{rr}^e}{dt}\Big|_{r=r_1} - \frac{d\sigma_{rr}^p}{dt}\Big|_{r=r_1} &= \frac{\partial\sigma_{rr}^e}{\partial r}\Big|_{r=r_1} \frac{dr_1}{dt} - \frac{\partial\sigma_{rr}^p}{\partial r}\Big|_{r=r_1} \frac{dr_1}{dt} + \dot{\sigma}_{rr}^e\Big|_{r=r_1} - \dot{\sigma}_{rr}^p\Big|_{r=r_1} = 0, \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}^e}{dt}\Big|_{r=r_1} - \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}^p}{dt}\Big|_{r=r_1} &= \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}^e}{\partial r}\Big|_{r=r_1} \frac{dr_1}{dt} - \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}^p}{\partial r}\Big|_{r=r_1} \frac{dr_1}{dt} + \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^e\Big|_{r=r_1} - \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}^p\Big|_{r=r_1} = 0.\end{aligned}$$

Используя условие непрерывности разности напряжений $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}$ на упругопластической границе $r = r_1$ и первое уравнение равновесия (6), получим

$$\frac{\partial\sigma_{rr}^e}{\partial r}\Big|_{r=r_1} - \frac{\partial\sigma_{rr}^p}{\partial r}\Big|_{r=r_1} = \dot{\sigma}_{rr}^p\Big|_{r=r_1} - \dot{\sigma}_{rr}^e\Big|_{r=r_1} = 0.$$

Тогда граничное условие для $\varepsilon_{\varphi\varphi}^p$ запишется в виде

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^p|_{r=r_1} = \frac{(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \frac{dr_1}{dt} - \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^e}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \frac{dr_1}{dt} \right)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Уравнение (15) решается численно с использованием конечных разностей. По найденной $\varepsilon_{\varphi\varphi}^p$ можно определить ε_{rr}^p согласно (14), а затем распределение пластических деформаций $p_{\varphi\varphi}$ и p_{rr} . Компонента перемещений u_r находится из известных деформаций: $u_r = r(e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi})$.

Полученное решение будет справедливо при увеличивающейся скорости вращения $0 \leq t \leq 2t_1$. В течение промежутка времени $2t_1 \leq t \leq t_3$ диск вращается с постоянной скоростью, при этом напряжения и деформации также остаются неизменными и будут справедливы те же соотношения (11)-(12), что и полученные для момента времени $t = 2t_1$. В пластической области $r_0 \leq r \leq r_1(2t_1)$ при этом будет происходить нейтральное нагружение. Далее в промежутке времени $t_3 \leq t \leq t_4$ диск вращается с уменьшающейся скоростью и в материале будут три области: область упругого деформирования $r_1(2t_1) \leq r \leq R$, область разгрузки $r_2(t) \leq r \leq r_1(2t_1)$ и область нейтрального нагружения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$. В области нейтрального нагружения для функции напряжений и её производной будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n^2}}{r^2} - \frac{\varphi^n}{r} \left(r^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^n}{\partial r} \right) + \left(r^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^n}{\partial r} \right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(r^2 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right)^2 &= k^2; \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial r} &= \frac{1}{2} \frac{\varphi^n}{r} - \rho r^2 \omega^2 + \sqrt{k^2 - \frac{3}{4} \frac{\varphi^{n^2}}{r^2} - \frac{3}{16} \left(r^2 - \frac{R^2}{r^2} \right)^2 \rho^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

В области разгрузки $r_2(t) \leq r \leq r_1(2t_1)$ для определения функции напряжений φ^{nn} получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varphi^{nn}) \right] = \mu(3\lambda + 2\mu) \frac{p_{rr}(r, 2t_1) - \frac{\partial}{\partial r} (r p_{\varphi\varphi}(r, 2t_1))}{(\lambda + \mu)r} - \frac{7\lambda + 6\mu}{2(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t) r. \quad (17)$$

В области обратимого деформирования $r_1(2t_1) \leq r \leq R$, также как и ранее, найдём

$$\begin{aligned} \varphi^e(r, t) &= -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t) \left(r^3 - \frac{R^4}{r} \right) + \frac{C_1}{2} \left(r - \frac{R^2}{r} \right), \\ \frac{\partial \varphi^e(r, t)}{\partial r} &= -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t) \left(3r^2 + \frac{R^4}{r^2} \right) + \frac{C_1}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Система уравнений (16)-(18) вместе с условиями непрерывности функции напряжений, её производной на поверхностях $r = r_1(2t_1)$ и $r = r_2(t)$ и граничным условием на поверхности $r = r_0$ (4) позволяют найти функцию напряжений во всех трёх рассматриваемых областях, движущуюся границу $r_2(t)$ и функцию C_1 . Полученная система уравнений решается численно, в виду наличия движущейся границы $r_2(t)$ области $r_0 \leq r \leq r_2(t)$ и $r_2(t) \leq r \leq r_1(2t_1)$ на каждом временном шаге перестраиваются. Развитие области пластического течения показано на рис. 1, на рис. 2 приведено изменение с течением времени границы $r_2(t)$, отделяющей область разгрузки от области нейтрального нагружения. Согласно полученному решению, граница $r_2(t)$ движется в сторону

внутренней поверхности $r = r_0$ и с момента времени $t = t'$ достигает её. Далее в материале диска область $r_1(2t_1) \leq r \leq R$ остаётся областью обратимого деформирования, а в области с накопленными необратимыми деформациями $r_0 \leq r \leq r_1(2t_1)$ происходит разгрузка. Распределение напряжений в зависимости от радиуса в различные моменты времени показано на рис. 3.

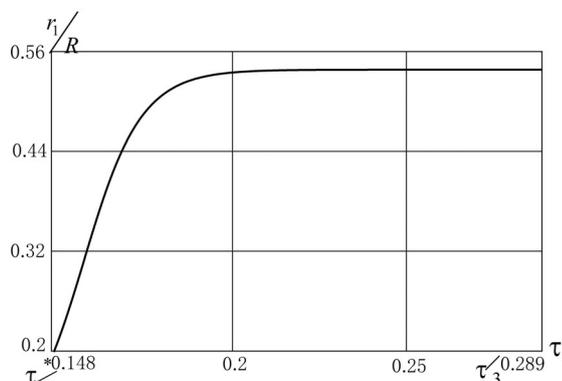


Рис. 1. Развитие области пластического течения

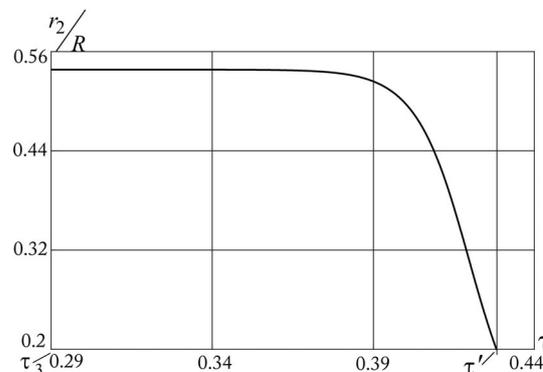


Рис. 2. Изменение границы $r_2(t)$, отделяющей область разгрузки от области нейтрального нагружения

Все графические зависимости приведены в безразмерных переменных $\tilde{r} = \frac{r}{R}$, $\tau = t\sqrt{\alpha}$,

$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}$, $\tilde{u}_i = \frac{u_i}{R}$ при значении постоянных

$$\lambda = 79,61 \text{ ГПа}, \quad \mu = 119,42 \text{ ГПа}, \quad \rho = 8000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \frac{r_0}{R} = 0,2, \quad a = 2 \text{ с}^{-3}, \quad b = 100 \text{ с}^{-1}.$$

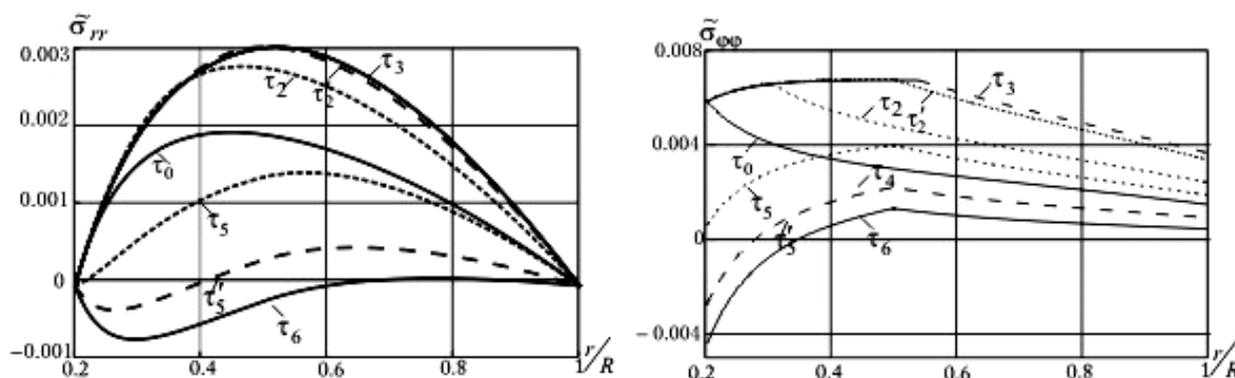


Рис. 3. Распределение компонент напряжений в зависимости от радиуса

Заключение. В рамках теории малых деформаций получены решения последовательности краевых задач о деформировании вращающегося диска с изменяющейся угловой скоростью. Рассмотрены упругое деформирование и пластическое течение. Получены закономерности развития областей пластического течения, найдены распределения обратимых и необратимых деформаций, напряжений и перемещений. Решения задач о вращающихся дисках могут быть использованы при расчётах деталей машин и агрегатов в период эксплуатации, а также для моделирования технологической операции предварительной обработки диска – ротационного автофретирования, применяемого для повышения циклической долговечности дисков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянушко, И. В. Расчёт на прочность вращающихся дисков / И. В. Демьянушко, И. А. Биргер. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
2. Левин, А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин / А. В. Левин. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 624 с.
3. Gamer U. Tresca's yield condition and the rotating disk. Transactions ASME: Journal of Applied Mechanics. – 1983. – 50. – P. 676-678.
4. Eraslan A. N. Stress distributions in elastic-plastic rotating disks with elliptical thickness profiles using Tresca and von Mises criteria // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2005. – 85. – P. 252-266.
5. You L. H., Zhang J. J. Elastic-plastic stresses in a rotating solid disk // International Journal of Mechanical Sciences. – 1999. – 41. – P. 269-282.
6. You L. H., Tang Y. Y., Zhang J. J., Zheng, C. Y. Numerical analysis of elastic-plastic rotating disks with arbitrary variable thickness and density // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – 37. – P. 7809-7820.
7. Aleksandrova N. Application of Mises yield criterion to rotating solid disk problem // Int. J. Eng. Sci. – 2012. – V. 51. – P. 333-337.
8. Eraslan A. N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // Acta Mech. – 2006. – 181 (1). – P. 43-63.
9. Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // Ing.-Arch. – 1984. – V. 54. – P. 345-354.
10. Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X. Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion // Zhejiang Daxue Xuebao (Gongxue Ban) / J. Zhejiang Univ.(Engng. Sci.). – 2008. – Vol. 42. – No. 9. – P. 1540-1544.
11. Rees D. W. A. Elastic-plastic stresses in rotating discs by von Mises and Tresca // ZAMM – J. Appl. Math. Mech. – 1999. – V. 79. No 4. – P. 281-288.
12. Guven U. Elastic-plastic stress distribution in the rotating annular disk with variable thickness // Archive of Applied Mechanics. – 1991. – № 8 (61). – P. 548-554.
13. Dai T., Dai H.-L. Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed // Appl. Math. Modell. – 2016. – V. 40, No 17-18. – P. 7689-7707.
14. Zheng Y., Bahaloo H., Mousanezhad D., Vaziri A., Nayeb-Hashemi H. Displacement and stress fields in a functionally graded fiber-reinforced rotating disk with nonuniform thickness and variable angular velocity // J. Eng. Mater. Technol. – 2017. – V. 139, No 3. – Art. 031010, P. 1-10.
15. Бегун, А. С. Деформирование вязкоупругого диска, вращающегося с ускорением / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2020. – № 3. – С. 143-151.
16. Прокудин, А. Н. Кусочно-линейный потенциал ползучести в деформациях ползучести быстровращающегося цилиндра / А. Н. Прокудин, Л. В. Ковтанюк, С. В. Фирсов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № III-1 (35). – С. 101-108.