

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

**ВТОРАЯ ДАЛЬНЕВОСТОЧНАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ,  
АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКЕ**

**Материалы конференции**

**17-19 ноября 2010 г.**

Владивосток

Издательство Дальневосточного университета

2010

УДК 517:519  
ББК 22.1  
В 87

*Утверждено к печати ученым советом  
Института математики и компьютерных  
наук Дальневосточного федерального  
университета*

*Редакционная коллегия:* Г.В. Алексеев, Р.В. Бризицкий, Е.В. Черныш,  
Е.Г. Прилепкина.

**Вторая Дальневосточная конференция студентов,  
В87 аспирантов и молодых ученых по теоретической  
и прикладной математике:** материалы конференции,  
– Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2010, – 79 с.

В сборнике представлены материалы Второй Дальневосточной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по теоретической и прикладной математике, проводимой Дальневосточным федеральным университетом в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы, мероприятие 1.1. "Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров", проект "Избранные проблемы теоретической и прикладной математики".

Д 1702010000  
180(03)-2010

УДК 517:519  
ББК 22.1

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА</b> .....	5
О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА КРИВИЗНЫ В РАССЛОЕНИИ БИВЕКТОРОВ НАД ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМИ ГРУППАМИ ЛИ О.П. Гладунова (АлтГУ, Барнаул).....	6
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ $NED$ -МНОЖЕСТВ Ю. В. Дымченко (ДВФУ, Владивосток).....	8
О РАДИУСАХ НЕЙМАНА НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ Т.В. Винокурова, С.В. Рахимов (ДВФУ, Владивосток).....	9
ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ С.И. Калмыков (ИПМ ДВО РАН, Владивосток).....	11
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТИЛЬТЬЕСА Д.Б. Карп(ИПМ ДВО РАН, Владивосток), И.С. Халова (ДВФУ, Владивосток) .....	12
ОБ ОЦЕНКАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ Д.А. Кириллова (ДВГСГА, Биробиджан).....	14
НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ШВАРЦА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ П.Е. Кузнецов (ДВФУ, Владивосток), Е.Г. Прилепкина (ИПМ ДВО РАН, Владивосток).....	17
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОТЫ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛИГОНОВ М.А. Первухин (ДВФУ, Владивосток).....	18
РЕШЕТКИ КОНГРУЭНЦИЙ НЕСВЯЗНЫХ ПОЛИГОНОВ Д.О. Птахов (ДВГУ, Владивосток) .....	19
ЗАДАЧА ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ КРУГОВОГО КОЛЬЦА Е.Г. Прилепкина, М.В. Скутельник (ДВФУ, Владивосток).....	22
ПОВЕДЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ПРИВЕДЕННЫХ МОДУЛЕЙ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ Е.Г. Прилепкина, К.С. Яремчук (ДВФУ, Владивосток).....	23
ДВУХТОЧЕЧНАЯ ТЕОРЕМА ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ Е.С. Фролова (МГУ, Владивосток).....	28

<b>ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА</b> .....	30
ПРИМЕНЕНИЕ КОНВЕКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ Е.А.Андреева (Дальрыбвтуз, Владивосток).....	30
О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ Р.В. Бризицкий, А.С. Савенкова (ИПМ ДВО РАН, Владивосток).....	31
ПОЛУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ ОЦЕНОК ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ ТОРГОВЫХ СИСТЕМ И АЛГОРИТМОВ М.Б. Букаренко (Самарский государственный технический университет, г. Самара).....	35
ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ И. С. Вахитов (ДВФУ, Владивосток).....	38
О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РАНГОВОГО МЕТОДА КЛАСТЕРИЗАЦИИ Г.В. Гренкин (ИМКН ДВФУ, Владивосток).....	39
ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИМ ПРОГРАММИРОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА А.В. Докучаев (Самарский государственный технический университет, г. Самара).....	42
ТЕОРЕМА НЕПРЕРЫВНОСТИ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РИСКА Т.А. Калмыкова (ДВГУ, Владивосток).....	46
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ЗАГРЯЗНЯЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА НА МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ А.В.Лобанов (Дальрыбвтуз, Владивосток) .....	47
АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ АВИАТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ ДАЛЬНЕВОСТОЧНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ А.П. Мартюшев(ДВФУ, Владивосток).....	48

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НИЗКОЙ КОНТРАСТНОСТИ ДЛЯ ОБРАЗЦОВ НЕПРЕРЫВНО-ЛИТОЙ ЗАГОТОВКИ И.И. Мацко, О.С. Логунова (ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», Магнитогорск).....	50
СИСТЕМА ОБРАБОТКИ ЭМПИРИЧЕСКИХ ДАННЫХ МЕТОДАМИ РАНГОВОГО АНАЛИЗА Т.В. Пикова, Е.В. Черныш (ДФУ, Владивосток).....	52
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОСТЕЙШЕГО ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ Т.Э. Селезнев (ДФУ, Владивосток).....	56
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ: РЕАЛИЗАЦИЯ В ПАКЕТЕ FEMLAB А.В. Сивунов, А.Г. Масловская (АмГУ, Благовещенск).....	60
ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА О.В. Соболева (ИПМ ДВО РАН, Владивосток).....	63
ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА И ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ А.Ю. Сазандрашвили (ДВГУ, Владивосток).....	69
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАБОЧИХ КОЛЕС МАЛОРАСХОДНЫХ ТУРБИН А.Ю. Фершалов, М.В. Грибиниченко, Л.П. Циганкова (Дальневосточный государственный технический университет).....	74
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА FREEFEM++ М.Ю. Фершалов (ДВГТРУ, Владивосток).....	77
ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ Е.А. Щербаков (ДФУ, Владивосток) .....	78

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

---

## О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА КРИВИЗНЫ В РАССЛОЕНИИ БИВЕКТОРОВ НАД ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМИ ГРУППАМИ ЛИ

*О.П. Гладунова (АлтГУ, Барнаул).*

Исследованию связи между топологией и кривизной риманова пространства посвящены работы многих математиков [1, 2]. Для четырехмерного ориентированного риманова многообразия  $M$  оператор Ходжа задает эндоморфизм  $*$  :  $\Lambda^2 T^* M \rightarrow \Lambda^2 T^* M$ , для которого  $*^2 = \text{Id}$ . В следствии чего

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-, \quad (1)$$

где  $\Lambda^+$  и  $\Lambda^-$  обозначают собственные пространства, отвечающие соответственно собственным значениям  $+1$  и  $-1$  оператора  $*$ . Относительно этого разложения оператор кривизны  $\mathcal{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$  представим в блочном виде [3]:

$$\mathcal{R} = \left( \begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\text{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\text{Id} \end{array} \right), \quad (2)$$

где  $W^+$  и  $W^-$  – матрицы *автодуальной* и *антиавтодуальной* составляющих тензора Вейля  $W$ .

В настоящей работе изучаются четырехмерные алгебры Ли, групп Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой, и для которых один из блоков  $W^+$ ,  $W^-$  или  $Z$  в разложении матрицы оператора кривизны обращается в нуль. При этом существенно используются результаты работ [4, 5, 6].

**Теорема 1.** *Пусть  $G$  – вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда  $W^+ = 0$  если и только если  $W = 0$ .*

**Теорема 2.** *Пусть  $G$  – вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой такая, что  $W^- = 0$ . Тогда либо  $W = 0$ , либо алгебра Ли группы  $G$  есть одна из алгебр следующего списка: алгебра Ли  $A_{4,9}^\beta$  ( $-1 < \beta \leq 1$ ) с набором структурных констант  $c_{1,4}^1 = 2A$ ,  $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A > 0$ ,  $\beta = 1$  или  $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A$ ,*

$c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A > 0$ ,  $\beta = 1$ ; алгебра Ли  $A_{4,11}^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) с набором структурных констант  $c_{1,4}^1 = 2A\alpha$ ,  $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A\alpha$ ,  $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -A$ ,  $A > 0$  или  $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A\alpha$ ,  $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A\alpha$ ,  $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -A$ ,  $A > 0$ .

**Теорема 3.** Пусть  $G$  – действительная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левинвариантной римановой метрикой такая, что  $Z = 0$ . Тогда алгебра Ли группы  $G$  изоморфна либо алгебре Ли  $4A_1$ , либо  $A_{3,6} \oplus A_1$ .

**Теорема 4.** Пусть  $G$  – действительная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левинвариантной римановой метрикой такая, что  $Z = 0$ . Тогда ее алгебра Ли изоморфна либо алгебре Ли  $2A_2$  с набором структурных констант  $c_{1,2}^2 = c_{3,4}^4 = A > 0$ , либо  $A_{4,5}^{\alpha,\beta}$  с набором структурных констант  $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L > 0$ , либо  $A_{4,6}^{\alpha,\beta}$  с набором структурных констант  $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 c_{3,4}^3 = \alpha L$ ,  $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = L > 0$ ,  $\alpha > 0$ , либо  $A_{4,9}^\beta$  с набором структурных констант  $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A$ ,  $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A > 0$ , либо  $A_{4,11}^\alpha$  с набором структурных констант  $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2\alpha A$ ,  $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \alpha A$ ,  $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = A$ ,  $A > 0$ ,  $\alpha > 0$ .

Заметим, что система обозначений вещественных четырехмерных алгебр Ли соответствует введенной Г.М. Мубаракзяновым в [6].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 08-01-98001, № 10-01-90000-Бел\_а), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ-5682.2008.1), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

## Литература

1. Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Однородные пространства: теория и приложения: монография. Ханты-Мансийск, 2008.
2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: пер. с англ.; в 2 т. – М., 1990.
3. Singer I.M., Thorpe J.A. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analysis, Papers in Honour of K. Kodaira, Univ. Tokyo Press, 1969. P. 355-365.
4. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. 2008. Т.11, № 2. С. 115-147.

5. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. 2009. Т.12, № 1. С. 40-116.
6. Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов, серия: математика. 1963. Т. 32, № 1. С. 144–123.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ $NE D$ -МНОЖЕСТВ

*Ю. В. Дымченко (ДВФУ, Владивосток).*

Конденсатором назовем тройку множеств  $(E_0, E_1, G)$ , где  $G$  — область в  $\overline{R}^n$ ,  $E_0, E_1$  — замкнутые непересекающиеся множества из  $\overline{G}$ .

Обозначим через  $F = (G, ds_F^2)$  поверхность над  $D$  с положительно определенной метрикой

$$ds_F^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j,$$

где  $g_{ij}(x)$ ,  $i, j = 1 \dots n$  — непрерывные функции на  $G$ , которые образуют симметрическую матрицу  $(g_{ij}(x))$ . Пусть  $g(x) = \det(g_{ij}(x))$ , а  $d\sigma = \sqrt{g(x)} dx$  — элемент объема  $F$ .

Пусть  $\varphi : R^+ \mapsto R^+$  —  $N$ -функция (т. е. выпуклая функция  $\varphi$  такая, что  $\varphi'(0) = 0$ ,  $\varphi'(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = \infty$ ), удовлетворяющая условию: существует  $C$  такое, что для любого  $t > 0$   $\varphi(2t) \leq C\varphi(t)$ . Это условие равносильно следующему: существует  $p$  такое, что  $1 < \frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leq p$  для любого  $t > 0$ . Отсюда следует, что для любых  $a \geq 1$  и  $t > 0$  верно неравенство

$$\varphi(at) \leq a^p \varphi(t).$$

Пусть дано некоторое семейство  $\Gamma$  кривых в  $G$ .  $(\varphi, F)$ -Модулем семейства  $\Gamma$  назовем величину

$$M_{\varphi, F}(\Gamma) = \inf \int \varphi(\rho) d\sigma,$$



где инфимум берётся по борелевским неотрицательным функциям  $\rho$  таким, что для любой кривой  $\gamma \in \Gamma$  выполнено  $\int_{\gamma} \rho ds_F \geq 1$ . Такие функции  $\rho$  называются допустимыми (обозначение:  $\rho \wedge \Gamma$ ).

Модулем конденсатора  $(E_0, E_1, G)$  назовём модуль семейства кривых, соединяющих  $E_0$  и  $E_1$  в  $G$  и обозначим через  $M_{\varphi, F}(E_0, E_1, G)$ .

Множество  $E \subset G$  назовем  $(\varphi, F)$  –  $NED$ -множеством, если для любых непересекающихся компактов  $E_0$  и  $E_1$  из  $G$  выполняется равенство  $M_{\varphi, F}(E_0, E_1, G) = M_{\varphi, F}(E_0, E_1, G \setminus E)$ .

Доказана следующая

**Теорема.** Пусть  $E$  – компакт, лежащий в области  $G$ .  $E$  является  $(\varphi, F)$  –  $NED$ -множеством тогда и только тогда, когда существует семейство координатных параллелепипедов  $\{\Pi\}$ , образующих покрытие Витали, для которых выполняется следующее свойство:

- Для  $(\varphi, F)$ -почти всех составных поверхностей  $\sigma \setminus E$ , отделяющих противоположные грани  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$  параллелепипеда  $\Pi$ ,

$$H_{p, F}^{n-1}(\sigma \setminus E) \geq AH_{p, F}^{n-1}(\Pi_0),$$

и это свойство выполняется для любой пары противоположных граней.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-000 28) и ДВО РАН (грант 07-III-A-01-0007).

## О РАДИУСАХ НЕЙМАНА НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

*Т.В. Винокурова, С.В. Рахимов (ДФУ, Владивосток).*

Развитие метода экстремальной метрики [1] и теории плоских конденсаторов [2] приводит к необходимости в некоторых задачах геометрической теории функций рассматривать функцию Неймана. Функция Неймана области  $B$  с полюсом в точке  $z_0 \in B$  определяется (с точностью до константы) как функция  $N_B(z, z_0)$ , удовлетворяющая условиям

- 1)  $N_B(z, z_0)$  гармоническая в  $B \setminus \{z_0\}$ ,
- 2)  $N_B(z, z_0) + \log |z - z_0|$  – гармоническая в окрестности точки  $z_0$ .
- 3) на границе  $\partial B$  нормальная производная является постоянной.

В области  $B$  для двух точек  $z_1, z_2$  определим константы

$$\begin{aligned}
N_{12}(B) &:= N_B(z_1, z_2) \\
N_{11}(B) &:= \lim_{z \rightarrow z_1} (N_B(z; z_1) + \log |z - z_1|), \\
N_{22}(B) &:= \lim_{z \rightarrow z_2} (N_B(z; z_2) + \log |z - z_2|)
\end{aligned}$$

Введем величину

$$\rho(B, z_1, z_2) = \exp(2N_{12}(B) - N_{11}(B) - N_{22}(B)).$$

Назовем  $\rho(B, z_1, z_2)$  *радиусом Неймана области  $B$  относительно точек  $z_1, z_2$* . Радиус Неймана является некоторым аналогом хорошо известного в геометрической теории функций понятия внутреннего радиуса. Если области  $B_1, B_2$  не пересекаются и лежат в единичном круге  $U := \{z : |z| < 1\}$ , то согласно неравенству Куфарева для произведений внутренних радиусов имеет место оценка

$$r(B_1, z_1)r(B_2, z_2) \leq \frac{|z_1 - z_2|^2(1 - |z_1|)^2(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2}.$$

В настоящем докладе рассматриваются неравенства для произведений радиусов Неймана неналегающих областей. Например, пусть непересекающиеся области  $B_1, B_2$  лежат в единичном круге  $U$ ,  $z_1, z_2 \in B_1$  и  $z_3, z_4 \in B_2$ . Тогда справедливо неравенство

$$\rho(B_1, z_1, z_2)\rho(B_2, z_3, z_4) \leq f(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

где через  $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$  обозначена величина

$$\frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)(1 - |z_3|^2)(1 - |z_4|^2)|z_2 - z_4|^2|1 - z_2\bar{z}_4|^2|z_1 - z_3|^2|1 - z_1\bar{z}_3|^2}{|z_1 - z_2|^2|1 - z_1\bar{z}_2|^2|z_3 - z_4|^2|1 - z_3\bar{z}_4|^2|z_1 - z_4|^2|1 - z_1\bar{z}_4|^2|z_2 - z_3|^2|1 - z_2\bar{z}_3|^2}.$$

## Литература

1. *Емельянов Е.Г.* О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами. II. // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2007. Т.350. С.40-51.
2. *Karp D., Prilepkina E.* Reduced modules with free boundary and its applications // Annales Academi Scient. Fen., V.34, 2009. 353-378

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ  
РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

*С.И. Калмыков (ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

В докладе будут представлены некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций, в основе доказательств которых лежат оценки радиусов однолиственности [1] вспомогательных функций и неравенства для однолистных ограниченных в единичном круге функций [2].

Введем обозначение

$$\mathcal{R}_{n,m}^c := \left\{ r(z) : r(z) = \frac{p(z)}{\prod_{k=1}^n (z - a_k)}, p(z) \in \mathcal{P}_m^c, a_k \in \mathbb{C}, |a_k| > 1, k = \overline{1, n} \right\},$$

Для функции  $r(z) \in \mathcal{R}_{n,m}^c$  определим функцию

$$B(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{a}_k z}{z - a_k}.$$

$$\|f\| := \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Имеет место следующая

**Теорема.** Пусть рациональная функция  $r(z)$  принадлежит классу  $\mathcal{R}_{n,m}^c$  и  $\|r\| = 1$ . Тогда имеют место следующие неравенства

$$\begin{aligned} & |z| \frac{(|z^{1+m-n} B(z)| + |r(z)|)(|z| - R)}{(|z^{1+m-n} B(z)| - |r(z)|)(|z| + R)} \\ & \leq \left| z(1 + m - n) - z^2 \frac{r'(z)}{r(z)} + B'(\frac{1}{z}) B(z) \right| \\ & \leq |z| \frac{(|z^{1+m-n} B(z)| - |r(z)|)(|z| + R)}{(|z^{1+m-n} B(z)| + |r(z)|)(|z| - R)}, \quad |z| > R \geq 1, \end{aligned}$$

где

$$R = \frac{\prod_{k=1}^n |a_k|}{|c_m|} + \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^n |a_k|^2}{|c_m|^2} - 1} \geq 1.$$

Если  $r(z) = z^k B(z)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , тогда  $R = 1$  и эти неравенства становятся равенствами для всех точек  $z$ ,  $|z| > 1$ .

## Литература

1. *Goodman A.W.* Univalent functions. I. Tampa, FL: Mariner Publ. 1983.
2. Дубинин В.Н. Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, №5. С. 16-43.

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТИЛЬТЬЕСА

*Д.Б. Карп(ИПМ ДВО РАН, Владивосток), И.С. Халова (ДВФУ, Владивосток)*

Преобразованием Стильтьеса неотрицательной и интегрируемой на  $(0, \infty)$  функции  $\rho$  называется функция

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{\rho(t)dt}{1+zt}, \quad (1)$$

определенная во всей комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси. Такие функции называют также функциями Стильтьеса. Для функций, представимых формулой (1) Стильтьесом была разработана подробная теория их представлений через непрерывные дроби, для них известна равномерная сходимость их диагональных аппроксимаций Паде на любом компакте, не содержащем точек отрицательной полуоси, нормальность таблицы Паде и ряд других фактов.

Для целых неотрицательных  $p$  и  $q$  и комплексных  $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$  обобщённый гипергеометрический ряд определяется формулой:

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} z^n, \quad (2)$$

где  $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1) = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$  - символ Похгаммера или восходящий факториал. Этот ряд сходится во всей комплексной  $z$ -плоскости при  $p \leq q$ , и в единичном круге при  $p = q+1$  (в втором случае сумма ряда обладает аналитическим продолжением во всю комплексную плоскость с разрезом по действительной оси, соединяющим точки 1

и  $\infty$ ). Сумма ряда, когда она определена, называется обобщённой гипергеометрической функцией. Из представления Эйлера

$${}_2F_1(a, b; c; -z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} dt}{(1+zt)^a},$$

справедливого при  $\Re(c) > \Re(b) > 0$ , сразу следует, что функция  ${}_2F_1(1, b; c; -z)$  является при  $c > b > 0$  функцией Стильтьеса. Естественным обобщением представления (1) является представление

$$g(z) = \int_0^\infty \frac{\rho(t) dt}{(1+zt)^\sigma}, \quad (3)$$

с некоторым  $\sigma > 0$ . Нетрудно показать, что при  $0 < \sigma < 1$  неотрицательная плотность  $\mu$ , заданная дробным интегралом Римана-Лиувилля

$$\mu(x; \sigma) = \frac{\sin(\pi\sigma)}{\pi} x^{\sigma-1} \int_x^\infty \frac{\rho(t) dt}{(t-x)^\sigma}, \quad (4)$$

даёт представление функции  $g(z)$  из (3) обычным преобразованием Стильтьеса

$$g(z) = \int_0^\infty \frac{\mu(t) dt}{1+zt}.$$

Следовательно функция  ${}_2F_1(\sigma, b; c; -z)$  при  $0 < \sigma < 1$  и  $c > b > 0$  также является функцией Стильтьеса.

Рассмотрим теперь функцию  ${}_{q+1}F_q$ ,  $q > 1$ . В докладе показано, что для нее справедливо представление обобщённым преобразованием Стильтьеса:

$${}_{q+1}F_q \left( \begin{matrix} \sigma, (a_q) \\ (b_q) \end{matrix} \middle| -z \right) = \int_0^1 \frac{\rho(t) dt}{(1+tz)^\sigma}, \quad (5)$$

справедливое при  $\Re \{ \sum_{k=1}^q (b_k - a_k) \} > 0$  и  $|\arg(1+z)| < \pi$ . Здесь

$$\rho(s) = \prod_{i=1}^q \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)} \frac{1}{s} G_{q,q}^{q,0} \left( s \middle| \begin{matrix} (b_q) \\ (a_q) \end{matrix} \right), \quad (6)$$

где  $G_{q,q}^{q,0}$  это G-функция Мейера. При дополнительном ограничении  $b_k > a_k > 0$  доказано неравенство  $\rho(t) > 0$ . Следовательно, в этом случае функция в левой части (5) является функцией Стильтьеса при  $0 < \sigma < 1$ .

**Благодарности.** Работа первого автора поддержана Дальневосточным Отделением РАН (грант 09-III-A-01-008) и РФФИ (грант 08-01-00028-а).

## ОБ ОЦЕНКАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ *Д.А. Кириллова (ДВГСА, Биробиджан).*

Получение оценок коэффициентов однолистных функций относится к числу классических задач геометрической теории функций комплексного переменного. В ряде случаев к оценкам некоторых комбинаций коэффициентов однолистных функций приводят задачи об экстремальном разбиении. Например, классическая оценка шварциана

$$|S_f(0)| \leq 6$$

означает, в частности, что для функций  $f(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$  известного класса  $S$  [1] справедливо неравенство

$$|c_3 - c_2^2| \leq 1.$$

Равенство достигается для функции Кёбе  $f(z) = z/(1-z)^2$ .

В настоящей заметке показано применение известного неравенства Нехари для доказательства как классических, так и новых оценок в классе  $\Sigma$  - функций

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots = z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k},$$

мероморфных (с полюсом в  $\infty$ ) и однолистных в  $|z| > 1$ . Заметим, что по сравнению с классом  $S$   $n$ -е тело коэффициентов в классе  $\Sigma$  имеет более сложную структуру. Точные оценки четвертого и следующих за ним коэффициентов в этом классе до сих пор неизвестны.

Если функции  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , однолистно отображают круг  $|z| < 1$  на взаимно неналегающие области и точка  $z = 0$  - точка регулярности

этих функций, то для любых вещественных постоянных  $\delta_k \neq 0$ , для которых  $\sum_{k=1}^n \delta_k = 0$ , справедливо неравенство (см. [1, с. 551])

$$\prod_{k=1}^n |f'_k(0)|^{\delta_k} \leq \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |f_k(0) - f_l(0)|^{-\delta_k \delta_l}. \quad (1)$$

**Теорема.** Если функция  $f(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$  принадлежит классу  $\Sigma$ , то справедливы неравенства

$$|a_1| \leq 1, \quad (2)$$

$$|a_1^2 + 2a_3| \leq 1, \quad (3)$$

$$|a_1^3 + 3a_1 a_3 + 3a_2^2 + 3a_5| \leq 1, \quad (4)$$

$$|a_1^4 + 4a_1^2 a_3 + 6a_3^2 + 8a_2 a_4 + 8a_1 a_2^2 + 4a_1 a_5 + 4a_7| \leq 1. \quad (5)$$

Равенство в каждом случае достигается для функции  $f(z) = z + z^{-1}$ .

Заметим, что первое неравенство теоремы вытекает непосредственно из теоремы площадей (см. [1, с. 49]). Остальные оценки являются новыми. Отметим, также, что ранее Г.М. Голузиным было установлена более сильная, чем неравенство (3), оценка  $|a_1|^2 + 2|a_3| \leq 1$ , справедливая только для функций  $\tilde{f}$  класса  $\Sigma$  таких, что множество  $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus f(\{z : |z| > 1\})$  звездообразно относительно начала координат.

*Схема доказательства теоремы.* Пусть  $\delta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условиям  $\delta_k \neq 0$ ,  $\sum_{k=1}^n \delta_k = 0$ . Пусть  $h_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , – некоторые функции, конформно и однолистно отображающие круг  $|\zeta| < 1$  на соответствующую область

$$D_k = \{z : |z| > 1, |\arg z - 2\pi(k-1)/n| < \pi/n\}$$

так, что  $h_k(0) = z_k = R \exp(i(\theta + 2\pi(k-1)/n))$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда, согласно (1), для функций  $F_k = f \circ h_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^n |F'_k(0)|^{\delta_k} \leq \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |F_k(0) - F_l(0)|^{-\delta_k \delta_l}.$$

Замечая, что

$$F_k(0) = f(z_k), \quad F'_k(0) = f'(z_k)h'_k(0), \quad |h'_k(0)| = \frac{4R R^n - 1}{n R^n + 1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

получаем неравенство

$$\left( \frac{4R R^n - 1}{n R^n + 1} \right)^{\sum_{k=1}^n \delta_k^2} \prod_{k=1}^n |f'(z_k)|^{\delta_k^2} \leq \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |f(z_k) - f(z_l)|^{-\delta_k \delta_l}. \quad (6)$$

Далее все неравенства теоремы получаем единым образом. Например, полагая в (6)  $n = 6$ ,  $\delta_k = (-1)^{k+1}$ ,  $z_k = Re^{i(\theta + \frac{2\pi(k-1)}{6})}$ ,  $k = 1, \dots, 6$ ,  $R > 1$ , приходим к неравенству

$$\left| \frac{\prod_{k=1}^6 f'(z_k)}{\prod_{k=1}^6 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^6 (f(z_k) - f(z_l))^2} \right| \leq \left( \frac{3 R^3 + 1}{2R R^3 - 1} \right)^6.$$

Сравнение асимптотических разложений обеих частей этого неравенства при  $R \rightarrow \infty$  завершает доказательство неравенства (4). Аналогично доказываются остальные неравенства теоремы при рассмотрении двух, четырех и восьми точек.

Идея изложенного доказательства была высказана автору профессором В.Н. Дубининым. Доказательство неравенства (4) было опубликовано в [2], в этой же статье предлагается существенно иное доказательство неравенства (5).

### Литература

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
2. Дубинин В.Н., Кириллова Д.А. Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций // Дальневост. мат. журн. 2010. Т.10. №2. С. 130–152.



НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ШВАРЦА  
ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

П.Е. Кузнецов (ДВФУ, Владивосток), Е.Г. Прилепкина (ИПМ ДВО  
РАН, Владивосток),

Обозначим через  $\mathfrak{M}(R)$  - класс мероморфных и однолистных в кольце  $K(R) = \{z : 1 < |z| < R\}$  функций  $f$ ,  $f(K) \subset \{|w| > 1\}$ ,  $f(\{|z| = 1\}) = \{|w| = 1\}$ , и  $G(z)$ - функцию Греча, отображающую  $K$  на внешность единичного круга с разрезом  $[p, +\infty]$ .

В работе [1] для функций класса  $\mathfrak{M}(R)$  была доказана оценка

$$\frac{|f'(z_1)f'(z_2)|}{|f(z_1) - f(z_2)|^2} \geq \frac{|G'(z_1)G'(z_2)|}{|G(z_1) - G(z_2)|^2}. \quad (1)$$

Полагая в этом неравенстве  $z_1 = z_0$ ,  $z_2 = z_0 + \rho$ , несложно установить асимптотику левой части неравенства при  $\rho \rightarrow 0$ :

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0 + \rho)|}{|f(z_0) - f(z_0 + \rho)|^2} = \frac{1}{\rho^2} \left| 1 + \frac{1}{6} S_f(z_0) \rho^2 + o(\rho^2) \right|.$$

Здесь  $S_f(z) = f'''(z)/f'(z) - (3/2)(f''(z)/f'(z))^2$  производная Шварца. Некоторые неравенства с участием производной Шварца вытекают из двухточечных теорем искажения. В частности, из (1) следует

**Теорема 1.** Если  $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$ , то для любого положительного  $z \in K$  справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} S_f(z) \geq S_G(z).$$

Применяя технику обобщенных приведенных модулей со свободной границей [2], нетрудно получить следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть  $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$ ,  $z_1, z_2$  - вещественные точки кольца  $K(R)$ , отличные от полюса. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{|f'(z_1)f'(z_2)|}{|f(z_1) - f(z_2)|^2} \frac{(|f(z_1)|^2 - 1)(|f(z_2)|^2 - 1)}{|1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)|^2} \geq \frac{|G'(z_1)G'(z_2)|}{|G(z_1) - G(z_2)|^2} \frac{(G(z_1)^2 - 1)(G(z_2)^2 - 1)}{(1 - G(z_1)G(z_2))^2}.$$

Вновь вычисляя асимптотику левой и правой части неравенства, получим, что для  $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$  и для любого положительного  $z \in K(R)$  выполняется

$$\operatorname{Re} S_f(z) - S_G(z) \geq 6 \left( \frac{|f'(z)|^2}{(|f(z)|^2 - 1)^2} - \frac{|G'(z)|^2}{(G(z)^2 - 1)^2} \right) \geq 0. \quad (2)$$

В настоящем докладе также обсуждаются необходимые и достаточные условия, при которых в (2) выполняется знак равенства.

### Литература

1. Дубинин В.Н., Костюченко Е.В. Экстремальные задачи теории функций, связанные с  $n$ -кратной симметрией // Зап. науч. семин. ПО-МИ. 2001. Т. 276. С. 83-111
2. Karp D., Prilepkina E. Reduced modules with free boundary and its applications // Annales Academi Scient. Fen., V.34, 2009. 353-378

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОТЫ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛИГОНОВ

*М.А. Первухин (ДВФУ, Владивосток)*

Если  $S$  – частично упорядоченный моноид (ЧУ-моноид), то под левым частично упорядоченным полигоном или, просто, частично упорядоченным полигоном (ЧУ-полигоном) понимается частично упорядоченное множество, являющееся левым полигоном над моноидом  $S$ , на котором действие частично упорядоченного моноида  $S$  является монотонным по каждому аргументу. Известно, что ЧУ-полигон является сильно плоским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям  $(P^<)$  и  $(E^<)$  (см. [1]). В [2] А. Golchin и Р. Rezaei были введены условия  $(PWP)$  и  $(PWP_\omega)$ , которые являются более слабыми условиями, чем условия  $(P^<)$  и  $(E^<)$ .

Условие  $(PWP)$  : для любых  $b, b' \in B$  и  $s \in S$  из неравенства  $sb \leq sb'$  следует, что существуют  $u, u' \in S$  и  $b'' \in B$  такие, что  $b = ub''$ ,  $b' = u'b''$  и  $su \leq su'$ .

Условие  $(PWP_\omega)$  : для любых  $b, b' \in B$  и  $s \in S$  из неравенства  $sb \leq sb'$  следует, что существуют  $u, u' \in S$  и  $b'' \in B$  такие, что  $b \leq ub''$ ,  $u'b'' \leq b'$  и  $su \leq su'$ .

В [3] V. Gould, L. Shaheen получены условия аксиоматизируемости классы ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию  $(PWP)$  и  $(PWP_\omega)$ . В данной работе исследуются вопросы полноты и модельной полноты классов ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию  $(PWP)$  и  $(PWP_\omega)$ .

**Теорема.** Пусть  $S$  – коммутативный ЧУ-моноид и класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию  $(PWP)$ , аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию  $(PWP)$ , полон;
- 2) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию  $(PWP)$ , модельно полон;
- 3) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию  $(PWP)$ , категоричен;
- 4) всякий ЧУ-полигон, удовлетворяющий условию  $(PWP)$ , является свободным над множеством ЧУ-полигоном;
- 5)  $S$  – частично упорядоченная абелева группа без одноэлементных подгрупп  $T$  таких, что ЧУ-полигон  ${}_S S/T$  удовлетворяет условию  $(PWP)$ .

**Теорема.** Не существует ЧУ-моноида, над которым аксиоматизируемый класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию  $(PWP_\omega)$ , был бы полон или модельно полон.

### Литература

1. Shi X. Strongly flat and po-flat S-posets // Comm. Algebra. 2005. V. 33. P. 4515-4531.
2. Golchin A., Rezaei P. Subpullbacks and flatness properties of S-posets // Communications in Algebra. (в печати)
3. Gould V., Shaheen L. Axiomatisability problems for S-posets // Semigroup forum. (в печати)

### РЕШЕТКИ КОНГРУЭНЦИЙ НЕСВЯЗНЫХ ПОЛИГОНОВ

*Д.О. Птахов (ДВГУ, Владивосток)*

В данной работе приведены критерии модулярности и дистрибутивности решетки конгруэнций несвязных полигонов.

Заметим, что полигон является унарной алгеброй. Решетки конгруэнций унаров описаны в [2]. В [3] изучены решетки слабых конгруэнций унарных алгебр.

Напомним некоторые определения, которые можно найти в [1].

Пусть  $S$  – моноид. Левым  $S$ -полигоном (или, просто, *полигоном*)  ${}_S A$  называется множество  $A$ , на котором определено действие моноида  $S$ , причем единица  $S$  действует на  $A$  тождественно.

Элементы  $a, b \in A$  называются *связанными* в полигоне  ${}_S A$ , если существуют  $n \in \mathbb{N}, c_i \in A$  ( $0 \leq i \leq n$ ) и  $s_j, t_j \in S$  ( $1 \leq j \leq n$ ) такие, что  $a = c_0, b = c_n, s_i c_{i-1} = t_i c_i$  для любого  $i, 1 \leq i \leq n$ . Полигон  ${}_S A$  называется *связным*, если любые два элемента в нем связаны.

Наибольший по включению связный подполигон полигона  ${}_S A$  называется *компонентой связности* полигона  ${}_S A$ . Ясно, что любой полигон представим в виде копроизведения своих компонент связности.

*Конгруэнцией*  $\theta$  на полигоне  ${}_S A$  называется отношение эквивалентности на множестве  $A$  такое, что

$$\langle a, b \rangle \in \theta \Rightarrow \langle sa, sb \rangle \in \theta$$

для любых  $a, b \in A, s \in S$ .

Для подполигона  ${}_S B$  полигона  ${}_S A$  определим *конгруэнцию Руса*  $\rho_{_S B}$  следующим образом:

$$\langle a, b \rangle \in \rho_{_S B} \Leftrightarrow a, b \in B \text{ или } a = b.$$

Множество всех конгруэнций любого полигона  ${}_S A$  образует решетку, которая называется *решеткой конгруэнций полигона  ${}_S A$*  и обозначается  $Con({}_S A)$ .

**Утверждение 1.** Если в полигоне  ${}_S A$  более трех компонент связности, то решетка конгруэнций этого полигона  $Con({}_S A)$  не является модулярной.

**Утверждение 2.** Если в полигоне  ${}_S A$  более двух компонент связности, то решетка конгруэнций этого полигона  $Con({}_S A)$  не является дистрибутивной.

Для формулировки следующего утверждения введем понятие сквозной конгруэнции. Пусть  ${}_S A$  выполняется:  ${}_S A = {}_S A_1 \sqcup {}_S A_2$ . Тогда конгру-

энцию  $\theta$  на полигоне  ${}_S A$  назовем *сквозной конгруэнцией*, если существуют такие  $a \in A_1$  и  $b \in A_2$ , что  $\langle a, b \rangle \in \theta$ .

**Утверждение 3.** Если полигон  ${}_S A$  содержит две компоненты связности и на  ${}_S A$  существует сквозная конгруэнция, то решетка конгруэнций этого полигона  $Con({}_S A)$  не является модулярной.

Из данных утверждений получаем следующие теоремы.

**Теорема 1.** Решетка конгруэнций  $Con({}_S A)$  полигона  ${}_S A$  модулярна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) полигон  ${}_S A$  содержит не более трех компонент связности;
- 2) решетки конгруэнций всех его компонент связности модулярны;
- 3) в решетке конгруэнций  $Con({}_S A)$  полигона  ${}_S A$  нет сквозных конгруэнций.

**Теорема 2.** Решетка конгруэнций  $Con({}_S A)$  полигона  ${}_S A$  дистрибутивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) полигон  ${}_S A$  содержит не более двух компонент связности;
- 2) решетки конгруэнций всех его компонент связности дистрибутивны;
- 3) в решетке конгруэнций  $Con({}_S A)$  полигона  ${}_S A$  нет сквозных конгруэнций.

Таким образом, изучение решеток конгруэнций полигонов сводится к изучению решеток связных полигонов.

## Литература

1. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., Acts and Categories*// Berlin: Walter de Gruyter. 2000.
2. *Егорова Д.П.* Структура конгруэнций унарной алгебры// Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. 1978. Вып. 5. С. 11 – 44
3. *Птахов Д.О.* Решетки слабых конгруэнций унарных алгебр// Синтаксис и семантика логических систем. 2010. Вып. 3. С. 83 – 85.

## ЗАДАЧА ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

*Е.Г. Прилепкина, М.В. Скутельник (ДВФУ, Владивосток).*

Задачи об экстремальном разбиении заключаются в определении верхней грани произведений вида  $R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} \dots R_n^{\alpha_n}$ , где  $R_k$  некоторые внутренние радиусы попарно неналегающих областей  $G_k$  и числа  $\alpha_k$  удовлетворяют определенным условиям. Эти задачи восходят к М.А. Лаврентьеву и имеют богатую историю. Существуют два метода их изучения: экстремально-метрический и емкостной. Систематическому развитию первого метода посвящены, например, работы Г.В. Кузьминой, Е.Г. Емельянова, А.Ю. Солынина, в то время как емкостной подход развивается в основном в работах В.Н. Дубинина и его учеников. Мы придерживаемся емкостного подхода. В недавней работе Дубинина В.Н., Кирилловой Д.А. [1] доказаны неравенства для произведений радиусов Робена неналегающих областей взамен внутренних радиусов. Пусть область  $G$  ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых. Функцией Робена с полюсом в точке  $z_0 \in G$  относительно множества  $\Gamma \subset \partial G$  называется функция  $g(z) = g_G(z, z_0, \Gamma)$ , удовлетворяющая условиям:

- 1)  $g(z)$  непрерывная на  $\overline{G} \setminus \{z_0\}$ , непрерывно дифференцируемая на  $\overline{G} \setminus (\Gamma \cup \{z_0\})$ , гармоническая в  $G \setminus \{z_0\}$ ;
- 2)  $g(z) = 0$  при  $z \in \Gamma$ ,
- 3)  $\partial g / \partial n = 0$  при  $z \in \partial G \setminus (\Gamma \cup \{z_0\})$ ,
- 4)  $g(z) + \log |z - z_0|$  - гармоническая функция в окрестности точки  $z_0$  (здесь  $\partial g / \partial n$  означает дифференцирование вдоль внешней нормали к границе).

В случае произвольной конечносвязной области  $G$  функция Робена определяется с помощью конформного и однолистного отображения  $f$  на аналитическую жорданову область.

Радиусом Робена называется величина

$$r(G, \Gamma, z_0) := \exp \lim_{z \rightarrow z_0} (g_G(z, z_0, \Gamma) + \log |z - z_0|).$$

Обозначим через  $K(t)$  концентрическое круговое кольцо  $\{t < |z| < 1\}$  и через  $T(z)$  - любое конформное отображение  $K(t)$  на плоскость с разрезами по действительной оси. В работе [1] доказана

**Теорема 1.** Пусть непересекающиеся области  $G_1, G_2$  лежат в кольце  $K(t)$  и граничные множества  $\Gamma_j \subset \partial G_j$  удовлетворяют условию  $\partial G_j \cap K(t) \subset \Gamma_j, j = 1, 2$ . Тогда для внутренних точек  $z_1 \in G_1$  и  $z_2 \in G_2$  справедливо неравенство

$$r(G_1, \Gamma_1, z_1)r(G_2, \Gamma_2, z_2) \leq \frac{|T(-|z_1|) - T(|z_2|)|^2}{|T'(-|z_1|)T'(|z_2|)|}. \quad (1)$$

В настоящем докладе мы приводим другое доказательство теоремы 1, изучаем случаи равенства и рассматриваем новые оценки произведений радиусов Робена областей, расположенных в круговом кольце. В частности, доказана

**Теорема 2.** При условиях теоремы 1 справедливо неравенство

$$r(G_1, \Gamma_1, z_1)r(G_2, \Gamma_2, z_2) \leq \left| \frac{4|z_1|^2|z_2|^2 \frac{\sin(i \log |z_1|)}{\theta_1(i \log |z_1|)} \frac{\sin(i \log |z_2|)}{\theta_1(i \log |z_2|)}}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \right| \left| \frac{\theta_1\left(\frac{i}{2} \log(z_1 \bar{z}_2)\right) \theta_1\left(\frac{i}{2} \log(z_1/z_2)\right)}{\theta_1'(0)} \right|^2. \quad (2)$$

Равенство в (2) достигается тогда и только тогда, когда  $\overline{G_1} \cup \overline{G_2} = \overline{K(t)}$ ,  $Int(\Gamma_j) = \partial G_j \cap K(t)$  и на множестве  $Int(\Gamma_j), j = 1, 2$ , выполняется

$$\left| \frac{\theta_1\left(\frac{i}{2} \log(z \bar{z}_2)\right) \theta_1\left(\frac{i}{2} \log(z/z_2)\right)}{\theta_1\left(\frac{i}{2} \log(z \bar{z}_1)\right) \theta_1\left(\frac{i}{2} \log(z/z_1)\right)} \right| = const.$$

Здесь  $\theta_1(z) := \theta_1(z, t)$  означает эллиптическую тета-функцию Якоби.

## Литература

1. Дубинин В.Н., Кириллова Д.А. К задачам об экстремальном разбиении // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2008. Т.357. С.54-74.

## ПОВЕДЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ПРИВЕДЕННЫХ МОДУЛЕЙ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

*Е.Г. Прилепкина, К.С. Яремчук (ДВФУ, Владивосток).*

Пусть  $B$  — конечносвязная область на комплексной сфере  $\overline{\mathbb{C}}$  без вырожденных граничных точек либо вся комплексная плоскость. Обозначение  $\overline{B}$  означает компактификацию  $B$  посредством простых концов Каратеодори, граница  $\partial B$  — совокупность простых концов. Под окрестностью

будем понимать любое открытое в  $\overline{B}$  множество. Если это не вызовет недоразумений, мы будем отождествлять элемент  $\overline{B}$ , соответствующий внутренней точке  $B$ , с самой этой точкой, а носитель достижимой граничной точки и саму эту точку будем обозначать одной и той же буквой. В случае жордановой области  $B$  понятия замыкания  $\overline{B}$  и границы  $\partial B$  совпадают с обычными, а окрестность в  $\overline{B}$  есть пересечение открытого в  $\overline{C}$  множества с  $\overline{B}$ .

Пусть  $z_0$  достижимая граничная точка  $\partial B \setminus \Gamma$  области  $B$ ,  $z_0 \neq \infty$ ,  $\alpha_B(z_0)\pi$  — внутренний угол области  $B$  с вершиной  $z_0$  и пусть существует конформное и однолистное отображение  $f$  области  $B$  на аналитическую жорданову область  $f(B)$  такое, что в некоторой окрестности  $z_0$  имеет место разложение

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{1/\alpha_B(z_0)}(c(z_0) + o(1)), \quad z \rightarrow z_0, \quad (1)$$

$c(z_0) \neq 0$ . Если  $z_0 = \infty$ , локальный параметр  $(z - z_0)$  в разложении (1) нужно заменить на  $1/z$ . Достижимые граничные точки  $z_0 \in \partial B$ , для которых выполняется (1), а также внутренние точки  $z_0 \in B$  будем далее называть *допустимыми* точками для  $B$ . Для внутренней точки  $z_0 \in B$  полагаем  $\alpha_B(z_0) = 2$ .

Пусть  $\Gamma$  — замкнутое подмножество  $\partial B$ , состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент. В этом случае определена функция Робена  $g_B(z, z_0, \Gamma)$  области  $B$  и множества  $\Gamma$  с полюсом в допустимой точке  $z_0 \in \overline{B} \setminus \Gamma$ . Для аналитической жордановой области  $g(z) := g_B(z, z_0, \Gamma)$  определяется условиями:  $g(z)$  вещественнозначная непрерывная на  $\overline{B} \setminus \{z_0\}$ , непрерывно дифференцируемая на  $\overline{B} \setminus (\Gamma \cup \{z_0\})$ , гармоническая в  $B \setminus \{z_0\}$  и такая, что  $g(z) = 0$  при  $z \in \Gamma$ ,  $\partial g / \partial n = 0$  при  $z \in \partial B \setminus (\Gamma \cup \{z_0\})$ , причем  $g(z) + \log |z - z_0|$  — гармоническая функция в окрестности точки  $z_0$  (символ  $\partial / \partial n$  означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к границе). Для произвольной конечносвязной области  $B$  полагаем по определению  $g_B(z, z_0, \Gamma) := \alpha_B(z_0)g_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(\Gamma))$ , если  $z_0 \in \partial B$ , и  $g_B(z, z_0, \Gamma) := g_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(\Gamma))$  при  $z_0 \in B$ . Здесь  $f(z)$  определено выше и удовлетворяет (1).

Радиусом Робена называется величина

$$r(B, \Gamma, z_0) := \exp \lim_{z \rightarrow z_0} (g_B(z, z_0, \Gamma) + \log |z - z_0|).$$

Если  $\Gamma = \partial B$ , то функция Робена совпадает с хорошо известной функцией Грина, а радиус Робена — с внутренним радиусом  $r(B, z_0)$  области



$B$  в точке  $z_0$ .

В случае пустого множества  $\Gamma$  нам потребуется двухполюсная функция Неймана  $n(z) := n_B(z, z_0; z^*)$ , которая для аналитической жордановой области определяется как функция, удовлетворяющая условиям:

- 1)  $n(z)$  гармоническая в  $\overline{B} \setminus \{z_0, z^*\}$ ;
- 2)  $\partial n(z)/\partial n = 0$  при  $z \in (\partial B) \setminus \{z_0 \cup z^*\}$ ;
- 3)  $n(z) + \log |z - z_0|$  — ограниченная гармоническая функция в некоторой окрестности первого полюса  $z_0$ ,
- 4) в окрестности второго полюса  $z^*$  выполняется разложение

$$n(z) = \frac{\alpha_B(z_0)}{\alpha_B(z^*)} \log |z - z^*| + o(1), \quad z \rightarrow z^*, z \in B,$$

где  $\alpha_B(z)\pi$ , как и раньше, внутренний угол области  $B$  с вершиной в точке  $z$ .

Для произвольной конечносвязной области  $B$  и допустимых точек  $z_0, z^*$  определим функцию Неймана по формуле

$$n_B(z, z_0; z^*) = \beta_B(z_0) n_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(z^*)) - \frac{\alpha_B(z_0)}{\alpha_B(z^*)} \log |c(z^*)|^{\beta_B(z^*)},$$

где  $f$  — однолистное конформное отображение  $B$  на аналитическую жорданову область;  $\beta_B(z) = 1$  для внутренней точки  $z \in B$ ,  $\beta_B(z) = \alpha_B(z)$  для граничных точек  $z \in \partial B$ ,  $c(z^*)$  константа из разложения (1) в окрестности точки  $z^*$ . Для всей комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  полагаем по определению

$$n_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0; z^*) = \log |(z - z^*)(z_0 - z^*)/(z - z_0)|, \quad z^* \neq \infty,$$

$$n_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0; z^*) = -\log |z - z_0|, \quad z^* = \infty.$$

Непосредственно из определений функций Робена и Неймана в окрестности конечной точки  $z_0$  вытекают разложения

$$g_B(z, z_0, \Gamma) = -\log |z - z_0| + R(z_0) + o(1), \quad z \rightarrow z_0, \quad (2)$$

$$n_B(z, z_0; z^*) = -\log |z - z_0| + N(z_0, z^*) + o(1), \quad z \rightarrow z_0. \quad (3)$$

Ясно также, как изменятся определения этих понятий, если точка  $z_0 = \infty$  (локальный параметр  $z - z_0$  нужно заменить на параметр  $1/z$ ).

Приступим теперь к определению приведенного модуля. Мы опустим определение приведенного модуля, использующее асимптотическую формулу вырождающегося конденсатора. Вместо этого воспользуемся выражением приведенного модуля через функции Робена или Неймана. Пусть

область  $B$  как и выше и пусть  $\Gamma$  — замкнутое подмножество  $\partial B$ , причем либо  $\Gamma = \emptyset$ , либо  $\Gamma$  состоит из конечного числа невырожденных связных компонент. Пусть  $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$  — совокупность различных допустимых точек в  $\overline{B} \setminus \Gamma$ ,  $\alpha_k \pi$  — внутренний угол области  $B$  с вершиной в точке  $z_k$ ,  $\alpha_k \neq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$  — совокупность вещественных чисел,  $\sum_{k=1}^n \delta_k^2 \neq 0$ , и  $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$ , где  $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r^{\nu_k}$ ,  $\mu_k, \nu_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , — произвольные положительные числа,  $r > 0$ . Для непустого множества  $\Gamma$  определим величины  $R_{kl}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, \dots, n$ , полагая

$$R_{kl} := g_B(z_k, z_l, \Gamma), \quad k \neq l;$$

$$R_{kk} := \lim_{z \rightarrow z_k} (g_B(z, z_k, \Gamma) + \log |z - z_k|) = R(z_k).$$

Для пустого множества  $\Gamma$  мы требуем, дополнительно, чтобы

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \delta_k}{\nu_k} = 0. \quad (4)$$

Без ограничения общности можно считать, что  $\delta_1 \neq 0$ . При  $\Gamma = \emptyset$  зададим  $R_{kl}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, \dots, n$ , соотношениями

$$R_{1m} = R_{m1} = 0, \quad m = 1, \dots, n;$$

$$R_{kl} := n_B(z_k, z_l; z_1), \quad k \neq l; \quad R_{kk} := N(z_k, z_1), \quad k = 2, \dots, n, l = 2, \dots, n.$$

Здесь величины  $N(z_k, z_1)$  определяются из разложения (3) функции  $n_B(z, z_k; z_1)$  в окрестности точки  $z_k$ .

Мы будем рассматривать "нормированный" приведенный модуль

$$\widetilde{M}(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) := \sum_{k,l=1}^n \frac{\alpha_k \delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} R_{kl} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \delta_k^2 \log \mu_k}{\nu_k^2}.$$

При условиях существования приведенного модуля, введем функцию

$$u(z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{\nu_k} g_B(z, z_k, \Gamma), & \text{для } \Gamma \neq \emptyset, \\ \sum_{k=2}^n \frac{\delta_k}{\nu_k} n_B(z, z_k; z_1), & \text{для } \Gamma = \emptyset, \end{cases}$$

которую будем называть *потенциальной* функцией для области  $B$ , множества  $\Gamma$  и совокупностей  $Z, \Delta, \Psi$ . Применяя (2) для непустого множества  $\Gamma$ , и (3), (4) при  $\Gamma = \emptyset$ , убеждаемся, что в некоторых окрестностях точек  $z_k$  имеют место разложения

$$u(z) = -\frac{\delta_k}{\nu_k} \log |z - z_k| + a_k + o(1), \quad z \rightarrow z_k, \quad z \in B.$$

При этом выполняется условие

$$\sum_{k=1}^n \frac{\delta_k \alpha_k}{\nu_k} a_k = \widetilde{M}(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2 \alpha_k}{\nu_k^2} \log \mu_k. \quad (5)$$

Соотношение (5) устанавливает связь между приведенным модулем и потенциальной функцией.

Вещественную функцию  $v$  назовем *допустимой* функцией для области  $B$ , множества  $\Gamma$  и совокупностей  $Z, \Delta, \Psi$ , если она непрерывна в  $\overline{B} \setminus \bigcup_{k=1}^n \{z_k\}$ , равна нулю на  $\Gamma$ , удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки области  $B$ , за исключением, может быть, конечного числа таких точек, и если в окрестностях точек  $z_k$  имеют место разложения

$$v(z) = -\frac{\delta_k}{\nu_k} \log |z - z_k| + b_k + o(1), \quad z \rightarrow z_k, \quad z \in B,$$

где  $b_k, k = 1, \dots, n$ , — некоторые вещественные постоянные.

В настоящем докладе рассматриваются различные геометрические преобразования, при которых приведенный модуль не уменьшается. Основные идеи получения результатов взяты из работы [1]. Следующая теорема, например, представляет собой частный случай поляризации.

**Теорема.** Пусть множества  $B$  и  $\Gamma$  симметричны относительно прямой  $l$ , и среди совокупности  $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$  нет симметричных относительно  $l$  точек. Обозначим  $L^+$  и  $L^-$  замкнутые полуплоскости, на которые  $l$  разбивает плоскость  $\overline{C}$ . Пусть совокупность точек  $PZ = \{pz_k\}_{k=1}^n$  построена из совокупности  $Z$  по следующему правилу: если  $\delta_k \geq 0$ , то  $pz_k$  совпадает с точкой  $z_k$  при  $z_k \in L^+$ , и  $pz_k$  совпадает с симметричной для  $z_k$  точкой относительно  $l$  при  $z_k \in L^-$ ; если же  $\delta_k < 0$ , то  $pz_k$  совпадает с точкой  $z_k$  при  $z_k \in L^-$ , и  $pz_k$  совпадает с симметричной для  $z_k$  точкой относительно  $l$  при  $z_k \in L^+$ . Тогда

$$\widetilde{M}(B, \Gamma, Z, \Delta, \Psi) \leq \widetilde{M}(B, \Gamma, PZ, \Delta, \Psi).$$

Доказательство основано на том, что функция

$$v(z) = \begin{cases} \min(u(z), u(\bar{z})), & z \in L^-, \\ \max(u(z), u(\bar{z})), & z \in L^+. \end{cases}$$

допустима для  $B$ ,  $\Gamma$  и совокупностей  $PZ$ ,  $\Delta$ ,  $\Psi$ . Здесь  $\bar{z}$  означает симметричную  $z$  относительно  $l$  точку, и  $u(z)$  потенциальная функция для области  $B$ , множества  $\Gamma$  и совокупностей  $Z$ ,  $\Delta$ ,  $\Psi$ . В дальнейшем мы сравниваем интегралы Дирихле от функции  $v(z)$  и  $u(z)$ .

### Литература

1. Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г. О сохранении обобщенного приведенного модуля при геометрических преобразованиях плоских областей // Дальневост. матем. журн. 2005. Т.6, № 1-2. С.39–56.

### ДВУХТОЧЕЧНАЯ ТЕОРЕМА ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

*Е.С. Фролова (МГУ, Владивосток)*

В докладе представлена двухточечная теорема искажения для регулярных однолистных функций, доказанная в терминах функции Робена и емкости Робена.

Как известно, во многих статьях рассматриваются двухточечные теоремы искажения (например, [1], [2], [3]). Метод, изложенный в этом докладе, отличен от них, поскольку здесь рассматриваются многосвязные области и используется поведение функции на границе.

**Теорема.** Пусть области  $B$  и  $G$ , которые являются подмножествами  $\bar{C}_z$  и  $\bar{C}_w$  соответственно, и множества  $\gamma \subset \partial B$  и  $\Gamma \subset \partial G$  являются допустимыми. Предположим, что функция  $f$  конформно и однолистно отображает область  $B$  на область  $G$  так, что  $f(\gamma) \subset \Gamma$ , где образ  $f(\gamma)$  понимается в смысле граничного соответствия. Тогда для всех точек  $z_1, z_2 \in B$  и всех вещественных чисел  $t_1$  и  $t_2$  выполняется следующее неравенство

$$|Df(z_1)|^{t_1} |Df(z_2)|^{t_2} \geq \left[ \frac{\delta(z_1, z_2; B, \gamma)}{\delta(f(z_1), f(z_2); G, \Gamma)} \right]^{2 t_1 t_2}.$$

Если для конформного отображения  $f$  выполняется включение  $f(B) \subset G$  и  $f((\partial B) \setminus \gamma) \subset (\partial G) \setminus \Gamma$ , то

$$|Df(z_1)|^{t_1} |Df(z_2)|^{t_2} \leq \left[ \frac{\delta(z_1, z_2; B, \gamma)}{\delta(f(z_1), f(z_2); G, \Gamma)} \right]^{2 t_1 t_2}.$$

для всех точек  $z_1, z_2 \in B$  и всех вещественных чисел  $t_1, t_2$ .

В доказательстве этой теоремы используется соотношение для некоторых квадратичных форм, которые зависят от значений функции Робена в рассматриваемых точках, и асимптотическое разложение емкости обобщенных конденсаторов [4].

### Литература

1. *On two-point distortion theorems for bounded univalent regular functions*// Kodai. Math. J. 24 (2001). № 3. P. 329-338
2. *Kim S., Minda D.* Two-point distortion theorems for univalent functions// Pacific J. Math. 163 (1994). P. 137-157
3. *Kraus D., Roth O.* Weighted distortion in conformal mapping in enclidean, hyperbolic and elliptic geometry// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006). P. 111-130
4. *Дубинин В.Н.* Обобщенные конденсаторы и их асимптотические емкости при вырождении некоторых пластин// Записи научных семинаров. СПб отдел мат. инст. Стеклова (ПОМИ). 302 (2003). С. 38-51

---

# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

---

## ПРИМЕНЕНИЕ КОНВЕКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

*Е.А.Андреева (Дальрыбвтуз, Владивосток)*

Расчет безарбитражных цен финансовых инструментов - это задача, которой во всем мире уделяется в настоящее время очень большое внимание. Один из основных подходов к расчетам безарбитражных цен заключается в том, чтобы вывести уравнение с частными производными для безарбитражной цены финансового инструмента, поставить для этого уравнения начально-краевую задачу и затем решить ее. При этом уравнение с частными производными чаще всего оказывается уравнением параболического типа, а поставленная начально-краевая задача во многих случаях является задачей со свободными границами. Иногда начально-краевую задачу возможно решить в явном виде (т.е. найти решение в виде формулы), иногда применяются те или иные методы приближенного (численного) решения начально-краевых задач, например метод конечных разностей (разностные схемы). Но основное значение все же имеют численные методы, в явном виде решение удается найти достаточно редко. Уравнение цены финансового инструмента может быть приведено к уравнению конвекции-диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Поэтому в настоящей работе рассматривалась конвективно-диффузионная модель оценки финансовых инструментов и методы ее численного решения. Задача решалась с помощью языка программирования Compaq Visual Fortran, а с помощью бесплатного пакета Gnuplot, для большей наглядности, полученные результаты были нарисованы. Так же, для анализа, рассчитывалось не только решение дифференциального уравнения, но и ошибка вычислений, полученная путем сравнения найденного численного и точного решений.

### Литература

1. *Алексеев Г.В.* Численные методы решения задач математической физики: учебное пособие. - Владивосток: ДВГУ, 1987г.
2. *Шведов А.С.* Применение метода конечных разностей для оценки финансовых инструментов. - Москва: Экономический журнал ВШЭ, 2002г.

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ  
УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ  
*Р.В. Бризицкий, А.С. Савенкова (ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Исследуется вопрос о регулярности решений краевых задач для гармонических по времени уравнений Максвелла, рассматриваемых при импедансных граничных условиях для электрического поля. Рассматривается применение полученных результатов при исследовании экстремальных задач мультипликативного граничного управления.

## Введение

В последнее десятилетие большое внимание уделяется исследованию обратных задач и задач управления для уравнений Максвелла, рассматриваемых в областях с импедансными границами. Интерес к указанным задачам вызван наличием актуальных приложений в создании современных средств обнаружения и распознавания летательных и наземных объектов, охране окружающей среды (от электромагнитного излучения) и в ряде других прикладных областей электромагнетизма [1-7].

Этим исследованиям способствует качественный анализ свойств решений краевых задач с импедансными граничными условиями. Отдельную трудность представляет вопрос о регулярности решений указанных прямых задач. Этот результат не только сильно влияет на доказательство существования и единственности (устойчивости) решений экстремальных задач, но и представляет самостоятельный интерес. Здесь мы отметим работу [2], в которой установлена регулярность решений более общих краевых задач, однако применить эти результаты для исследования мультипликативных задач граничного управления (см. [7]) не представляется возможным.

Используя некоторые идеи авторов [2], мы развили свой метод исследования регулярности решений рассматриваемых краевых задач, позволяющий получать априорные оценки соответствующих норм решений через нормы исходных данных краевых задач, что позволит применить эти результаты для исследования экстремальных задач.

В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma$  рассматривается краевая задача

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} + i\alpha(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ на } \Gamma. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали,  $k > 0$  — волновое число,  $\alpha > 0$  — поверхностный импеданс. Ниже на задачу (1), (2) при заданных функциях  $\alpha$  и  $\mathbf{h}$  будем ссылаться как на задачу 1.

Условие (2) физически отвечает ситуации, когда граница  $\Gamma$  покрыта тонким слоем сильнопоглощающего материала, например, с целью маскировки соответствующего объекта [8, 9].

Ниже широко будем использовать функциональные пространства  $H^s(D)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  и  $L^r(D)$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , состоящие из комплекснозначных в общем случае функций, заданных в области  $D$ , где  $D$  — область  $\Omega$  (или какое-либо другое открытое множество в  $\mathbb{R}^3$ ) либо граница  $\Gamma$  области  $\Omega$ . Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через  $\mathbf{H}^s(D)$  и  $\mathbf{L}^r(D)$ . Скалярные произведения в пространствах  $H^s(\Omega)$  и  $H^s(\Gamma)$  и их векторных аналогах будем обозначать соответственно через  $(\cdot, \cdot)_s$ ,  $(\cdot, \cdot)_{s,\Gamma}$  и  $\|\cdot\|_s$ ,  $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$ . Скалярные произведения и норму в  $\mathbf{L}^2(D)$  (или в  $L^2(D)$ ) либо в  $\mathbf{L}^2(\Gamma)$  будем обозначать через  $(\cdot, \cdot)_D$ ,  $\|\cdot\|_D$  либо  $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ ,  $\|\cdot\|_\Gamma$ . При  $D = \Omega$  индекс “ $\Omega$ ” будем опускать. В частности, полагаем

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_D = \int_D \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\sigma. \quad (3)$$

Здесь и ниже  $\bar{\mathbf{v}}$  обозначает функцию, комплексно сопряженную к функции  $\mathbf{v}$ ,  $D$  — произвольная подобласть области  $\Omega$ . Отношение двойственности для пары пространств  $X$  и  $X^*$  будем обозначать через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$  или просто  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  там, где это не приведет к путанице. Будем предполагать, что выполняется условие

(i)  $\Omega$  — ограниченная односвязная область в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma \in C^{0,1}$ .



Пусть  $\mathcal{D}(\Omega)$  – пространство бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  комплекснозначных функций,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  – двойственное к нему,  $H_0^1(\Omega) = \text{пополнение } \mathcal{D}(\Omega) \text{ в } H^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)^3$ ,  $L_{\alpha_0}^\infty = \{\alpha \in L^\infty(\Gamma) : \alpha(\mathbf{x}) \geq \alpha_0 \text{ п.в. на } \Gamma\}$ . Любой вектор  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$  можно представить почти всюду на  $\Gamma$  в виде:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_N + \mathbf{u}_T$ . Здесь вектор  $\mathbf{u}_N \equiv (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$  носит название векторной нормальной компоненты, тогда как вектор  $\mathbf{u}_T \equiv (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$  называется тангенциальной компонентой вектора  $\mathbf{u}$ . Подпространство в  $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ , состоящее из тангенциальных на  $\Gamma$  векторов, будем обозначать через  $\mathbf{L}_T^2(\Gamma)$ . Будем также использовать следующие гильбертовы пространства комплекснозначных вектор-функций:  $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$ ,  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{div} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$ ,  $\mathbf{H}^0(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) : \text{div} \mathbf{u} = 0\}$  и  $\mathbf{H}_T^s(\Gamma) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Gamma), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma\}$ .

Основную роль ниже будет играть гильбертово пространство  $\mathbf{X} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma)\}$  и его подпространство  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X} : \text{div} \mathbf{v} = 0\}$ , наделенные соответственно гильбертовыми нормами

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\text{rot} \mathbf{v}\|^2 + \|\text{div} \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} \times \mathbf{n}\|_{\Gamma}^2, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\text{rot} \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} \times \mathbf{n}\|_{\Gamma}^2.$$

## 1 Основные результаты

Предположим в дополнение к (i), что  $\alpha \in L_{\alpha_0}^\infty(\Gamma)$ ,  $\alpha_0 = \text{const} > 0$  и выполняется условие

$$(ii) \mathbf{h} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma).$$

Пусть  $\mathbf{E} \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$ . Умножим уравнение (1) на функцию  $\bar{\Phi}$ , где  $\Phi \in \mathbf{X}$ . После интегрирования по области  $\Omega$  с применением формулы Грина приходим к слабой формулировке задачи 1, имеющей вид

$$a_\alpha(\mathbf{E}, \Phi) \equiv (\text{rot} \mathbf{E}, \text{rot} \Phi) - (k^2 \mathbf{E}, \Phi) + i(\alpha \mathbf{E}_T, \Phi_T)_\Gamma = (\mathbf{h}, \Phi_T)_\Gamma \quad \forall \Phi \in \mathbf{X}. \quad (4)$$

Функцию  $\mathbf{E} \in \mathbf{V}$ , удовлетворяющую (4), назовем *слабым решением* задачи 1.

Справедлива следующая

**Теорема 2.1.** *Пусть выполняется условие (i) и  $\alpha \in L_{\alpha_0}^\infty(\Gamma)$ . Тогда для любой функции  $\mathbf{h} \in \mathbf{L}_T^2(\Gamma)$  существует единственное слабое решение  $\mathbf{E} \in \mathbf{V}$  задачи 1 и справедлива оценка*

$$\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{V}} \leq M_{\mathbf{E}} \equiv C_0 \|\mathbf{h}\|_{\Gamma}, \quad C_0 = C_0(\Omega, \alpha_0, \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)}). \quad (5)$$

Пусть вместо (i) и (ii) выполняются условия  
(i<sub>0</sub>)  $\Omega$  – ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma \in C^2$ ;  
(ii<sub>0</sub>)  $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $\nabla_\Gamma \alpha \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ ;  $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{h} \in L^2(\Gamma)$ .

Определение и свойства операторов *поверхностного градиента* и *поверхностной дивергенции* см. в [10, 11].

Одним из основных результатов настоящей работы является

**Теорема 2.2.** *При выполнении условий (i<sub>0</sub>), (ii<sub>0</sub>) решение  $\mathbf{E}$  задачи 1 принадлежит пространству  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  и справедлива оценка*

$$\|\mathbf{E}\|_1 \leq C_2(\|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{h}\|_\Gamma + \|\mathbf{h}\|_\Gamma), \quad C_2 = C_2(\alpha, \Omega). \quad (6)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты 09-01-98518-р-восток-а и 10-01-00219-а) и грантов ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03, 09-II-СУ03-003 и 09-III-A-03-07).

## Список литературы

- [1] *Cakoni F., Colton D.* The determination of the surface impedance of a partially coated obstacle from far field data // SIAM. J. Appl. Math. 2003. V. 64. Issue: 2. P. 709–723.
- [2] *Cakoni F., Colton D.* A uniqueness theorem for an inverse electromagnetic scattering problem in inhomogeneous anisotropic media // Proc. Edinburg Math. Soc. 2003. V. 46. P. 293–314.
- [3] *Cakoni F., Colton D., Monk P.* The electromagnetic inverse scattering problem for partially coated Lipschitz domains // Proc. Royal Soc. Edinburg. 2004. V. 134 A. P. 661–682.
- [4] *Cakoni F., Haddar H.* Open problems in the qualitative approach to inverse electromagnetic scattering theory // Eur. J. Appl. Math. 2005. V. 16. Part 3. P. 411–425.
- [5] *Liu J., Nakamura G., Sini M.* Reconstruction of the shape and surface impedance from acoustic scattering data for an arbitrary cylinder // SIAM. J. Appl. Math. 2006. V. 67 Issue: 4. P. 1124–1146.
- [6] *Cakoni F., Colton D., Monk P.* The inverse electromagnetic scattering problem for a partially coated dielectric // J. Comp. Appl. Math. 2007. Issue: 2. P. 256–267.

- [7] Бризицкий Р.В., Савенкова А.С. Обратные экстремальные задачи для уравнений Максвелла // Журн. вычисл. мат. матем. физики. 2010. Т. 50 N 6. С. 1038-1046.
- [8] *Angell T.S., Kirsch A.* The conductive boundary condition for the Maxwell's equations // SIAM. J. Appl. Math. 1992. V. 52. P. 1597–1610.
- [9] Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. 2nd Edition. Springer-Verlag. Berlin. 1998.
- [10] Alonso A. and Valli A. Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of  $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$  and the construction of the extension operator // Manuscr. Math. 1996. V. 89. p. 159-178.
- [11] Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.

ПОЛУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ ОЦЕНОК  
ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ ТОРГОВЫХ СИСТЕМ И  
АЛГОРИТМОВ

*М.Б. Букаренко (Самарский государственный технический  
университет, г. Самара)*

Одним из главных недостатков классического технического анализа является отсутствие статистически значимых методик тестирования торговых алгоритмов. В настоящей работе рассмотрены два наиболее важных показателя эффективности любой механической торговой системы (МТС): кумулятивная доходность и доля ложных сигналов [1]. В работе показано, как получить статистически значимую оценку кумулятивной доходности механической торговой системы, генерирующей сигналы на покупку и продажу в ходе имитационного моделирования. Также показано, как определить значимость расхождений в вероятностях ложного сигнала, при сравнении двух и более МТС.

Кумулятивная доходность есть случайная величина для данного тиккера на данном временном интервале. Ставится задача смоделировать статистически значимое число реализаций входного сигнала с той же струк-

турой помехи и на их основе получить интервальную оценку генерального среднего совокупности кумулятивных доходностей. Помехой будем считать разность цены закрытия и значения медленной линии тренда (например, скользящего среднего больших порядков в классическом техническом анализе или отклик фильтра низких частот с минимальной частотой среза в механической торговой системе автора). Под структурой помехи будем понимать спектр ее дисперсий.

Рассмотрим стационарную случайную функцию  $X(t)$  на интервале  $(0, T)$  с корреляцией  $K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau)$ . Функция  $k_x(\tau)$  четна:  $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$ . При изменении  $t$  и  $t'$  от 0 до  $T$  аргумент  $\tau = t - t'$  изменяется от  $-T$  до  $T$ .

Четную функцию на интервале  $(-T, T)$  разложим в ряд Фурье по четным гармоникам:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau,$$

где  $\omega_k = k\omega_1$ ;  $\omega_1 = \frac{\pi}{T}$ ;  $D_0 = \frac{1}{T} \int_0^T k_x(\tau) d\tau$ ;  $D_k = \frac{2}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau$ ,  $k \neq 0$ .

Имея в виду, что функции  $k_x(\tau)$  и  $\cos \omega_k \tau$  четные, можно преобразовать данные формулы к виду:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T k_x(\tau) d\tau, \\ D_k &= \frac{2}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau, \quad k \neq 0. \end{aligned} \right\}$$

Случайная функция  $X(t)$  может быть представлена в виде спектрального разложения:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t),$$

где  $U_k, V_k$  – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями, одинаковыми для каждой пары случайных величин с одним и тем же индексом  $k$ . Эта формула позволяет нам получить требуемое количество реализаций помехи.

Соответственно для каждого тиккера на заданном временном интервале строится интегральная функция распределения кумулятивной доходности, например методом непараметрического сглаживания. Вероятность  $P(CPR < 1)$  может служить новым показателем эффективности торгового алгоритма – мерой риска неполучения прибыли.

Теперь рассмотрим оценку статистической значимости вероятности ложного сигнала. Пусть требуется сравнить два торговых алгоритма. В ходе выполнения первого алгоритма было получено  $n_1$  сигналов на покупку/продажу, а  $p_1$  – оцененная вероятность ложного сигнала по данной выборке. Аналогично, для второго алгоритма указанные параметры обозначим  $n_2$  и  $p_2$ . Для выбора наиболее доходного (с точки зрения указанного критерия эффективности) алгоритма, необходимо оценить статистическую значимость расхождений между этими вероятностями  $s = |p_1 - p_2|$ .

Сначала следует определить дисперсии полученных оценок вероятностей

$$D_i = p_i(1 - p_i)$$

Вычислим дисперсию разности статистических вероятностей

$$D_s = \frac{(n_1 - 1)D_1 + (n_2 - 1)D_2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

Так как истинные значения дисперсий  $D_1$  и  $D_2$  не известны, то вместо них используются статистические оценки  $D_i^*$ .

После этого вычисляется статистика Стьюдента

$$t_\beta = \frac{s}{\sqrt{D_s}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}.$$

Уровень значимости расхождений определяется по распределению Стьюдента:

$$\beta = 1 - 2 \int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t) dt.$$

Вероятность того, что наблюдаемые расхождения имеют случайный характер:  $\alpha = 1 - \beta$ .

Описанная методика оценки эффективности применима к любым МТС и отдельным техническим индикаторам при совершении операций на любых высоковолатильных рынках.

### Литература

1. Кравчук В.К. Новый адаптивный метод следования за тенденцией и рыночными циклами// Валютный спекулянт. 2000, № 12. С. 48-53

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАРШЕГО  
КОЭФФИЦИЕНТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ

*И. С. Вахитов (ДВФУ, Владивосток)*

В работе исследуется задача идентификации старшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения конвекции-диффузии-реакции, рассматриваемого в ограниченной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ . Исследуемая задача заключается в нахождении пары функций  $(\varphi, \lambda)$  из соотношений

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla \varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + \kappa \varphi = f, \quad \varphi(x, y)|_{\Gamma} = \psi \quad (1)$$

и дополнительного условия  $\varphi = \varphi_d$  в  $Q$ . Здесь  $\varphi(\mathbf{x})$  – концентрация загрязняющего вещества,  $\lambda(\mathbf{x}) > 0$  – коэффициент диффузии, зависящий от точки  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $\kappa(\mathbf{x}) \geq 0$  – величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций,  $f(\mathbf{x})$  – плотность объемных источников,  $\psi(\mathbf{x})$  – заданная на  $\Gamma$  функция,  $\varphi_d(\mathbf{x})$  – заданная в некоторой подобласти  $Q$  области  $\Omega$  функция.

Рассматриваемая задача идентификации сводится к задаче нахождения минимума функционала

$$J(\varphi, \lambda) = \frac{\mu_0}{2} \|\varphi - \varphi_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (2)$$

Здесь  $\mu_0, \mu_1$  – неотрицательные константы. На основе математического аппарата, разработанного в [1, 2], в работе исследуется разрешимость и единственность сформулированной обратной экстремальной задачи, обосновывается применение принципа неопределенных множителей Лагранжа, выводится система оптимальности. Она состоит из прямой задачи (1), сопряженной задачи

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla \eta) - \mathbf{u} \cdot \nabla \eta + \kappa \eta = -\mu_0(\varphi - \varphi_d)_Q, \quad \eta|_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

для сопряженной концентрации  $\eta$  и вариационного неравенства, имеющего вид

$$\mu_1(\hat{\lambda}, \lambda)_{H^2(\Omega)} + (\lambda \nabla \varphi, \nabla \eta) \geq 0 \quad \forall \lambda \in K, \quad (4)$$

С использованием свойств системы оптимальности разрабатывается численный алгоритм, основанный на методе Ньютона и исследуются его

свойства. Устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие его сходимость.

В работе получены оценки, обеспечивающие единственность решения задачи идентификации, которые имеют вид

$$\|\varphi\|_1 \leq \frac{1}{\lambda_*} \gamma_0 M_\varphi^0 \|\lambda\|_2 + \|f\|, (\mu_1 - M_1) \|\lambda\|^2 \leq M_2 \|f\|, \mu_1 \geq M_1 + M_2.$$

где

$$M_1 = \frac{1}{\lambda_*^2} \mu_0 \gamma_0^2 \gamma_3 M_\varphi^0 (3\gamma_3 M_\varphi^0 + 2\|\varphi_d\|_Q), M_2 = \frac{1}{\lambda_*} \mu_0 \gamma_0 \gamma_3 (2\gamma_3 M_\varphi^0 + \|\varphi_d\|_Q),$$

В заключение приводятся и анализируются результаты проведенных вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ НШ-2810.2008.1.

### Литература

1. Алексеев Г. В., Калинина Е. А. Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции - диффузии - реакции // Сиб. журн. индустр. матем. 2007. Т. 11. N. 1. с. 3-16.
2. Алексеев Г. В., Соболева О. В., Терешко Д. А. Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. мех. техн. физ. 2008. Т. 49. N. 4. С. 24-35.

### О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РАНГОВОГО МЕТОДА КЛАСТЕРИЗАЦИИ

*Г.В. Гренкин (ИМКН ДВГУ, Владивосток)*

В статье [1] предложен ранговый метод кластеризации эмпирических данных.

Суть этого метода в следующем. Рассматриваются одномерные данные  $\{w_i\}_{i=1}^n$ ,  $w_i$  — положительные числа. Данные упорядочиваются по возрастанию, и каждому значению  $w$  ставится в соответствие порядковый номер — ранг  $r$ . Исходные точки анализируются с помощью соотношения

$$\ln w \cong -\gamma \ln \left( \frac{N-r}{r} \right) + c \equiv -\gamma \ln R + c,$$

которое представляет собой модифицированный В.П. Масловым закон Ципфа. В [1] для обеспечения неотрицательности логарифма и удобства визуализации данных принято  $N = 2n + 1$ . Таким образом, естественными переменными для анализа эмпирических данных являются  $\ln w$  и  $\ln R$  [1].

Если данные следует выделить в несколько кластеров, то способ разбиения можно сформулировать следующим образом: на каждом из кластеров справедлив модифицированный В.П. Масловым закон Ципфа со своими значениями параметров, которые меняются при переходе от кластера к кластеру [1].

Требуется автоматизировать процесс кластеризации эмпирических данных ранговым методом.

Задача кластеризации эмпирических данных ранговым методом является нечётко поставленной. Реализацию рангового метода в программной системе предлагается рассматривать как процесс измерения исходных точек-данных. Результатом измерения будет некоторая информация, которая должна позволить исследователю анализировать данные с точки зрения рангового метода кластеризации.

Возникает вопрос: какую информацию нужно получить, что нужно измерять? Таким образом, для уточнения исходной нечёткой постановки задачи требуется построить математическую модель.

Будем выделять интервалы  $[a..b]$ , на которых справедлив модифицированный В.П. Масловым закон Ципфа.

Необходимо формализовать приближённое соотношение (1). Рассмотрим точки интервала  $[a..b]$ :  $\{(\ln R_r, \ln w_r)\}_{r=a}^b$ . Пусть значения параметров  $\gamma$  и  $c$  заданы. Рассмотрим функциональную зависимость

$$\ln w = l_{\gamma,c}(\ln R) = -\gamma \ln R + c.$$

Приближённое соотношение (1) означает близость точек к функциональной зависимости (2). Введём функцию  $\delta(\ln R, \ln w, \gamma, c)$  — меру отклонения точки  $(\ln R, \ln w)$  от функциональной зависимости (2).

Будем считать, что на интервале (кластере)  $[a..b]$  справедлив модифицированный В.П. Масловым закон Ципфа, если выполнено условие

$$\max_{a \leq r \leq b} \delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma, c) \leq \delta_0.$$

Процесс кластеризации ранговым методом будем рассматривать как процесс расширения кластеров. Найдём множество максимальных ин-



тервалов — множество интервалов, на которых справедлив модифицированный В.П. Масловым закон Ципфа и которые нельзя расширить так, чтобы на расширенном интервале также был справедлив этот закон.

Одно из требований к разбиению — значения параметров меняются при переходе от кластера к кластеру. Мы будем трактовать это так: если функциональная зависимость подходит для некоторого кластера, то она не подходит для соседнего кластера.

Рассмотрим множество функциональных зависимостей вида (2), которые подходят к данному кластеру (т.е. справедлив модифицированный В.П. Масловым закон Ципфа), и найдём такую из них, значение меры отклонения данной точки от которой минимально. Минимальное значение меры отклонения назовём расстоянием от точки до кластера.

Расширению кластера могут помешать отдельные точки. Может оказаться, что интервал  $[a\dots b]$  не удовлетворяет условию (3), но если выбросить несколько точек (назовём эти точки аномальными, или аномалиями), то условие (3) будет выполнено для оставшихся точек.

Можно ограничить число аномалий  $n$ , задав порог  $n_0$ :  $n \leq n_0$ . Также можно задать дополнительное пороговое значение  $\delta_0'$  и потребовать, чтобы для аномальных точек было выполнено  $\delta \leq \delta_0'$ .

Тройку  $L = (\delta_0, n_0, \delta_0')$  назовём уровнем качества кластера. Теперь можно рассматривать модифицированный В.П. Масловым закон Ципфа на уровне  $L$ . Пусть  $\Gamma_L$  — множество пар  $(\gamma, c)$  таких, что на интервале  $[a\dots b]$  справедлив модифицированный В.П. Масловым закон Ципфа на уровне  $L$ .

Задавая разные уровни, получим разные множества максимальных интервалов. Точно так же, можно находить расстояние от точки до кластера, где минимум берётся по тем функциональным зависимостям, которые подходят к данному кластеру на уровне  $L$ .

Фиксируя  $\delta_0$  и  $\delta_0'$ , приходим к задаче нахождения наименьшего возможного числа аномалий при заданном пороговом значении. Фиксируя  $n_0$  и  $\delta_0'$ , приходим к задаче нахождения минимального  $\delta_0$  (геометрически — нахождение минимальной высоты полосы, в которую можно поместить все точки, за исключением  $n_0$  штук точек).

Ещё требуется находить множество значений параметра  $\gamma$ , при которых на кластере справедлив модифицированный В.П. Масловым закон Ципфа на уровне  $L$ .

Для решения указанных задач разработаны численные алгоритмы.

## Литература

1. Гузев М.А., Черныш Е.В. Ранговый анализ в задачах кластеризации. // Информатика и системы управления: Медицинская информатика. 2009. №3(21). — Благовещенск: Изд-во Амурского гос. ун-та. С. 13-19.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИМ ПРОГРАММИРОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА

*А.В. Докучаев (Самарский государственный технический университет, г. Самара)*

Исследуем поведение дисперсии в стохастической задаче распределения ресурса [1, 2]. Проиллюстрируем нелинейную зависимость дисперсии оптимального суммарного эффекта от стохастического поведения параметров задачи. Суммарный эффект находится методом динамического программирования. При стохастических условиях задачи начальный процесс разбивается на конечное число детерминированных подзадач [1, 2]. Математическое ожидание оптимального суммарного эффекта находится по формуле полной вероятности.

В табл. 1 приведён пример функций отклика [1, 2].

Таблица 1: Исходные данные задачи

$X_j$	$f_1(X_j)$	$f_2(X_j)$	$f_3(X_j)$	$f_4(X_j)$
0	0	0	0	0
1	3	2	3	3
2	5	2	4	5
3	8	3	6	7
4	9	4	6	8
5	10	4	8	8

Максимальный суммарный эффект, найденный методом динамического программирования, без учёта случайных факторов процесса распределения составляет  $Z^* = Z(X^*) = 14$  при векторе оптимального распределения ресурса  $X^* = (3, 0, 1, 1)$ .

Значение ячейки  $f_i(X_j)$  в табл. 1 исходных данных, определяющее отклик  $i$ -й функции на получение  $j$ -й порции ресурса, назовём случайной точкой задачи, если это дискретная случайная величина с заданным рядом распределения. При усреднении стохастических параметров процесса значение в данной ячейке заменим её математическим ожиданием.

**Утверждение 1.** Если стохастичность случайной точки не влияет на оптимальный суммарный эффект получаемых при разбиении стохастической задачи детерминированных подзадач (по сравнению с оптимальным суммарным эффектом в модели с усреднением случайных параметров), то дисперсия оптимального суммарного эффекта стохастической задачи равна нулю. Проиллюстрируем это утверждение примером 1 из табл. 2:  $f_1(4)$ - дискретная случайная величина с рядом распределения

$$p_1 = P(f_1(4) = 8, 9) = 1/2, p_2 = P(f_1(4) = 9, 1) = 1/2$$

с двумя спектральными значениями.

Тогда целевая функция - тоже дискретная случайная величина с двумя спектральными точками. Найдём математическое ожидание и дисперсию её максимального значения. Для этого решим две детерминированные подзадачи методом динамического программирования:

$$1) f_1(4) = 8, 9 \Rightarrow \text{суммарный эффект } Z_1^*(X_1^*)=14;$$

$$2) f_1(4) = 9, 1 \Rightarrow Z_2^*(X_2^*)=14.$$

Математическое ожидание максимального суммарного эффекта

$$M(Z^*(X^*)) = \sum_k Z_k^* P_k(f_{ik}(X_j)) = 14$$

при нулевой дисперсии.

Случай с двумя некоррелированными случайными точками иллюстрирует пример 5 из табл. 2.

**Утверждение 2.** Если в стохастической задаче распределения ресурса одна случайная точка, и её стохастичность не влияет на средний оптимальный суммарный эффект (по сравнению с оптимальным суммарным эффектом в модели с усреднением случайного параметра), но изменяет оптимальные суммарные эффекты детерминированных подзадач, то дисперсия оптимального суммарного эффекта исходной стохастической задачи равна дисперсии случайной точки.

См. пример 2 в табл. 2, где  $f_i(X_j)$  - случайная точка задачи,  $f_{ik}(X_j)$  - дискретный спектр её значений с распределением  $P_k(f_{ik}(X_j))$  и дисперсией  $D_k(f_{ik}(X_j))$  (в таблице столбец  $D_k$ ),  $Z_k^*(X^*)$  - оптимальный суммарный

Таблица 2: Примеры постановок задачи

№	$f_i(X_j)$	$f_{ik}(X_j)$	$P_k(f_{ik}(X_j))$	$D_k$	$Z_k^*$	$M$	$D$
1	$f_1(4)$	8,9	1/2	0,01	14;	14	0
		9,1	1/2		14		
2	$f_1(3)$	7	1/11	0,1	13;	14	0,1
		8,1	10/11		14,1		
3	$f_1(3)$	6,5	1/16	0,15	13;	14,03	0,11
		8,1	15/16		14,1		
4	$f_1(3)$	4	3/7	12	13;	15,29	3,79
		11	4/7		17		
5	$f_1(4)$	8,9	1/2	0,01	14;	14	0
		9,1	1/2		14;		
	$f_3(4)$	5,9	1/2	0,01	14;	14	0
		6,1	1/2		14		
6	$f_1(3)$	7,5	1/6	0,05	13,5;	14	0,05
		8,1	5/6		13,5;		
	$f_1(4)$	8,9	1/2	0,01	14,1;	14,1	0,05
		9,1	1/2		14,1		
7	$f_1(3)$	4	3/7	12	13;	15,41	1,8
		11	4/7		13;		
	$f_2(4)$	1	13/25	19,2	14; 17;	17	1,8
		2	5/25		17		
11		7/25	17				
8	$f_1(3)$	4	1/2	16	13;	15,54	5,64
		12	1/2		13;		
	$f_2(4)$	1	13/25	19,2	14; 18;	18	5,64
		2	2/25		18		
11		7/25	18				

эффект  $k$ -й детерминированной подзадачи при разбиении исходной стохастической задачи, за  $M$  обозначено  $M(Z^*(X^*))$  - математическое ожидание оптимального значения целевой функции исходной стохастической задачи,  $D(Z^*(X^*))$  - его дисперсия (в таблице обозначено:  $D$ ).

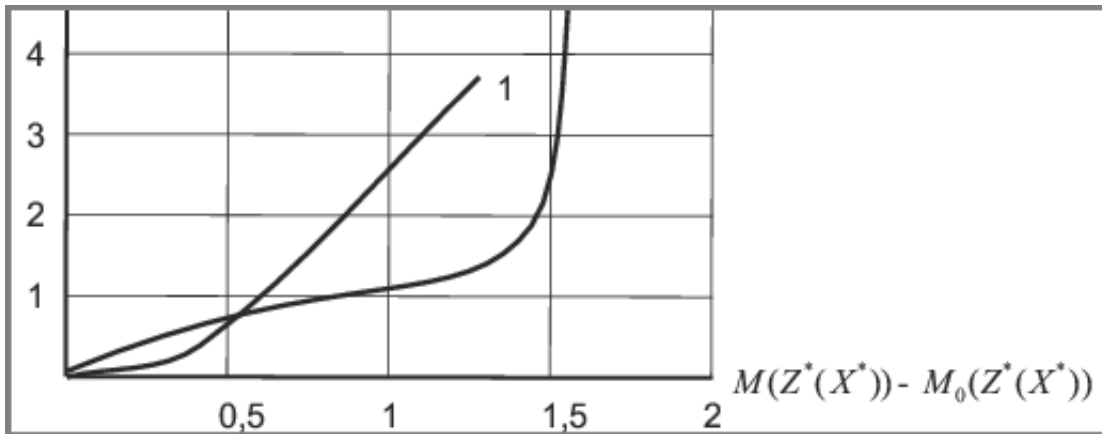


Рис.1. Кривая 1 - анализ примеров 2-4 из табл. 2. Кривая 2 - анализ примеров 6-8 из табл. 2.

Пусть случайны некоррелированные значения  $f_1(3)$  и  $f_1(4)$  (пример 6 в табл. 2). Тогда рассматриваемая двумерная случайная величина имеет 4 спектральные точки. Найдём её математическое ожидание и дисперсию. Из табл. 2 видно, что утверждение 2 не выполняется, если в таблице исходных данных более одного случайного параметра.

**Утверждение 3.** Рост дисперсии в случайной точке (для нескольких точек - суммы их дисперсий) при неизменной мощности спектра вызывает рост дисперсии суммарного эффекта и может вызывать рост математического ожидания суммарного эффекта.

См. примеры 3 и 4, а также примеры 7 и 8 (табл. 2).

Обозначим за  $M_0(Z^*(X^*))$  значение математического ожидания, полученное, когда учёт стохастичности случайных точек не влияет на эффект распределения ресурса, то есть  $M_0(Z^*(X^*)) = Z^*(X^*)$ .

На рис. 1 приведены графики зависимости дисперсии оптимального суммарного эффекта от изменения его математического ожидания при учёте стохастичности параметров: кривая 1 - для одной случайной точки (примеры 2-4 из табл. 2); кривая 2 - для двух случайных точек (примеры 6-8 из табл. 2).

### Литература

1. Докучаев А.В. Использование байесовского подхода в стохастической постановке задачи динамического программирования для оценки влияния погрешностей исходных данных // Тр. Международной

молодежной научной конференции "XXXIV Гагаринские чтения".  
— М., 2008. — С. 54-55.

1. Докучаев А.В., Котенко А.П. Алгоритмы решения стохастических задач динамического программирования большой размерности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. — Самара, 2008. — № 2(17). С. — 203-210.

## ТЕОРЕМА НЕПРЕРЫВНОСТИ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РИСКА

*Т.А. Калмыкова (ДВГУ, Владивосток)*

В работе [1] для вычисления вероятности разорения на конечном отрезке времени в классической модели риска построена следующая аппроксимация. Распределение страховых ущербов приближено смесью экспоненциальных распределений, а вероятность разорения представлена конечной суммой экспонент с неизвестными коэффициентами. Для нахождения коэффициентов этого представления построены рекуррентные соотношения, позволяющие рассчитать вероятности разорения в модели риска с экспоненциальным и паретовским распределениями ущербов.

Однако точность предложенной аппроксимации оценивается в равномерной метрике, в которой оценка погрешности растет линейно с ростом числа шагов  $n$ . Аналогичная оценка в метрике  $L_1$  свободна от  $n$ , однако отсутствует теорема аппроксимации распределения страхового ущерба смесью показательных распределений. В настоящей работе такая теорема аппроксимации доказывается.

Существенным ограничением в классической модели риска является предположение о детерминированности инфляционного фактора. В данной работе аппроксимация статьи [1] распространяется на такие модели риска, в которых финансовый и страховой риски являются зависимыми случайными величинами. Исследуются возможности распараллеливания при вычислении вероятности разорения.

### Литература

1. Цициашвили Г.Ш. Вычисление вероятности разорения в классической модели риска // Автоматика и телемеханика. 2009. № 12. С. 187-194

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ЗАГРЯЗНЯЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА НА  
МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

*А.В.Лобанов (Дальрыбвтуз, Владивосток)*

Ухудшение общей экологической обстановки и необходимость достаточно точно прогнозировать и принимать оперативные решения по преодолению последствий загрязнения требуют создания специальных математических моделей, отражающих происходящие явления. Полученные с помощью таких моделей данные помогут определить предельно допустимые выбросы загрязняющих веществ и определить концентрации загрязняющих веществ в воде и почве.

В последнее время наблюдается большой научно-практический интерес к математическому моделированию процессов загрязнения окружающей среды антропогенными источниками. Успешное решение задач прогноза уровня загрязнения основано на использовании математических моделей, учитывающих физические особенности распространения примесей, связи между концентрациями примесей и параметрами среды: скоростью и направлением течения воды (если примеси распространяются в водной среде), свойствами воздуха (если примеси распространяются в воздушной среде). Большинство задач распространения загрязняющих веществ могут быть сведены к задачам переноса примесей описываемых уравнениями конвекции-диффузии.

В данной работе рассматривается математическая модель, описывающая процесс распространения загрязняющего вещества с помощью уравнения конвекции-диффузии. Типичное уравнение распространения какого-либо вещества имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (1)$$

Здесь  $a$  – вектор скорости,  $\lambda$  – коэффициент диффузии,  $f(x, t)$  – плотность распределенных источников загрязняющего вещества. Начальное и граничные условия запишем в следующем виде:

$$u|_{t=0} = u_0(x), x \in \Omega, u|_{x=0} = g_1(t), u|_{x=l} = g_2(t).$$

Существуют различные методы решения дискретных задач, например метод конечных разностей и метод конечных элементов. В соответствии с этими методами, для численного решения задач математической физики, искомая функция обычно заменяется некоторой функцией, заданной на конечном множестве точек или ячеек. Этот процесс называется дискретизацией непрерывной задачи. Функция, полученная в результате дискретизации, называется сеточной функцией.

Применяя пакет FreeFem++ к решению задачи (1), в основе которого лежит метод конечных элементов, найдем решение сеточной функции. А для этого перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} uv dx + a \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2)$$

Такая форма облегчает запись поставленной задачи средствами пакета FreeFem++. И позволяет легко применить метод конечных элементов для решения задачи (1).

### Литература

1. *Алексеев Г.В.* Численные методы решения задач математической физики. Учебное пособие. Владивосток: ДВГУ, 1987. 87с.
2. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349с.

### АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ АВИАТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ ДАЛЬНЕВОСТОЧНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

*А.П. Мартюшев(ДВФУ, Владивосток)*

В связи со значительными размерами страны и территориальными особенностями воздушный транспорт выполняет важную социально-экономическую роль, осуществляя необходимую транспортную доступность



и обеспечивая географическую связности регионов Российской Федерации, тем самым давая новые возможности для национальной и региональной экономики. С другой стороны, сокращение регионального пассажиропотока и стабильный рост авиаперевозок осуществляемых через Москву выстраивает неэффективную сеть авиамаршрутов не удовлетворяющую возросшим потребностям населения и бизнеса.

В данной работе исследуется внутренняя сеть аэропортов Российской Федерации, а именно сеть Дальневосточного Федерального округа (ДВФО), которая выстраивается основными авиакомпаниями, предоставляющими услуги гражданской авиации. Как и во многих других сложных сетях, подробная информация о потоках между узлам является решающим фактором при исследовании авиатранспортных связей. Анализ авиасообщений ДВФО затрагивает установившиеся понятия о сетях «тесного мира» с целью обнаружения их характерных свойств, таких как надежность и быстрота распространения потоков, зависящих от средней длины сети и коэффициента транзитивности:

$$L = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij},$$

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\text{число треугольников присоединенных к вершине } i}{C_{k_i}^2},$$

где  $d_{ij}$  — длина геодезической цепи между вершинами  $i$  и  $j$ ,  $k_i$  — степень вершины  $i$ ,  $n$  — количество вершин в сети,  $C_{k_i}^2$  — число сочетаний из  $k_i$  по 2.

Различного рода воздействия на сеть позволяют оценить надежность сети, как изменение значения коэффициентов эффективности:

эффективности сети после различного воздействия на нее:

$$E_{N-Q}(G, d) = \frac{\sum_{w \in W} \frac{d_w}{\lambda_w}}{n_W},$$

где  $n_W$  — число пар источник-сток,  $\lambda_w$  — равновесный спрос,  $d_w$  — для спрос на рейс из вершины  $i$  в вершину  $j$ ,  $W$  - множество пар источник-сток,  $G$  — рассматриваемая сеть,  $d$  — совокупность  $d_w, w \in W$ .

Были проведены расчеты по 19 аэропортам для 9 регионов Дальнего Востока.

полным графом показало степень развития сети и выявлены критические вершины и ребра сети для  $n=14$   $m=38$

### Литература

1. *Lamanna F.* Small world and scale-free urban transportation networks: analysis and protection strategies in case of threats // *Journal of Transport and Shipping*. 2007. №4. P. 35-47.
2. *Nagurney A., Qiang Q.* A Network Efficiency Measure with Application to Critical Infrastructure Networks // *Journal Of Global Optimization*. 2008. №40. P. 261-275.
3. *Newman M.* The Structure and Function of Complex Networks // *SIAM Review*. 2003. №45. P. 167-256.

### ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НИЗКОЙ КОНТРАСТНОСТИ ДЛЯ ОБРАЗЦОВ НЕПРЕРЫВНО-ЛИТОЙ ЗАГОТОВКИ

*И.И. Мацко, О.С. Логунова (ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», Магнитогорск)*

В настоящее время является актуальной проблема построения анализаторов изображений при автоматизации распознавания и оценки фотографии темплета (образца) в системе оценки качества непрерывно-литой заготовки. Показателями эффективности распознавания изображения принято считать скорость распознавания и достоверность сегментации. В ходе подготовки исходных данных были собраны более 150 фотографий образцов. Анализ изображений позволил их классифицировать как изображения с низкой контрастностью и с объектами нерегулярной формы. Для изображений указанного класса достоверность сегментации снижается за счет:

- 1) наличия «шумов», возникающих в процессе фотографирования из-за недостаточной светочувствительной части областей захвата фотокамеры;
- 2) неравномерной освещенности объекта исследования;

3) наличия тонких контуров, сплошность и непрерывность которых нарушается по причине ограниченных оптических возможностей фотокамеры;

4) случайного выбора координат для расположения объектов нерегулярной формы;

5) наличие внешнего окружения объектов нерегулярной формы, из которого в автоматическом или автоматизированном режиме выбирается изображение темплета;

6) наличие перспективных эффектов, возникающих в процессе установки оборудования для фотографирования.

Указанные проблемы распознавания изображений образцов по их фотографиям позволили определить цель научного исследования: синтез специального математического обеспечения для программного анализатора и типового модуля оценки качества, обеспечивающего подсистему автоматизированной системы управления (АСУ) непрерывной разливки стали. Для достижения цели выделены задачи:

1) определение и обоснование допущений для математического описания цветной фотографии темплета;

2) построение математического описания цветной фотографии темплета;

3) определение методов и разработка алгоритмов для шумоподавления и повышения контрастности цветного изображения;

4) определение методов и разработка алгоритмов для сегментации изображения с выделением непрерывных объектов нерегулярной формы и случайным местом расположения;

5) построение классификационной таблицы для дефектов заготовки. В работе выполнен анализ изображений фотографий образцов с низкой контрастностью и объектами нерегулярной формы, разработаны концепции построения математического обеспечения для программного анализатора, позволяющего автоматизировать процесс получения экспертной информации, отвечающей требованиям отраслевого стандарта [1]. Работа выполняется в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2009 – 2013 гг» по государственному контракту №П2402.

### **Литература**

1. *ОСТ 14-1-235-91*. Сталь. Метод контроля макроструктуры непрерывнолитой заготовки для производства сортового проката и труб-

ных заготовок. Взамен ОСТ 14-4-73 в части непрерывнолитой заготовки квадратного сечения; введ. 1992.01.01. М.: Министерство металлургии СССР, 1991. 37 с.

СИСТЕМА ОБРАБОТКИ ЭМПИРИЧЕСКИХ  
ДАННЫХ МЕТОДАМИ РАНГОВОГО АНАЛИЗА  
*Т.В. Пикова, Е.В. Черныш (ДВФУ, Владивосток)*

## Введение

Эмпирические данные являются основой для выделения информации о закономерностях изучаемых явлений, а также принятия решений в различных сферах человеческой деятельности.

При решении задач исследователям приходится изучать знаковые объекты произвольной природы, которые могут быть разных типов, но имеют основное объединяющее их свойство – повторяемость в исследуемой области. Поэтому для анализа эмпирических данных естественным является использование подходов из лингвистики, связанных с построением частотных словарей и ранговых распределений.

Для частотных словарей известен закон Ципфа, описывающий соотношение между частотой и рангом слов в словаре:

$$\omega \cdot r = c, \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота встречаемости слова в тексте,  $r$  – ранг слова в списке слов,  $c$  – эмпирическая постоянная величина (коэффициент Ципфа).

Согласно классическому подходу частота совпадает с вероятностью повторяемости. Эта идея была использована при изучении объектов в различных областях знаний. Закон Ципфа сильно огрубляет ранговое соотношение и требует большого объёма частотного словаря. Поэтому классическое соотношение постоянно подвергается уточнениям и корректировкам, путём введения в него дополнительных параметров.

В период с 2003 года по 2009 год В.П.Маслов описал квантование закона Ципфа на основе теории Бозе-Эйнштейна о распределении тождественных частиц, основанном на экстремальности функционала веро-

ятности попадания частиц на заданный энергетический уровень и получил, в рамках предложенного метода, решение задачи оптимизации в экономике:

$$r_l = \sum_{i=1}^l \frac{1}{e^{\beta\omega_i + \sigma} - 1}, \quad (2)$$

где  $\tilde{\omega}$  – частота встречаемости  $l$ -того слова,  $\eta$  – ранг этого слова,  $\beta$ ,  $\sigma$  – дополнительные параметры.

Многие известные математические и статистические пакеты предоставляют возможность провести отдельные части анализа данных по В.П. Маслову, но комплексную автоматизированную обработку эмпирических данных от ранжирования до кластеризации ни один из универсальных пакетов не реализует, так как для этого необходимо разрабатывать дополнительные программные модули. Для автоматизации процесса исследования создан специальный интегрированный пакет программ SPED (SystemProcessing of Empirical Data).

## **Алгоритмическое и программное обеспечение интегрированной системы**

Система состоит из 6 групп функциональных модулей:

1) работа с файлами и таблицей данных (импорт/экспорт сырых данных, сохранение, создание и редактирование наборов данных в двух форматах: текстовые файлы TXT и файлы CSV);

2) преобразование и первичная обработка данных (нормировка с возможностью выбора нормы, ранжирование по указанному критерию);

Эмпирические данные являются частотой встречаемости определенного явления. Набор частот ранжируется, т.е. сортируется по возрастанию, и каждому элементу ставится в соответствие значение ранга, равное порядковому номеру элемента в наборе. Для этого используется встроенный алгоритм быстрой сортировки.

3) нахождение оптимальных параметров аппроксимирующей функции, минимизирующих отклонение теоретической кривой от экспериментальной;

Основная аппроксимирующая функция, используемая в программном средстве была получена путем модификации подхода В.П.Маслова

и имеет три независимых параметра, определяющих ее поведение. В системе реализованы два алгоритма поиска оптимальной комбинации этих параметров методами глобальной оптимизации (метод сканирования и интервальный аналог метода имитации отжига), а также алгоритм полного перебора по указанным пользователем отрезкам. Найденные оптимальные комбинации значений могут быть использованы для построения аппроксимирующей функции.

4) работа с введенными пользователем аппроксимирующими функциями (создание, редактирование и добавление в библиотеку);

Как уже отмечалось, в различных областях знаний ранговые зависимости имеют специфический вид. Они модифицируются исследователями с учетом исходных эмпирических данных, их размерности и введенных норм. Модификация позволяет использовать аппроксимирующие функции различного вида, при условии, что их применение позволяет минимизировать отклонение теоретической кривой от экспериментальной.

Система SPED предусматривает определение аппроксимирующей функции как в рамках одного сеанса работы с программой, так и добавление ее в библиотеку функций. При вводе аппроксимирующей функции предоставляется возможность выбора ее вида из фиксированного набора, разрешено создавать пользовательские функции нескольких уровней вложенности. Для введенной функции также можно найти оптимальную комбинацию параметров для минимизации отклонения.

5) кластерный анализ данных;

Модуль кластеризации реализует требуемую группировку данных. Он дает возможность исследователю автоматически кластеризовать исходные данные по выбранному методу, получить результат в числовом и графическом представлении по заданному или рассчитанному программой оптимальному количеству кластеров, а также выполнить корректировку результатов кластеризации вручную в интерактивном режиме работы.

6) визуализация результатов.

В системе возможно построение графиков аппроксимирующих функций и исходных данных, графиков зависимости отклонений от значений параметров, изменения основных параметров рангового распределения во времени. Система отображения графиков позволяет настраивать оси и подписи данных. При построении нескольких теоретических кривых – кривая, соответствующая минимальному отклонению, выделяется цве-

том. Кроме этого под графиком выводятся значения основных и вспомогательных параметров, величина отклонения и вид функции с используемыми параметрами. При построении графика зависимости значения отклонения для исследуемого параметра на координатной плоскости отмечаются точки, соответствующие результатам анализа.

## Заключение

Система была протестирована на данных по йододефицитным заболеваниям взрослого населения Приморского края, заболеваниям кровообращения среди подросткового населения Приморского края, по уголовным преступлениям в Японии за последние пятнадцать лет, по фактическому и среднему вылову промысловой рыбы в реках Камчатки за 1988-1991 гг. Рабочая версия интегрированной системы SPED выполняет всю обработку эмпирических данных от ранжирования до кластеризации и имеет интерфейс, ориентированный на исследователей-нематематиков.

## Литература

1. *Clauset A., Shalizi C.R. and Newman M.E.J.* Power-law distributions in empirical data. E-print (2007), <http://arxiv.org/abs/0706.1062v1>
2. *Маслов В.П., Маслова Т.В.* О законе Ципфа и ранговых распределениях в лингвистике и семиотике // Математические заметки, т.80, 2006. № 5. С. 718-732.
2. Персоналии. Маслов Виктор Павлович // База данных Math-Net.Ru <http://www.mathnet.ru/>
3. *Гузев М.А., Черныш Е.В.* Ранговый анализ в задачах кластеризации. // Информатика и системы управления: Медицинская информатика. 2009. №3. – Благовещенск: Изд-во Амурского гос. ун-та. С. 13-19.
4. *Никитина Е.Ю., Чэнь Бэй.* Применение ранговых распределений для исследования структуры популяций лососевых рыб. // XXXIV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова .Фундаментальные проблемы математики и информационных наук.: Тез. докл. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2009. С. 108-109.

5. *Гузев М.А., Никитина Е.Ю.* Применение математических методов при исследовании криминологических данных (на примере Японии) // Россия и АТР: Международные отношения. 2009. №2. \_ Владивосток: Изд-во ИИАЭ ДВО РАН С. 77-85.
6. *Бидаева Е.В.* Инструментальное средство анализа эмпирических данных методом квантовой статистики. Выпускная квалификационная работа специалиста, ИМКН ДВГУ \_ Владивосток, 2008.
7. *Зеленов А. С.* Критериальная кластеризация квазиодномерных данных. Выпускная квалификационная работа специалиста, ИМКН ДВГУ \_ Владивосток, 2008.
8. *Пиковая Т.В.* Автоматизация процесса аппроксимации ранговых распределений. Курсовая работа. ИМКН ДВГУ \_ Владивосток, 2009.
9. *Пиковая Т.В.* Оптимизация поиска параметров аппроксимирующей функции в системе анализа эмпирических данных SPED. Выпускная квалификационная работа специалиста, ИМКН ДВГУ \_ Владивосток, 2010.

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОСТЕЙШЕГО ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

*Т.Э. Селезнев (ДВФУ, Владивосток)*

В докладе представлено решение задачи нахождения оптимального управления в модели простейшего инфекционного заболевания:

К настоящему времени клиницистами и иммунологами накоплен огромный материал наблюдений за течением различных инфекционных заболеваний и на основе анализа этого материала получены фундаментальные результаты, касающиеся механизмов взаимодействия антигенов и антител. Эти результаты позволили подойти к построению математических моделей иммунных процессов [1].

Будем считать, что основными действующими факторами инфекционного заболевания являются следующие величины.

- 1) Концентрация патогенных размножающихся антигенов  $V(t)$ .



2) Концентрация антител  $F(t)$ . Под антителами понимаются субстраты иммунной системы, нейтрализующие антигены (иммуноглобулины, рецепторы клеток).

3) Концентрация плазматических клеток  $C(t)$ . Это популяция носителей и продуцентов антител (иммуно-компетентные клетки и иммуноглобулин-продуценты).

4) Относительная характеристика пораженного органа  $m(t)$ .

Полагая  $V(0) = V_0, C(0) = C_0, F(0) = F_0, m(0) = m_0$ , запишем математическую модель простейшего инфекционного заболевания в виде задачи Коши для системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V} = (\beta - \gamma F)V, \\ \dot{C} = \xi(m)\alpha V(t - \tau)F(t - \tau) - \mu_C(C - C^*), \\ \dot{F} = \rho C - (\mu_F + \eta\gamma V)F, \\ \dot{m} = \sigma V - \mu_m m, \\ V(0) = V_0, \\ C(0) = C_0, \\ F(0) = F_0, \\ m(0) = m_0. \end{cases} \quad (1)$$

Для дальнейшего анализа рассмотрим упрощенный вариант системы (1). Для этого положим  $\tau = 0$  и  $C^* = 0$ . Остальные коэффициенты будем считать равными единице, кроме  $\sigma$ :

$$\begin{cases} \dot{V} = (1 - F)V, \\ \dot{C} = VF - C, \\ \dot{F} = C - (1 + V)F, \\ \dot{m} = \sigma V - m. \end{cases} \quad (2)$$

Рассматривая полученную систему, поставим задачу оптимизации, вводя во второе уравнение управление  $u(t)$ . Под управлением будем понимать количество лекарства  $u(t)$ , поступающее в организм в единицу времени, стимулирующее рост плазматических клеток в организме. Управление является ограниченной величиной:  $0 \leq u(t) \leq u_1$ . Таким образом система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = (1 - F)V, \\ \dot{C} = VF - C + u(t), \\ \dot{F} = C - (1 + V)F, \\ \dot{m} = \sigma V - m, \\ V(0) = V_0, \\ C(0) = C_0, \\ F(0) = F_0, \\ m(0) = m_0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Экстремальная задача заключается в нахождении указанного управления из условия минимизации пораженной массы органа-мишени в момент времени  $T$ :

$$J(T) = m(T) \rightarrow \min, 0 \leq u(t) \leq u_1. \quad (4)$$

В дальнейшем, используем принцип максимума Понтрягина [2], и выписываем сопряженную систему, полагая  $y_1 = V$ ,  $y_2 = C$ ,  $y_3 = F$ ,  $y_4 = m$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}_1 = -\psi_1(1 - y_3) - \psi_2 y_3 - \psi_3 y_3 - \sigma \psi_4, \\ \dot{\psi}_2 = \psi_2 - \psi_3, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 y_1 - \psi_2 y_2 + \psi_3(1 + y_1), \\ \dot{\psi}_4 = \psi_4, \\ \psi_1(T) = 0, \\ \psi_2(T) = 0, \\ \psi_3(T) = 0, \\ \psi_4(T) = -1. \end{array} \right. \quad (5)$$

Гамильтониан в нашем случае имеет вид:

$$H = \psi_1(y_1 - y_1 y_3) + \psi_2(y_1 y_3 - y_2 + u(t)) + \psi_3(y_2 - y_1 y_3 - y_3) + \psi_4(\sigma y_1 - y_4). \quad (6)$$

В итоге приходим к системе оптимальности:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{y}_1 = (1 - y_3)y_1, \\
\dot{y}_2 = y_1y_3 - y_2 + u(t), \\
\dot{y}_3 = y_2 - (1 + y_1)y_3, \\
\dot{y}_4 = \sigma y_1 - y_4, \\
y_1(0) = V_0, \\
y_2(0) = C_0, \\
y_3(0) = F_0, \\
y_4(0) = m_0, \\
\dot{\psi}_1 = -\psi_1(1 - y_3) - \psi_2y_3 - \psi_3y_3 - \sigma\psi_4, \\
\dot{\psi}_2 = \psi_2 - \psi_3, \\
\dot{\psi}_3 = \psi_1y_1 - \psi_2y_2 + \psi_3(1 + y_1), \\
\dot{\psi}_4 = \psi_4, \\
\psi_1(T) = 0, \\
\psi_2(T) = 0, \\
\psi_3(T) = 0, \\
\psi_4(T) = -1, \\
u(t) = \begin{cases} u_1, \psi_2 > 0, \\ \forall v \in [0; u_1], \psi_2 = 0, \\ 0, \psi_2 < 0. \end{cases}
\end{array} \right. \quad (7)$$

Полученная система соответствует принципу bang-bang.

Для решения пользуемся итерационным методом. Выбираем некоторое начальное приближение для управления. Решаем на каждом шаге исходную систему, подставляем полученные значения функций в сопряженную систему, находим уточненное значение управления. Итерации прекращаются, когда интегральная норма вида  $\int_{t_0}^T (r(t) - r_{new}(t))^2 dt$ , где  $r(t)$  - решение системы оптимальности на предыдущем шаге, а  $r_{new}(t)$  - на данном, становится меньше некоторого заданного  $\varepsilon$ . Система оптимальности решается численно, при помощи пакета прикладных программ Mathematica 7.

Также в работе рассмотрена задача поиска оптимального управления в модели простейшего инфекционного заболевания после линеаризации[3].

Проведенные исследования позволили решить задачу управления для модели простейшего инфекционного заболевания следующим образом:  
1) Аналитически: линеаризовав исследуемую систему, получили формулу для расчета оптимального управления при заданных начальных дан-

ных в явном виде.

2) Численно: построили и при помощи пакета прикладных программ решили систему оптимальности.

### Литература

1. Марчук Г.И. Простейшая математическая модель вирусного заболевания // ВЦ СО АН СССР.- Новосибирск, 1975.
2. Ащепков Л.Т., Величенко Б.В. Оптимальное управление // Владивосток: ДВГУ, 1989. 116 с.
3. Ащепков Л.Т., Шапаренко Н.Н. Оптимальный синтез и упреждающая стабилизация линейной системы // Изв. академии наук Теория и системы управления. 1999. №1. С. 24-30.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ: РЕАЛИЗАЦИЯ В ПАКЕТЕ FEMLAB *А.В. Сивунов, А.Г. Масловская (АмГУ, Благовещенск)*

В ряде прикладных областей используется воздействие сосредоточенных источников различной природы на конденсированные среды. Такими примерами могут служить: облучение функциональных материалов тепловыми, электронными, лазерными потоками энергии с целью исследования их структурных свойств, физических характеристик и эффектов последствия. При подобных исследованиях одним из приоритетных факторов может оказаться тепловое воздействие. Экспериментально не всегда удается получить оценки теплового воздействия в силу ряда обстоятельств, как например, высокая погрешность результатов физических измерений, затруднительные условия проведения эксперимента, нечеткая интерпретация экспериментальных результатов и др. Поэтому на практике для оценки теплового воздействия используют методы и средства математического моделирования.

Аналитические методы решения задач теории теплопроводности разработаны только для узкого класса эволюционных задач, поэтому для

поведения вычислительных экспериментов и компьютерного моделирования процессов теплопроводности традиционно используют численные алгоритмы. Пакет FEMLAB, интегрируемый в Matlab, является мощным и универсальным средством реализации математических моделей в постановке краевых задач для уравнений в частных производных, возникающих в различных научных и прикладных областях.

Спектр проблем, исследование которых может быть осуществлено с помощью FEMLAB и его расширений, включает и возможность решения нестационарных задач диффузионного типа на основе методов конечно-элементного анализа.

Целью работы является исследование возможностей решения диффузионных задач в ППП Femlab на примере реализации математической модели нестационарного температурного распределения, вызванного воздействием движущегося электронного зонда на образец составного твердого тела. Возможность получения выражений для оценки температуры нагрева образца электронным зондом непосредственно связана с аппроксимацией формы границы области потерь энергии электронов. Реальная форма источников тепла естественно не совпадает с выбранной аппроксимацией. Перспективным направлением моделирования в этом случае можно считать геометрическое представление электронных траекторий, полученных методом Монте-Карло и дальнейшее использование дискретно заданной функции источника для расчета температурных распределений. Конфигурация теплового источника выбирается в зависимости от метода реализации модели теплового распределения. Области правильных геометрических форм (сфера, цилиндр или эллипсоид) выбираются чаще всего в случаях аналитических методов решения задачи и для ряда численных алгоритмов, основанных на конечномерных аппроксимациях задачи.

Таким образом, для построения модели необходимо задать теплофизические характеристики образца и параметры эксперимента, соответствующие режимам электронного зондирования. Сформулируем математическую постановку задачи теплопроводности. Будем считать, что на исследуемый образец, моделируемый сплошной средой, действует сфокусированный тепловой источник заданной конфигурации. Объемная плотность мощности задается как функция координат и времени с нормальным распределением, параметры которого определяются исходя из

результатов моделирования распределения электронной плотности методом Монте-Карло. Таким образом, требуется найти решение неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\rho} F(x, y, z, t)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость материала,  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ ;  $\rho$  – плотность материала,  $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$  – температуропроводность материала,  $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ ;  $F$  – объемная плотность мощности источника,  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$  с начальным условием

$$T(x, y, z, 0) = T_0.$$

Для замыкания математической формулировки необходимо задать расчетную область – геометрию образца и взаимное расположение теплового источника и образца, а также краевые условия.

Предположим, что в области  $0 < z < l$  находится проводящий материал с теплофизическими коэффициентами:  $k_1, a_1^2, \rho_1, c_1$  а в области  $l < z < Z$  – образец, характеристики которого –  $k_2, a_2^2, \rho_2, c_2$ . Контактное сопротивление на граничной поверхности отсутствует (математически задано условие на границе раздела двух сред, которое означает равенство температур и непрерывность тепловых потоков). Начало координат расположено в точке пересечения оси симметрии электронного зонда с плоскостью поверхности образца, ось  $Z$  совпадает с осью симметрии электронного зонда, оси  $Y$  и  $X$  лежат в плоскости поверхности образца. Область рассеяния электронов описывается половиной эллипсоида, центр которого расположен на поверхности образца в точке пересечения оси электронного зонда с плоскостью поверхности.

В плоскости  $z = 0$  в момент времени  $t = 0$  действует непрерывный источник тепла.

Для построения корректной модели в случае низковольтных режимов облучения глубина проникновения электронов значительно меньше диаметра зонда ( $d_0 \gg R_c$ ) и для аппроксимации области рассеяния электронов используют цилиндр.

Момент времени наблюдения температурного распределения в кристалле соответствует последнему моменту воздействия источника на образец.

В данной работе проведено моделирование нестационарного температурного распределения, вызванного воздействием движущегося источника тепла; представлено решение задачи теплопроводности при воздействии источника тепла на составные твердые тела; проведен расчет теплового воздействия электронного зонда на кристаллы различных полярных диэлектриков; представлен сравнительный анализ температурных конфигураций при различных параметрах используемых электродов; рассчитаны тепловые поля, вызванные воздействием источников различных конфигураций; проведено моделирование нестационарного распределения, вызванного воздействием пульсирующего источника тепла на исследуемый образец.

Представленные результаты моделирования могут быть использованы для оценки локального нагрева образцов электронным зондом, а также при исследовании физических процессов в твердых телах, в которых сосредоточенное тепловое воздействие играет приоритетную роль.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА

*О.В. Соболева (ИПМ ДВО РАН, Владивосток)*

Целью работы является теоретический и численный анализ коэффициентной обратной экстремальной задачи для стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции.

### 1. Постановка краевой задачи

Рассмотрим в ограниченной области  $\Omega$  из пространства  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) с липшицевой границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ , задачу нахождения концентрации  $C$  загрязняющего вещества из соотношений

$$-\lambda\Delta C + \mathbf{u} \cdot \text{grad}C - w_0 \partial C / \partial z + kC = f, \quad C|_{\Gamma_D} = \psi, \quad \lambda(\partial C / \partial n + \alpha C)|_{\Gamma_N} = \chi. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda = \text{const} > 0$  – коэффициент диффузии,  $\mathbf{u}$  – заданный вектор скорости,  $w_0 = \text{const} \geq 0$  – величина вертикальной скорости осаждения частиц примеси,  $k \geq 0$  – величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций,  $f$  – плотность объемных

источников,  $\psi$  и  $\chi$ ,  $\alpha$  – заданные на  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  функции, причем функция  $\alpha$  – коэффициент массообмена,  $\chi$  – поток вещества через  $\Gamma_N$ .

Ниже будем использовать пространства  $L^2(D)$  и  $H^s(D)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , где  $D$  представляет собой либо область  $\Omega$ , либо границу  $\Gamma$ , либо некоторую часть  $\Gamma_0$  границы  $\Gamma$ . Скалярные произведения в  $L^2(\Omega)$ ,  $L^2(Q)$ ,  $L^2(\Gamma_0)$  будем обозначать через  $(\cdot, \cdot)$ ,  $(\cdot, \cdot)_Q$ ,  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_0}$  соответственно. Норму в  $L^2(\Omega)$ ,  $L^2(Q)$  либо  $L^2(\Gamma_0)$  будем обозначать через  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_Q$  либо  $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$ , норму либо полунорму в  $H^1(\Omega)$  и  $\mathbf{H}^1(\Omega) \equiv H^1(\Omega)^d$  – через  $\|\cdot\|_1$  либо  $|\cdot|_1$ , норму в  $H^{1/2}(\Gamma_D)$  – через  $\|\cdot\|_{1/2, \Gamma_D}$ , отношение двойственности для пары  $X$  и  $X^*$  – через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$  или  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Предположим, что выполняются следующие условия:

(i)  $\Omega$  – ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , где  $d = 2, 3$  с границей  $\Gamma \in C^{0,1}$  и открытые участки  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  границы  $\Gamma$  удовлетворяют условиям:  $\Gamma_D \in C^{0,1}$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_N \in C^{0,1}$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ,  $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ .

При выполнении условий (i) существуют линейные непрерывные операторы следа  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  и  $\gamma|_{\Gamma_0} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_0)$  при  $\Gamma_0 = \Gamma_D$  либо  $\Gamma_0 = \Gamma_N$ . Введем основное для дальнейших рассмотрений гильбертово функциональное пространство  $\mathcal{T} \equiv \{S \in H^1(\Omega) : S = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$  с нормой  $\|\cdot\|_{\mathcal{T}} = \|\cdot\|_1$ . Через  $\mathcal{T}^*$  обозначим двойственное к  $\mathcal{T}$  относительно пространства  $L^2(\Omega)$ . Положим также  $L^2_+(\Gamma_N) = \{\alpha \in L^2(\Gamma_N) : \alpha \geq 0 \text{ на } \Gamma_N\}$ ,  $L^2_+(\Omega) = \{k \in L^2(\Omega) : k \geq 0 \text{ в } \Omega\}$ . Введем билинейные формы  $a, a_1, c_{\mathbf{u}} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $a_1(C, h) = \lambda a(C, h) + \lambda(\alpha C, h)_{\Gamma_N} - w_0(\partial C / \partial z, h) + (kC, h)$ ,  $a(C, h) = \int_{\Omega} \nabla C \cdot \nabla h d\Omega$ ,  $c_{\mathbf{u}}(C, h) = (\mathbf{u} \cdot \nabla C, h) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla C) h d\mathbf{x}$ . Предположим в дополнение к условиям (i), что выполняются условия

- (ii)  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \geq 0$  на  $\Gamma_N$ ,  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ ,  $k \in L^2_+(\Omega)$ ;
- (iii)  $\lambda_* = \delta_1 \lambda - \gamma_4 |w_0| > 0$ ; (iv)  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\alpha \in L^2_+(\Gamma_N)$ ,  $\chi \in L^2(\Gamma_N)$ .

Слабым решением задачи (1) будем называть функцию  $C \in H^1(\Omega)$ , удовлетворяющую соотношениям (2)

$$a_1(C, h) + c_{\mathbf{u}}(C, h) = \langle l, h \rangle \equiv (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N}, \quad \gamma|_{\Gamma_D} C = \psi. \quad (2)$$

Сформулируем следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда: 1) билинейная форма  $a_1 : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и  $\mathcal{T}$ -коэрцитивна с константой  $\lambda_*$ , определенной в (iii); 2) для любой пятерки  $(f, \psi, \chi, \alpha, k) \in L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_D) \times L^2(\Gamma_N) \times L^2_+(\Gamma_N) \times L^2_+(\Omega)$  задача (1) имеет един-



ственное слабое решение  $C \in H^1(\Omega)$  и справедлива оценка

$$\|C\|_1 \leq M_C \equiv \lambda_*^{-1} [M + (\lambda_* + \lambda + \lambda\gamma_3 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_4 |w_0| + \gamma_5 \|k\| + \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1) \gamma_6 \|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}]; \quad (3)$$

3) оператор  $(A, \gamma|_{\Gamma_D}) : X \rightarrow Y$ ,  $X = H^1(\Omega)$ ,  $Y = (\mathcal{T}^*, H^{1/2}(\Gamma_D))$ , где  $\langle AC, h \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} = a_1(C, h) + c_{\mathbf{u}}(C, h) \forall C \in H^1(\Omega)$ ,  $h \in \mathcal{T}$  осуществляет линейный и непрерывный изоморфизм пространств  $X$  и  $Y$ .

## 2. Обратная задача и оценки устойчивости

Исследуем обратную задачу для модели (1), заключающуюся в нахождении неизвестных параметров  $\alpha$ ,  $\chi$  и искомого решения  $C$ , по дополнительной информации о состоянии среды  $C_d(\mathbf{x})$ . Введем функционал качества  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  формулой  $I(C) = \|C - C_d\|_{H^1(Q)}^2$ , тогда решение обратной задачи можно свести к решению следующей экстремальной задачи

$$J(C, \alpha, \chi) \rightarrow \inf, \quad F(C, \alpha, \chi, f) = 0, \quad (C, \alpha, \chi) \in X \times K_1 \times K_2, \quad (4)$$

где  $F = (F_1, F_2) : X \times K_1 \times K_2 \rightarrow Y$ ,  $\langle F_1(C, \alpha, \chi, f), h \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} = \langle AC, h \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} - \langle l, h \rangle$ ,  $F_2(C, \alpha, \chi) = \gamma|_{\Gamma_D} C - \psi$ ,  $J(C, \alpha, \chi) \equiv (\mu_0/2)I(C) + (\mu_1/2)\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + (\mu_2/2)\|\chi\|_{\Gamma_N}^2$ ,  $J : X \times K_1 \times K_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu_0 \geq 0$ ,  $\mu_1 \geq 0$ ,  $\mu_2 \geq 0$  – некоторые константы.

Выведем необходимые условия оптимальности для задачи (4). По аналогии с [1] воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых задачах условной минимизации [2]. В соответствии с общей теорией экстремальных задач [2] введем в рассмотрение множитель Лагранжа  $y^* = (\eta, \zeta) \in Y^* \equiv \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ , и лагранжиан  $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K_1 \times K_2 \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ . [2, с. 79] вытекает

**Теорема 2.** Пусть при выполнении условий (i)–(iii) и  $K_1 \subset L_+^2(\Gamma_N)$ ,  $K_2 \subset L^2(\Gamma_N)$  – непустые выпуклые замкнутые множества.  $(\hat{C}, \hat{\alpha}, \hat{\chi}) \in H^1(\Omega) \times K_1 \times K_2$  – элемент, на котором достигается локальный минимум в задаче (4), и пусть функционал  $J(\cdot, \cdot) : X \times K_1 \times K_2 \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируем по  $C$  в точке  $(\hat{C}, \hat{\alpha}, \hat{\chi})$  для любого элемента  $(\alpha, \chi) \in K_1 \times K_2$  и является выпуклым по  $(\alpha, \chi)$  для каждого элемента  $C \in \mathcal{T}$ . Тогда существует множитель Лагранжа  $y^* = (\eta, \zeta) \in \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$  такой, что справедливо уравнение Эйлера-Лагранжа  $\langle J'_C(\hat{C}, \hat{\alpha}, \hat{\chi}), \tau \rangle_{X^* \times X} + \langle y^*, F'_C(\hat{C}, \hat{\alpha}, \hat{\chi})\tau \rangle_{Y^* \times Y} = 0 \quad \forall \tau \in H^1(\Omega)$ , и выполняется принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{C}, \hat{\alpha}, \hat{\chi}, y^*) \leq \mathcal{L}(\hat{C}, \alpha, \chi, y^*) \quad \forall (\alpha, \chi) \in K_1 \times K_2.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа вместе с принципом минимума и операторным уравнением  $F(C, \alpha, \chi) = 0$  представляет собой систему оптимальности для задачи (4), описывающую необходимые условия экстремума. Из анализа системы оптимальности вытекает следующая теорема

**Теорема 3.** Пусть при выполнении условий (i), (ii),  $K_1 \subset L^2_+(\Gamma_N)$ ,  $K_2 \subset L^2(\Gamma_N)$  – непустые выпуклые замкнутые множества, тройка  $(C_i, \alpha_i, \chi_i) \in H^1(\Omega) \times K_1 \times K_2$  является решением задачи (4), отвечающим заданным функциям  $C_d \equiv C_d^{(i)} \in L^2(Q)$  и  $f_i \in Z \subset L^2(\Omega)$   $i=1, 2$ , где  $Q \subset \Omega$  – произвольное открытое подмножество. Предположим, что  $\mu_0 > 0$  и выполняются условия  $\|C_i\| \leq M_C^0 = \sup_{\alpha \in K_1, \chi \in K_2, f \in Z} M_C(\alpha, \chi, f) < \infty$ ,  $i = 1, 2$ ,  $Z \subset L^2(\Omega)$ ,  $\mu_1 \geq 2\mu_0 \gamma_3^2 \lambda^2 \lambda_*^{-2} M_C^0 \tilde{M}_C^0 + 2\varepsilon \gamma_3^2 \lambda^2 (M_C^0)^2$ ,  $\mu_2 \geq 2\mu_0 \gamma_2^2 \lambda_*^{-2} (M_C^0)^{-1} \tilde{M}_C^0 + 2\varepsilon \gamma_2^2$ , где  $\|C_d^{max}\|_Q = \max(\|C_d^{(1)}\|_{1,Q}, \|C_d^{(2)}\|_{1,Q})$ , тогда справедливы оценки устойчивости

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Gamma_N} \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{1}{\gamma_3 \lambda \lambda_* M_C^0} \|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_{1,Q} + \frac{\mu_0 (2M_C^0 + \|C_d^{max}\|_{1,Q})}{\varepsilon \gamma_3 \lambda \lambda_*^2 (M_C^0)^2} \|f_1 - f_2\|,$$

$$\|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{1}{\gamma_2 \lambda_*} \|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_{1,Q} + \frac{\mu_0 (2M_C^0 + \|C_d^{max}\|_{1,Q})}{\varepsilon \gamma_2 \lambda_*^2 M_C^0} \|f_1 - f_2\|,$$

$$\|C_1 - C_2\|_1 \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{1}{\lambda_*^2} \|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_{1,Q} + \frac{\mu_0 (2M_C^0 + \|C_d^{max}\|_{1,Q})}{\varepsilon \lambda_*^3 M_C^0} \|f_1 - f_2\|.$$

### 3. Численный алгоритм решения обратной задачи

Обсудим результаты численных экспериментов решения следующей задачи:

$$J(C, \chi) = \frac{\mu_0}{2} \|C - C_d\|_Q + \frac{\mu_2}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, F(C, \chi) = 0, (C, \chi) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma_N). \quad (5)$$

Для решения задачи (5) применялся алгоритм, основанный на методе Ньютона. Он состоял из следующих этапов:

- 1) выбирается начальное приближение  $\chi^0$  и полагается  $n = 0$ ;
- 2) для известного элемента  $\chi^n$  находится приближенное решение (матрица)  $C^n$  прямой задачи;
- 3) находится приближенное решение (матрица)  $\eta^n$  сопряженной задачи;
- 4) вычисляется вспомогательный элемент  $g^n = \mu_2 \chi^n - \eta^n$ , имеющий смысл производной  $J'_\chi(\chi^n)$  от функционала  $J$ , где  $C_N^n, \eta_N^n$  –  $N$ -ые столбцы матриц  $C^n$  и  $\eta^n$ ;

- 5) вычисляется матрица Якоби  $H_n = (\partial g_i^n / \partial \chi_j^n)$  конечно-разностным методом;
- 6) вычисляется новое значение  $\chi^{n+1} = \chi^n - H_n^{-1} g^n$  элемента  $\chi$ ;
- 7) проверяется условие  $(\sum_{j=1}^{N-1} (\chi_j^{n+1} - \chi_j^n)^2)^{1/2} < 10^{-6}$ . Если условие выполняется, то осуществляется выход из цикла, а за приближенное численное решение обратной задачи выбирается  $(\chi^n, C^n)$ . В противном случае  $n$  увеличивается на 1 и осуществляется переход к п. 2.

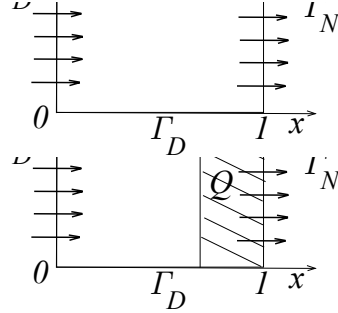


Рис. 1: Геометрия области переноса вещества

При проведении расчетов область  $\Omega$  и расположение участков границ  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  границы  $\Gamma$  выбирались как показано на рис. 1. В качестве исходной функции выбиралась  $\chi_d = \sin(\pi y)$ , а начального приближения –  $\chi_0=0$ . Тесты проводились для двумерного случая. Исходные данные задавались в следующем виде

$$Pe = 0.025, \mu_0 = 1, f = 0, w_0 = 0, \psi|_{y=0} = 0, \psi|_{y=1} = 0, \psi|_{x=0} = \sin(\pi y), \alpha = 0. \quad (6)$$

Здесь  $Pe=UL/\lambda$  – число Пекле,  $U$  и  $L$  – характерные длина и скорость. Дополнительная информация о решении (функция  $C_d$ ), в соответствии с концепцией квазиреального эксперимента, находилась путем численного решения прямой краевой задачи (1) при заданной функции  $\chi=\chi_d$  и значениях параметров, определенных в (6).

На рис. 2 графики зависимостей величин  $E_0=\|C - C_d\|_Q/\|C_d\|_Q$  и  $E_2=\|\chi - \chi_d\|_{\Gamma_N}/\|\chi_d\|_{\Gamma_N}$  от параметра  $\mu_2$  показывают, что уменьшение значения параметра  $\mu_2$  приводит к уменьшению ошибок  $E_0$  и  $E_2$ .

В случае, когда область  $Q$  является частью области  $\Omega$  самым удачным оказалось расположение, области  $Q$ , показанное на рис. 1. При восста-

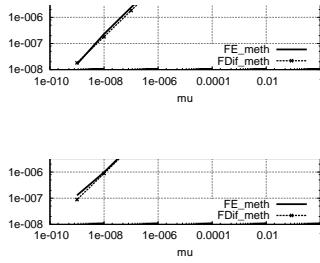


Рис. 2: Графики зависимостей ошибок  $E_0$  (слева)  $E_2$  (справа) от  $\mu_2$ , полученные с помощью пакета FreeFem++ (FE meth) и пакета Scilab (FDif meth).



Рис. 3: Графики зависимостей ошибок  $E_0$  (справа)  $E_2$  (слева) от размера области  $Q$ , полученные с помощью пакета FreeFem++ (FE meth) и пакета Scilab (FDif meth).

новлении параметра  $\chi$  требуется небольшая площадь области  $Q$ , чтобы получить достаточно точный результат (см. рис. 3).

**Заключение.** В результате проведенных исследований была доказана разрешимость обратной экстремальной задачи для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции (1), рассматриваемого в ограниченной области при смешанных граничных условиях и построена система оптимальности, установлены условия единственности и устойчивости решения. С использованием пакетов FreeFem++ [3] и Scilab [4] выполнено тестирование предложенного алгоритма численного решения обратной задачи, которое подтвердило эффективность алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ДВО РАН (про-

### Литература

1. *Алексеев Г.В.* Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 6. С. 1055–1076
2. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука. 1974. 480 с.
3. <http://www.freefem.org/ff++/index.htm>
4. <http://www.scilab.org>

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО  
УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩЕГО  
ВЕЩЕСТВА И ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ//  
*А.Ю. Сазандрашвили (ДВГУ, Владивосток)*

## 1. Постановка исходной краевой задачи

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область из пространства  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{R}^3$  с липшицевой границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ . Ниже будем исследовать задачи идентификации и задачи управления для линейного уравнения распространения (загрязняющего) вещества

$$-\lambda\Delta\varphi + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\varphi - w_0\partial\varphi/\partial z + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

рассматриваемого в области  $\Omega$  при следующих краевых условиях

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\partial\varphi/\partial n + \alpha\varphi) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (2)$$

Ниже на задачу (1), (2) при заданных функциях  $\mathbf{u}, f, \psi, \chi, \alpha$  и  $k$  будем ссылаться для краткости как на задачу 1.

## 2. Постановка и разрешимость задачи идентификации

Существует тип информации, которая используется в экстремальных задачах теории распространения загрязняющих веществ. В этих задачах вводится определенный функционал качества  $J$ , зависящий как от искомого решения, так и от ряда параметров, входящих в задачу, и требуется его минимизировать. Рассмотрим в качестве возможных управлений плотности  $f, k$  объемных либо граничных источников загрязняющего вещества. В качестве управлений выберем функции  $f$  и  $k$ , которые будем искать в некоторых множествах  $K_1$  и  $K_2$ , удовлетворяющих условиям

(j)  $K_1 \subset \mathcal{T}^*$ ,  $K_2 \subset L_+^2(\Omega)$  – непустые выпуклые замкнутые множества.

Пусть далее  $K \equiv K_1 \times K_2$ ,  $u = (f, k)$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $\mu_l \geq 0, l = 1, 2, 3$  – некоторые константы,  $\tilde{J} : X = H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  – слабо полунепрерывный снизу функционал. Введем функционал  $J : X \times K \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемый формулой

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} \tilde{J}(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|f\|_{\mathcal{T}^*}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|k\|^2, \quad (3)$$

и предположим в дополнение к (j), что выполняются следующие условия:

(jj)  $\mu_0 > 0$ ,  $\mu_l \geq 0$  и  $K_l$  – ограниченные множества, либо  $\mu_l > 0$  и функционал  $\tilde{J}$  ограничен снизу,  $l = 1, 2, 3$ .

Рассматривая функционал  $J$  на слабых решениях задачи 1, запишем ограничение в виде

$$F(\varphi, u) \equiv F(\varphi, f, k) = 0. \quad (4)$$

Исследуем следующую экстремальную задачу:

$$J(\varphi, u) \equiv J(\varphi, f, k) \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in X \times K. \quad (5)$$

## 3. Численный алгоритм решения задачи идентификации младшего коэффициента на основе метода Ньютона

Рассмотрим итерационный алгоритм, основанный на методе Ньютона для решения систем уравнений. Он состоит из следующих этапов:

1. Полагаем  $n = 0$ . Выбираем некоторое начальное приближение  $\varphi_n, \eta_n, k_n$ .
2. Вычисляем  $(\bar{\varphi}, \bar{\eta}, \bar{k})$  как решение уравнения

$$\Psi'(\varphi_n, \eta_n, k_n)[\bar{\varphi} \ \bar{\eta} \ \bar{k}] = -\Psi(\varphi_n, \eta_n, k_n). \quad (6)$$

3. Пересчитываем значения искомых величин по формулам

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \bar{\varphi}, \quad \eta_{n+1} = \eta_n + \bar{\eta}, \quad k_{n+1} = k_n + \bar{k}. \quad (7)$$

4. Проверяем условия выхода из цикла. Если условия не выполняются, то полагаем  $n = n + 1$  и переходим к пункту 2.

Здесь  $\Psi'$  - производная Фреше оператора  $\Psi$ , имеющая следующий вид:

$$\Psi'(\varphi, \eta, k) = \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & (\varphi, h) \\ (1, \tau) & \psi_{22} & (\eta, \tau) \\ \eta & \varphi & \mu_2 \end{pmatrix}$$

где элементы  $\psi_{11}$  и  $\psi_{22}$  определяются соотношениями

$$\langle \psi_{11}, \varphi \rangle = (\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (k \varphi, h),$$

$$\langle \psi_{22}, \eta \rangle = (\lambda \nabla \eta, \nabla \tau) - (\mathbf{u} \cdot \nabla \eta, \tau) + (k \eta, \tau).$$

## 4. Нестационарная задача

В том случае, когда используется дивергентная форма уравнения конвекции - диффузии, неизвестная функция  $\varphi$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla(v\varphi) - \nabla(k\nabla\varphi) = f. \quad (8)$$

В дивергентной форме уравнение конвекции - диффузии явно выражает соответствующий закон сохранения. В некоторых случаях лучше записывать уравнение конвекции - диффузии в недивергентной форме. Тогда неизвестная функция  $\varphi$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (v\nabla)\varphi - \nabla(k\nabla\varphi) = f. \quad (9)$$

Уравнение с недивергентными конвективными слагаемыми является основным при рассмотрении краевых задач для параболических уравнений второго порядка. Заслуживает специального выделения и так называемая симметричная форма уравнения конвекции - диффузии. В этом случае конвективный перенос представляется в виде полусуммы конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах, то есть в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla(v\varphi) + (v\nabla)\varphi) - \nabla(k\nabla\varphi) = f. \quad (10)$$

Как правило, рассматриваются только линейные уравнения конвекции - диффузии. Типичной является зависимость коэффициента диффузии от точки пространства (неоднородные среды), коэффициента конвективного переноса (скорости) не только от точки пространства, но и от времени, то есть  $k = k(x), v = v(x, t), f = f(x, t)$ . В случае двумерной задачи, на решение которой мы и будем ориентироваться, нестационарное уравнение конвекции - диффузии с конвективными слагаемыми в недивергентном виде можно записать следующим образом

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 v_{\alpha}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}}) = f(x, t). \quad (11)$$

Это уравнение дополняется соответствующими начальными и граничными условиями. Вторым примером является нестационарное уравнение конвекции - диффузии с конвективным переносом в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v_{\alpha}(x, t) \varphi) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}}) = f(x, t). \quad (12)$$

Уравнение конвекции - диффузии с конвективными слагаемыми в симметричной форме записывается в следующем виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 [v_{\alpha}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v_{\alpha}(x, t) \varphi)] - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}}) = f(x, t). \quad (13)$$



Введем в рассмотрение операторы диффузионного и конвективного переноса. Оператор диффузионного переноса  $D$  определяется выражением

$$D\varphi = -\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} \right). \quad (14)$$

Оператор конвективного переноса в соответствии с (11) - (13) записывается в различных формах. Так, для оператора конвективного переноса в недивергентной форме в соответствии с (11) положим  $C = C_1$ , где

$$C_1\varphi = \sum_{\alpha=1}^2 v_{\alpha}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}}. \quad (15)$$

Для оператора конвективного переноса в дивергентной форме в соответствии с (12) положим  $C = C_2$ , где

$$C_2\varphi = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v_{\alpha}(x, t)\varphi). \quad (16)$$

С учетом (26) оператор конвективного переноса в симметричной форме имеет вид, таким образом

$$C_0\varphi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ v_{\alpha}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v_{\alpha}(x, t)\varphi) \right]. \quad (17)$$

С учетом соотношений (14) - (17), нестационарную задачу конвекции - диффузии можно записать в виде дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f \quad \text{в } \Omega \times \Omega_t, \Omega_t = (0, T), \quad (18)$$

где  $A = A(t) = C(t) + D, t > 0, a\varphi = g$  на  $\partial\Omega \times \Omega_t, \varphi = \varphi^0$  в  $\Omega$  при  $t = 0$ .

В работе были сформулированы и исследованы с использованием методов работ [1-6] обратные экстремальные задачи для уравнения (1).

### Литература

1. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // *Ж. выч. матем. и мат. физ.* 2002. Т. 42. N. 3. С. 380-394.
2. *Алексеев Г.В.* Классические методы математической физики. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та. 2003. 416 с.
3. *Алексеев Г.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // *Сиб. мат. журн.* 2001. Т. 42. N. 5. С. 971-991.
4. *Алексеев Г.В.* Теоретический анализ стационарных задач задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции. Препринт N 16. Владивосток: ИПМ ДВО РАН, 1997. 56 с.
5. *Алексеев Г.В., Калинина Е.А.* Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции - диффузии - реакции // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2007. Т. 11. N. 1. с. 3-16.
6. *Алексеев Г.В., Прокопенко С.В., Соболева О.А., Терешко Д.А.* Задачи оптимального управления для некоторых моделей распространения загрязнений // *Выч.техн. Спец.вып.* 2003. Т.8. Ч. 4. С. 65-71.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК РАБОЧИХ КОЛЕС  
МАЛОРАСХОДНЫХ ТУРБИН

*А. Ю. Фершалов, М.В. Грибиниченко, Л.П. Циганкова*  
(*Дальневосточный государственный технический университет*)

Перспективы успешного развития отечественной энергетики, авиационного и судового транспорта, а также других отраслей в значительной мере связаны с повышением эффективности и надежности тепловых турбомашин. Тенденция к повышению параметров в современных и перспективных двигателях, требование сокращения их массы и габаритов при обеспечении высокой эффективности явились основными причинами

применения высокоперепадных турбин. Эта тенденция проявляется достаточно четко как в зарубежном, так и в отечественном двигателестроении. Области применения тепловых турбомашин относятся к приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в Российской Федерации: транспортные, авиационные и космические системы; энергетика и энергосбережение. Также тепловые турбомашин соответствуют критической технологии: "Технологии создания энергоэффективных двигателей и движителей для транспортных систем". В транспортной энергетике часто для обеспечения требований мобильности и автономности, приходится создавать турбоприводы с ограниченным расходом рабочего тела (РТ). Это снижает площадь проходных сечений проточной части. Использование в таких турбинах ступеней с полным подводом РТ требует применения недопустимо малых высот рабочих лопаток, что вынуждает изготавливать сопловые аппараты (СА) с частичным подводом РТ к рабочему колесу (парциальность), что приводит к дополнительным потерям энергии. По данным МАИ и КуАИ, снижение степени парциальности с 1 до 0,15 у осевых малорасходных турбин (МРТ) приводит к падению КПД с 75% до уровня менее 50%. Это влияет на уровень автономности аппарата, по которому можно оценить целесообразность установки турбин. Все вышесказанное ограничивает области применения традиционных турбин и заставляет искать новые пути решения проблемы. Один из путей решения проблемы, связанной с парциальностью – использование МРТ конструкции ЛПИИ (авторское свидетельство №857512, 1981г, Кириллов И.И.), имеющих в своем составе СА с малыми конструктивными углами выхода из сопел. Предлагаемый путь позволяет выполнять турбины с полным подводом РТ, что исключает потери, связанные с парциальностью. Такие СА предполагают их использование совместно с рабочими колесами (РК), имеющими каналы с большим углом поворота, что приводит к повышению потерь энергии. Условием применения подобных конструкций является преобладание потерь, связанных с парциальностью, над потерями, обусловленными использованием таких РК. При конструировании МРТ некорректно использование стандартных методик проектирования РК, так как для сохранения приемлемой толщины РК лопатки приходится выполнять с большим относительным шагом. Поэтому большое практическое значение имеет совершенствование и выбор оптимальных геометрических и режимных параметров проточных частей РК с большим углом поворота потока, позволяющих повысить эффективность МРТ. Особенно сильно влияние РК

на эффективность МРТ проявляется в многоступенчатых турбинах, так как неверная оценка свойств РТ за РК влечет за собой ошибочное профилирование следующей ступени. Научная значимость данного исследования и его цель состоит в повышении эффективности сверхзвуковых осевых МРТ на основе разработки методики определения оптимальных конструктивных параметров РК с большим углом поворота потока. Для достижения цели были решены следующие задачи: обработаны замеры, выполненные в СПбГПУ на базе лаборатории МРТ; применена методика, позволяющая по имеющимся замерам, получать экспериментальные данные (значения угла выхода потока); выбрана математическая модель эффективности РК МРТ; выбрана математическая модель угла выхода потока из РК МРТ; проверена адекватность моделей экспериментальным данным; проведены вариантные расчеты с целью анализа физической сущности явлений; проведены оптимизационные расчеты. Программа проведения исследований включала в себя исследование трех рабочих колес в составе МРТ и предполагала получение математически formalизованных моделей, учитывающих влияние каждого исследуемого фактора на эффективность РК. Экспериментальные замеры, необходимые для проведения теоретических исследований, были получены на стенде, созданном на базе СПбГПУ. Нахождение газодинамических характеристик РК проводилось с помощью методики, основанной на нахождении характеристик РТ за РК посредством измерения крутящего момента. Она позволила найти угол выхода потока. Методика, основанная на законах сохранения: момента количества движения, полной энергии и массы имеет следующие допущения: процесс адиабатический; соотношения температуры, давления и плотности РТ подчиняются уравнению состояния идеального газа; РК работает в стационарном режиме. Результатом эксперимента явились коэффициент скорости РК и угол выхода потока из него. В связи с тем, что замеры имели погрешность, нахождение функции сводится к решению задачи минимизации и максимизации ее от влияющих исходных данных, на которые наложены ограничения в виде доверительного интервала. После нахождения максимума и минимума функции найдено среднеарифметическое, принятое за математическое ожидание, а максимальное и минимальное значение - за границы доверительного интервала.

Результаты работы:

- систематизация сведений по газодинамическим характеристикам РК осевых турбин;

- выбран и обоснован оптимальный вариант исследования;
- методика определения погрешности результатов эксперимента;
- модель регрессионного типа для расчета коэффициента скорости РК;
- модель регрессионного типа для расчета угла выхода потока из РК;
- методика определения конструктивных и геометрических параметров на стадии проектирования для получения максимальной эффективности РК.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА "FREEFEM++"

*М.Ю. Фершалов (ДВГТРУ, Владивосток)*

Изучение течения газа проводится двумя путями: экспериментальным и теоретическим. Экспериментальный путь, как путь, дающий самые достоверные результаты предпочтителен, однако проблема состоит в том, что возможности экспериментальных исследований в данной области ограничены в силу ряда причин (финансовых и технического плана). Поэтому наиболее перспективно получение математических моделей основанных на фундаментальных законах газовой динамики, проверенных на адекватность с результатами, полученными в результате экспериментов.

В данной работе исследуется возможность применения программы "FREEFEM++" для численного решения системы уравнений Навье-Стокса.

Это специализированный пакет для численного решения уравнений с частными производными методом конечных элементов. Особенности: свой язык программирования, транслируемый в C++, типизированный C-подобный, со встроенными типами триангуляций и пространств конечных элементов, код получается понятен, краток и приближен к математической записи задачи в слабой форме, но поддерживаются только треугольные элементы, кроссплатформенный инструмент, лицензия LGPL. В этот пакет уже входит построение расчетной сетки, что сильно упрощает работу исследователя.

Рассматривается течение вязкого несжимаемого газа в канале Т-образной формы, с различными геометрическими параметрами самого канала, так и с различными числами Рейнольдса.

Т.к. программа работает с уравнениями в слабой (вариационной) форме, то первый шаг - это переход к слабой форме. Второй шаг - составление программы на языке "FREEFEM++".

Результатом являются линии уровня и вектора интересующих величин (в частности скоростей). Полученные рисунки сравниваются с рисунками из [2].

### Литература

1. Hecht F., Pironneau O., Le Hyaric A., Ohtsuka K. FreeFem++. Version 3.8-2, Tutorial
2. М. Ван-Дайк. Альбом течений жидкости и газа: пер с англ. // М.: Мир 1986.

### ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ Е.А. Щербakov (ДВФУ, Владивосток)

В этой работе рассматриваются обратные экстремальные задачи для линейной нестационарной модели распространения вещества. Исследуется разрешимость указанных задач, выводятся и анализируются системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума, и устанавливаются достаточные условия, обеспечивающие единственность и устойчивость решений экстремальных задач. Развиваются численные алгоритмы решения конкретных экстремальных задач, обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область из пространства  $\mathbb{R}^d$ ,  $d=2,3$  с липшицевой границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ . Ниже будем исследовать в этой работе обратные экстремальные задачи для нестационарного уравнения распространения примеси:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda \Delta \varphi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \varphi + k \varphi = f \text{ в } (0; T] \times \Omega, \quad (1)$$

рассматриваемого в области  $\Omega$  при следующих неоднородных краевых условиях и начальных условиях:

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D \times (0; T], \quad \lambda \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \alpha \varphi \right) = \chi \text{ на } \Gamma_N \times (0; T], \quad (2)$$

$$\varphi = \varphi_0 \text{ при } t = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация загрязняющего вещества (примеси),  $\lambda = \text{const} > 0$  – коэффициент диффузии,  $\mathbf{u}$  – заданный вектор скорости,  $k \geq 0$  – величина, характеризующая скорость распада загрязняющего вещества за счет химических реакций,  $f$  – плотность объемных источников примеси,  $\psi$  и  $\chi$ ,  $\alpha$  – заданные соответственно на  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  функции. Рассмотренная выше задача содержит ряд физических параметров, которые должны быть заданы для нахождения ее решения. Вместе с тем в ряде случаев достоверная информация об этих параметрах неизвестна. В этих случаях возникает необходимость решения обратных задач для модели (1), (2), заключающихся в нахождении неизвестных параметров по определенной информации о состоянии среды. В качестве указанной информации о решении можно выбрать, например, значения  $\varphi_d(x)$  концентрации  $\varphi$ , измеренные в точках некоторого множества  $Q \subset \Omega$ . Решение обратных задач можно свести к решению экстремальных задач при соответствующем выборе функционала качества и управлений [1, 2].

### Литература

1. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // Ж. выч. матем. и мат. физ. 2002. Т. 42. N.
2. *Алексеев Г.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. N. 5. С. 971-991.

Научное издание

Вторая Дальневосточная конференция  
студентов, аспирантов и молодых ученых  
по теоретической и прикладной математике

Сборник научных статей

В авторской редакции  
Технический редактор А.А. Лядичева  
Компьютерный набор Е.Г. Прилепкина

Подписано в печать 16.11.2010  
Формат  $60 \times 84^{1/8}$  . Усл.печ.л. 10,5; уч.-изд.л. 9,2

Тираж 100 экз.

Издательство Дальневосточного федерального университета  
690950, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27