

УДК 681.5

Кривошеев Владимир Петрович, Кан Борис Анатольевич

*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Владивосток, Россия*

Особенности параметрического синтеза цифровых систем управления

Для получения дискретной формы системы управления используют математический аппарат z -преобразования, что влечет за собой ряд особенностей, связанных с алгебраическими и частотными критериями качества, которые рассматриваются в рамках данной статьи.

Ключевые слова и словосочетания: цифровые системы управления, параметрический синтез, частотный диапазон, системы с запаздыванием, D -разбиение.

Введение

При параметрическом синтезе цифровых систем управления можно выделить два подхода. Один из них заключается в переводе результатов параметрического синтеза аналоговой системы управления на цифровую систему, используя подстановку Тастина [4]. Этот подход широко используется при синтезе систем управления сильно инерционными объектами, например, объектами химической технологии. Второй подход предусматривает синтез системы управления при представлении объекта управления и управляющих устройств в дискретной форме и является общим подходом.

В этом случае по сравнению с синтезом аналоговых систем имеют место следующие особенности:

1) возможность применения алгебраических критериев и критерия Михайлова для оценки устойчивости системы управления объектами с чистым (транспортным) запаздыванием;

2) узкий частотный диапазон функционирования системы до значения $\frac{2\pi}{T_0}$, где T_0 – шаг дискретизации. Так как сигнал на выходе дискретизатора существует только в дискретные моменты времени, то прохождение сигнала через дискретизатор связано с потерей информации. Однако при ограниченном спектре сигнала можно вновь восстановить сигнал по последовательности мгновенных импульсов на выходе дискретизатора. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие теоремы Котельникова [4]

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0} \geq 2\omega_{cp}, \quad (1)$$

где ω – частота работы дискретизатора,

ω_{cp} – частота среза спектра непрерывного сигнала.

Условие (1) используется для выбора частоты работы дискретизатора. При этом необходимо учитывать, что реальные сигналы имеют неограниченные спектры, поэтому условие теоремы Котельникова нужно рассматривать как приближенное утверждение, определяющее наименьшую частоту работы дискретизатора;

3) повышается размерность задачи оптимизации при поиске оптимальных настроек. ПИД-регулятора.

Особенности параметрического синтеза

Рассмотрим первую особенность.

Возьмём систему с запаздыванием:

$$W_o(s) = \frac{M_o(s)}{N_o(s)} e^{-s\tau}, \quad (2)$$

$$R(s) = \frac{M_p(s)}{N_p(s)}, \quad (3)$$

где $W_o(s)$ и $R(s)$ – передаточные функции соответственно объекта управления и регулятора,

s – оператор Лапласа,

$M(s)$ и $N(s)$ – полиномы произвольного порядка,

$e^{-s\tau}$ – передаточная функция звена запаздывания.

Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$1 + W_c(s) = 1 + \frac{M_o(s)M_p(s)}{N_o(s)N_p(s)} e^{-s\tau} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0} e^{-s\tau} = 0. \quad (4)$$

Применить алгебраический критерий Гурвица [3] или Михайлова [3] здесь невозможно без приближённой аппроксимации выражения $e^{-s\tau}$ полиномом, в общем случае с неопределённым числом членов разложения.

В цифровых системах управления из z-преобразования следует отношение:

$$z = e^{-sT_0}. \quad (5)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение цифровой системы с запаздыванием:

$$1 + W_c(z) = 1 + \frac{M_o(z)M_p(z)}{N_o(z)N_p(z)} z^{-\frac{\tau}{T_0}} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0} z^{-\frac{\tau}{T_0}} = 0. \quad (6)$$

Степень полинома сместится на значение $-\frac{\tau}{T_0}$ и критерии Гурвица и Михайлова можно применить с использованием известных преобразований.

Рассмотрим вторую особенность.

Вернемся к отношению (5), произведя замену $s = j\omega T$. Полученное выражение можно разложить по формуле Эйлера:

$$e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j \sin(\omega T). \quad (7)$$

Вещественная и мнимая составляющие (7) оказываются периодическими функциями частоты с периодом T_0 . Следовательно, нельзя различить составляющие, частоты которых кратны частоте работы дискретизатора $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$.

Рассмотрим третью особенность с описанием предлагаемого метода определения оптимальных настроек цифрового ПИД-регулятора на основе расширенных амплитудно-фазовых характеристик по заданной степени колебательности.

При управлении энергетическими [2], а также химико-технологическими объектами [5] широко распространена постановка задачи параметрического синтеза в виде:

$$\sum_{k=0}^M (e_k^2(q)) \rightarrow \min_q, \quad (8)$$

$$m = m_z, \quad (9)$$

где q – вектор настроечных параметров регулятора,

k – индекс, соответствующий моменту времени $t_k = k\Delta t$,

m – степень колебательности,

z – для заданных значений.

Возьмем одноконтурную цифровую АСР, состоящую из объекта управления с передаточной функцией $W_o(z)$ и ПИД-регулятора с передаточной функцией

$$R(z, q_0, q_1, q_2) = (q_0 - q_1 z^{-1} - q_2 z^{-2}) / (z - z^{-2}).$$

Выполним z -преобразование передаточной функции объекта управления и получим передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_{p.c.}(z) = W_o(z)R(z, q_0, q_1, q_2). \quad (10)$$

Выполним билинейное преобразование [1; 6]:

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (11)$$

$$w = jv, \quad (12)$$

где v – псевдочастота,

$$v = tg \frac{\omega T}{2}. \quad (13)$$

Здесь ω – круговая частота.

АФХ разомкнутой цифровой системы:

$$W_{pc}(z) / \frac{1+w}{1-w} = \operatorname{Re}(q_0, q_1, q_2, v) + j\operatorname{Im}(q_0, q_1, q_2, v). \quad (14)$$

Условие положения системы на границе устойчивости по критерию Найквиста [1] имеет вид:

$$W_{pc}(z) / \frac{1+w}{1-w} = -1. \quad (15)$$

Это соответствует отображению границы устойчивости $w=jv$ в комплексную плоскость $W_{pc}(z) / \frac{1+w}{1-w}$.

Для обеспечения заданной степени колебательности m должно выполняться условие (12) при:

$$w = -mv + jv, \quad (16)$$

где m – требуемая степень колебательности.

Таким образом:

$$W_{pc}(z) / \frac{1+w}{1-w} = \operatorname{Re}(q_0, q_1, q_2, m, v) + j\operatorname{Im}(q_0, q_1, q_2, m, v) = -1. \quad (17)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(q_0, q_1, q_2, m, v) = -1 \\ \operatorname{Im}(q_0, q_1, q_2, m, v) = 0 \end{cases}. \quad (18)$$

В плоскости корней: q_0, q_1 и q_2 системы уравнений (18) для заданного значения $m = m_3$, при изменении псевдочастоты v можно построить линию Д-разбиения, а оптимальные настроечные параметры регулятора можно определить поиском минимума квадратичной интегральной оценки движением по этой линии. В полученном уравнении имеем 3 неизвестных: q_0, q_1 и q_2 (m – задается исходя из требований к устойчивости системы, v – изменяем в пределах частотного диапазона, добиваясь минимума квадратичной интегральной оценки). Заметим, что в аналоговых системах существует известное соотношение настроечных параметров:

$$c_2 = \frac{\alpha c_1^2}{c_0}, \quad (19)$$

где $0,1 \leq \alpha \leq 0,6$.

В этом случае на единицу снижается размерность задачи оптимизации квадратичной интегральной оценки. Следовательно, при параметрическом синтезе аналогового ПИД-регулятора при заданном значении α с учётом соотношений (19) и (18) решение задачи сводится к одномерному поиску частоты ω в частотном диапазоне его функционирования. Поскольку в цифровых системах не выявлено взаимосвязи между настроечными параметрами, параметрический синтез цифрового ПИД-регулятора сводится к двумерной задаче оптимизации, например по параметру q_2 , и псевдо частоте ν . Оптимальные значения настроечных параметров q_0 и q_1 при этом вычисляются из условий (18).

Нами при параметрическом синтезе цифрового ПИД-регулятора использовались оба подхода:

- 1) методика параметрического синтеза аналоговых систем с переходом на настройки цифрового ПИД-регулятора;
- 2) предложенный метод. При применении предложенного метода установлено, что поиск оптимальных настроек градиентным методом требует предварительного исследования области варьируемых параметров ω и q_2 для выбора исходной точки поиска. Выбор исходных значений варьируемых параметров оказывает существенное влияние на сходимость расчёта.

В данной работе приводится пример параметрического синтеза цифрового ПИД-регулятора с использованием подстановки Тастина.

Рассмотрим аналоговую систему с ПИД-регулятором и объектом вида:

$$W_o(s) = 10 \frac{1}{1+100s} e^{-5s}. \quad (20)$$

Дискретный вид объекта:

$$W_o(z) = \frac{z-1}{20z-19,9} z^{-\frac{5}{T_0}}. \quad (21)$$

Передаточная функция ПИД-регулятора, полученная с помощью подстановки Тастина:

$$W_p(z) = \frac{z^2(c_0T_0^2 + 2c_1T_0^2 + 4c_2) + z(2c_0T_0^2 - 8c_2) + 4c_2 + c_0T_0^2 - 2c_1T_0^2}{2T_0(z^2 - 1)}, \quad (22)$$

где c_0 , c_1 и c_2 – настроечные параметры аналогового ПИД-регулятора.

Линия Д-разбиения в пространстве настроек аналогового регулятора для этого случая представлена на рис. 1.

Оптимальному процессу (рис. 3), обеспечивающему минимальное значение интегрального критерия (8) для рассматриваемой системы при $m = 0,221$, соответствуют следующие значения настроечных параметров аналогового ПИД-регулятора: $c_0=0.2403$, $c_1=2.756$, $c_2=4.743$. Для по-

строения переходного процесса использовалась среда Matlab. Схема аналоговой системы приведена на рис. 2.

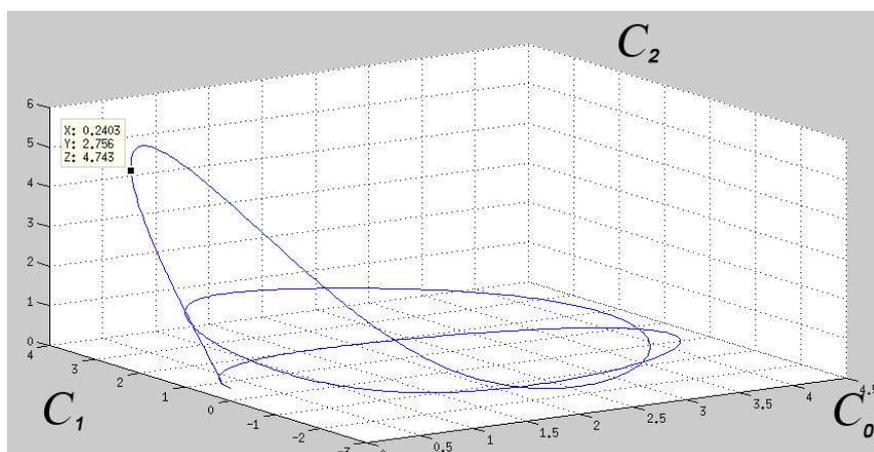


Рис. 1. Линия Д-разбиения для ПИД-регулятора в трехмерном пространстве параметров аналогового регулятора C_0, C_1, C_2

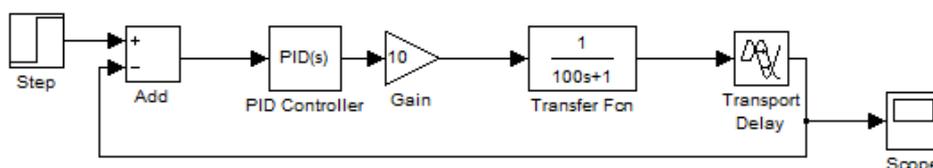


Рис. 2. Схема аналоговой системы управления, построенная в Matlab

Переходной процесс аналоговой системы при найденных настройках имеет вид:

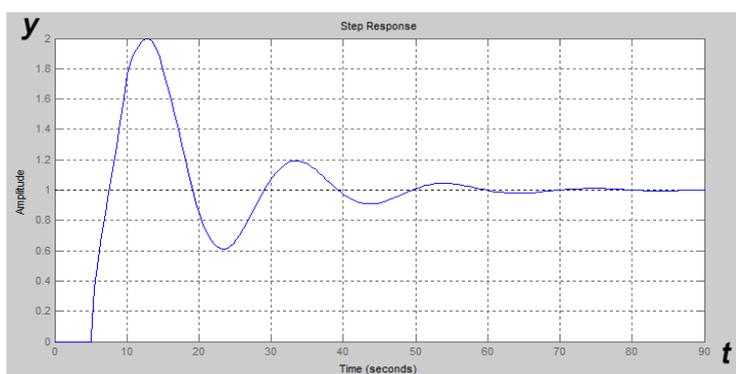


Рис. 3. Переходной процесс аналоговой системы с найденными настройками

Этим настройкам при $T_0 = 1$ соответствуют следующие параметры цифрового регулятора: $q_2 = -0.5$, $q_1 = 0.1489$, $q_0 = 0.4549$.

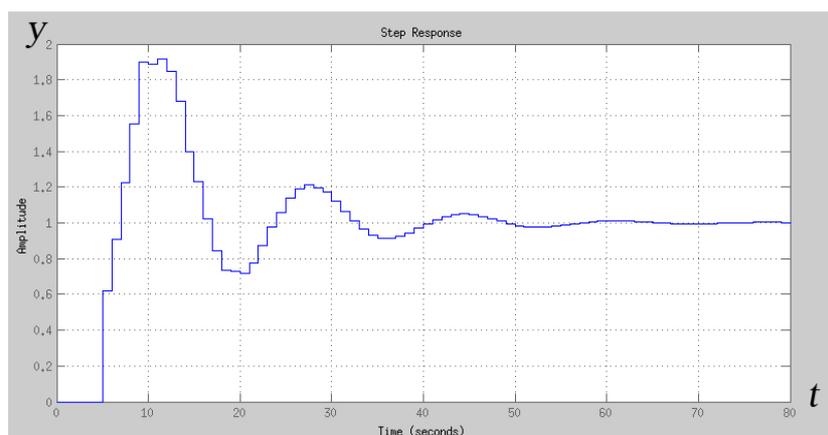


Рис. 4. Переходной процесс цифровой системы управления

Выводы

Цифровые системы управления имеют ряд особенностей, вытекающих из z -преобразования, что позволяет применять алгебраические и частотные критерии устойчивости для систем с запаздыванием. Метод расширенной амплитудно-фазовой характеристики с использованием D -разбиения применим и для цифрового ПИД-регулятора, однако для организации поиска методом градиента в плоскости параметров q_2 и ν необходимо установить условия выбора их начальных значений, так как в области неустойчивой работы системы возникают трудности при выборе базового шага движения в направлении градиента.

1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М., 1972. – С. 768.
2. Дудников Е.Г. Автоматическое управление в химической промышленности / Е.Г. Дудников, А.В. Казаков, Ю.Н. Софиева, А.Э. Софиев, А.М. Цирлин. – М.: Химия, 1987.
3. Лукас В.А. Теория управления техническими системами / В.А. Лукас. – Екатеринбург, 2002. – С. 416.
4. Поляков К.Ю. Основы теории цифровых систем управления / К.Ю. Поляков. – СПб., 2006. – С. 260.
5. Стефани Е.П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов / Е.П. Стефани. – М., 1972.
6. Roland S. Burns. Advanced Control Engineering / Burns S. Roland. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001. – P. 450.