Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Дальневосточный государственный университет”

На правах рукописи

Первухин Михаил Александрович

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛИГОНОВ

01.01.06. —математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
А.А. Степанова

Владивосток – 2010

Содержание

Введение **3**

1 Теоретико-модельные свойства плоских ЧУ-полигонов **15**

1.1 Необходимые определения и предварительные сведения 15

1.1.1 Сведения из теории ЧУ-полигонов и теории моделей полигонов 15

1.1.2 Совершенные слева ЧУ-моноиды 25

1.2 Аксиоматизируемость классов плоских ЧУ-полигонов 36

1.3 Полнота, модельная полнота и категоричность классов плоских ЧУ-полигонов 49

2 Теоретико-модельные свойства проективных и свободных ЧУ-полигонов **54**

2.1 Необходимые определения и предварительные сведения 54

2.2 Аксиоматизируемость классов проективных и свободных ЧУ-полигонов 59

2.3 Полнота, модельная полнота и категоричность классов проективных и свободных ЧУ-полигонов 73

3 Теоретико-модельные свойства регулярных ЧУ-полигонов **77**

3.1 Необходимые определения и предварительные сведения 77

3.2 Аксиоматизируемость класса регулярных ЧУ-полигонов . . . 80

3.3 Полнота и модельная полнота класса регулярных ЧУ-полигонов 84

Список литературы **86**

Введение

Тема диссертации относится к теоретико-модельной алгебре. Предметом исследования являются некоторые классы частично упорядоченных полигонов. С помощью современного арсенала теории моделей, включающего теорию категоричности, различные теоретико-модельные конструкции, изучаются такие свойства этих классов, как аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота, категоричность.

Понятие частично упорядоченного полигона возникло при изучении отображений между частично упорядоченными множествами (см. [18]). В некотором смысле понятие частично упорядоченного полигона является обобщением понятия полигона. Напомним, что левым полигоном над моноидом S или, просто, полигоном называется множество, на котором S действует слева, при этом единица S действует тождественно. Если S – частично упорядоченный моноид (ЧУ-моноид), то под левым частично упорядоченным полигоном или, просто, частично упорядоченным полигоном (ЧУ-полигоном) понимается частично упорядоченное множество, являющееся левым полигоном над моноидом S, на котором действие частично упорядоченного моноида S является монотонным по каждому аргументу. ЧУ-полигоны исследовались такими авторами, как S.M. Fakhruddin [27, 28], X. Shi [47, 48], Z. Liu [48], F. Wang [48], S. Bulman-Fleming [19, 20, 25, 26, 48], V. Gould, L. Shaheen [35, 36], A. Golchin and P. Rezaei [31], S. Tajnia [50] и др..

Толчком к исследованию теоретико-модельных свойств ЧУ-полигонов послужили работы в области теории моделей полигонов Т.Г. Мустафина [1, 9, 10, 46], S. Bulman-Fleming [22], V. Gould [22, 30, 33, 32], J.B. Fountain [29, 30], B. Poizat [46], А.А. Степановой [15, 16, 17], Е.В. Овчинниковой

[12], M. Kilp [6, 39, 42], U. Knauer [40, 43, 44, 45], А.Н. Ряскина [13], А.А. Иванова [38], П. Нормака [11], Л.А. Скорнякова [14], L.H. Tran [51] и др. В этих работах изучаются класс всех полигонов над моноидами и классы плоских, проективных, свободных, регулярных полигонов с точки зрения их аксиоматизируемости, полноты, модельной полноты, категоричности, стабильности. Аналогичные вопросы для ЧУ-полигонов исследуются в данной работе.

В 1980-х годах S.M. Fakhruddin публикует две работы [27, 28], посвященные тензорным произведениям и плоскостным свойствам в контексте ЧУ-моноидов, действующих на частично упорядоченных множествах. В частности, в этих работах вводится понятия плоского ЧУ-полигона. Позднее X. Shi в [47] были рассмотрены сильно плоские и слабо плоские ЧУ-полигоны. Сильно плоский ЧУ-полигон можно определить как ЧУ-полигон, удовлетворяющий условиям $(P^{<})$ и $(E^{<})$, которые являются аналогами условий (P) и (E) для полигонов. V. Gould и S. Bulman-Fleming в работах [3, 22, 33, 34] дали описание моноидов с аксиоматизируемыми классами сильно плоских, слабо плоских, плоских полигонов и полигонов, удовлетворяющих условию (P) и условию (E). Подобные результаты для ЧУ-полигонов были получены нами (теоремы 1.33, 1.26, 1.27, 1.29, 1.31). V. Gould и L. Shaheen в [35] изучались аксиоматизируемые классы ЧУ-полигонов, удовлетворяющих некоторым более слабым, чем $(P^{<})$ и $(E^{<})$ условиям. А.А. Степановой в [15] рассматривались вопросы полноты и модельной полноты класса сильно плоских полигонов. В данной работе нами показано (теорема 1.36), что для коммутативных ЧУ-моноидов полнота (модельная полнота, категоричность) класса сильно плоских ЧУ-полигонов эквивалентна тому, что ЧУ-моноид является частично упорядоченной абелевой группой. Также нами исследована полнота (модельная полнота, категоричность) классов ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(E^{<})$ и условию $(P^{<})$ (теоремы 1.34, 1.35).

Обобщением понятий плоского, слабо плоского и сильно плоского ЧУ-полигонов является понятие проективного ЧУ-полигона, которое впервые появилось в работе S.M. Fakhruddin [28]. Позднее в своей совместной работе X. Shi, Z. Liu, F. Wang, S. Bulman-Fleming [48] дали алгебраическую характеризацию проективных ЧУ-полигонов. Описание моноидов с аксиоматизируемыми (полными, модельно полными и категоричными) классами проективных ЧУ-полигонов получено А.А. Степановой в [15]. В данной работе сформулированы соответствующие результаты для ЧУ-полигонов (теоремы 2.13, 2.17).

Известно, что любой проективный ЧУ-полигон является свободным над множеством. Свободные над множествами ЧУ-полигоны впервые были рассмотрены в работе X. Shi и др. [48]. Здесь же были исследованы их свойства. S.M. Fakhruddin ввел понятие свободного над ЧУ-множеством ЧУ-полигона [28]. Описание моноидов с аксиоматизируемым классом свободных полигонов было получено А.А. Степановой для некоторых специальных моноидов [15] и V. Gould [3] в общем случае. Нами получено описание ЧУ-моноидов с аксиоматизируемыми классами свободных над множествами и над ЧУ-множествами ЧУ-полигонов (теоремы 2.13, 2.14, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19).

В 2005 году в работе X. Shi и др. [48] было введено понятие регулярного ЧУ-полигона и изучены некоторые его свойства. А.А. Степановой в [16] получена характеризация моноидов с аксиоматизируемым классом регулярных полигонов и исследованы вопросы модельной полноты регулярных полигонов. Для некоторых частных случаев Е.В.Овчинниковой были исследованы полные классы регулярных полигонов

[12]. Вопрос о полном описании моноидов с полным классом регулярных полигонов остается открытым. В данной работе описаны ЧУ-моноиды с аксиоматизируемым классом регулярных ЧУ-полигонов (теорема 3.6) и доказано, что не существует ЧУ-моноида, над которым аксиоматизируемый класс регулярных ЧУ-полигонов был бы полон или модельно полон (теоремы 3.7, 3.8)

Результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теоретико–модельной алгебре, в теории полигонов, при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий.

Результаты диссертации излагались автором на семинарах Института математики СО РАН (г. Новосибирск), Дальневосточного государственного университета, а также на следующих международных конференциях и школах–семинарах: Всероссийская конференция "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2007), Дальневосточная математическая школа - семинар им. ак. Е.В. Золотова (Владивосток, 2007), Дальневосточная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по математическому моделированию (Владивосток, 2007), XV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 2008), Российская школа-семинар "Синтаксис и семантика логических систем" (Владивосток, 2008), Дальневосточная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по теоретической и прикладной математике (Владивосток, 2009).

Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [58, 59, 60].

Перейдем к более подробному изложению содержания диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и библиографии.

Приведем некоторые определения, которые нам понадобятся для формулировки основных результатов работы.

ЧУ-полигон ${}_SA$ называется *слабо плоским (плоским, сильно плоским)*, если функтор $-\otimes {}_SA$ из категории правых ЧУ-полигонов в категорию частично упорядоченных множеств сохраняет вложения правых идеалов S в S (вложения правых ЧУ-полигонов, универсальные квадраты).

ЧУ-полигон ${}_SA$ является *проективным*, если он изоморфен копроизведению ЧУ-полигонов вида ${}_SSe$, где $e = e^2 \in S$.

ЧУ-полигон ${}_SA$ является *свободным над (ЧУ-)множеством* X, если он изоморфен копроизведению $\coprod_{x\in X} {}_SSx$, где ${}_SSx$ – копии ЧУ-полигона ${}_SS$, причем для любых $s, t \in S$ и $x, y \in X$

$$s_x \leqslant t_y \Leftrightarrow (s \leqslant t \text{ и } x \leqslant y)\ s \leqslant t \text{ и } x = y,$$

где s_x, t_y – копии элементов $s, t \in S$ в Sx и Sy соответственно.

ЧУ-полигон ${}_SA$ является *регулярным*, если все его циклические подполигоны изоморфны ЧУ-полигонам вида ${}_SSe$, где $e = e^2 \in S$.

Для произвольного ЧУ-моноида S введем следующие обозначения:

$\mathcal{F}^<$ – класс всех плоских ЧУ-полигонов,

$\mathcal{WF}^<$ – класс всех слабо плоских ЧУ-полигонов,

$\mathcal{SF}(\mathcal{SF}^<)$ – класс всех сильно плоских полигонов (ЧУ-полигонов),

$\mathcal{P}(\mathcal{P}^<)$ – класс всех проективных полигонов (ЧУ-полигонов),

$\mathcal{F}r(\mathcal{F}r^<)$ – класс всех свободных полигонов (свободных над множеством ЧУ-полигонов),

$\mathcal{F}r^{\ll}$ – класс всех свободных над ЧУ-множеством ЧУ-полигонов,

$\mathcal{R}^<$ – класс всех регулярных ЧУ-полигонов.

Заметим, что имеют место следующие включения:

$$\mathcal{F}r^< \subseteq \mathcal{P}^< \subseteq \mathcal{SF}^< \subseteq \mathcal{F}^< \subseteq \mathcal{WF}^<,$$

$$\mathcal{F}r^{<} \subseteq \mathcal{F}r^{\ll}.$$

Перейдем к более детальному изложению результатов данной работы.

В первом параграфе первой главы приводятся необходимые для дальнейшего сведения из теории моделей и теории ЧУ-полигонов. Также в первом параграфе изучаются совершенные ЧУ-моноиды.

Напомним определение совершенного слева ЧУ-моноида. ЧУ-полигон ${}_SB$ называется *оболочкой* ЧУ-полигона ${}_SA$, если существует эпиморфизм $f : {}_SB \to {}_SA$ такой, что для всякого ЧУ-подполигона ${}_SC$ ЧУ-полигона ${}_SB$ ограничение f на ${}_SC$ не является эпиморфизмом. Оболочка ${}_SB$ ЧУ-полигона ${}_SA$ называется *проективной оболочкой* ${}_SA$, если ${}_SB$ – проективный ЧУ-подполигон. ЧУ-моноид S называется *совершенным слева,* если всякий ЧУ-полигон имеет проективную оболочку.

Совершенные ЧУ-моноиды играют заметную роль в теории ЧУ-полигонов. V. Gould и L. Shaheen найдены несколько условий, эквивалентных совершенности ЧУ-моноида. В частности, доказано, что S – совершенный слева ЧУ-моноид тогда и только тогда, когда S – совершенный слева моноид.

Во втором параграфе даются описания моноидов с аксиоматизируемыми классами слабо плоских и плоских ЧУ-полигонов. Доказательства этих результатов близки к доказательствам соответствующих результатов для полигонов.

Теорема 1.26. *Следующие условия для ЧУ-моноида S эквивалентны:*

(1) класс $\mathcal{WF}^{<}$ аксиоматизируем;

(2) класс $\mathcal{WF}^{<}$ замкнут относительно ультрапроизведений;

(3) для всякого двойного остова $\mathcal{S}$ над S и $a, a' \in S$ существует конечное число двойных остовов $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_r$ над S таких, что для всякого

слабо плоского ЧУ-полигона ${}_SB$, *если пары* $(a,b),(a',b') \in S \times B$ *связаны двойной ЧУ-схемой* $\mathcal{T}$ *над* S_S *и* ${}_SB$ *с двойным остовом* $\mathcal{S}$, *то пары* (a,b) *и* (a',b') *связаны двойной ЧУ-схемой* $\mathcal{T}'$ *над* $(aS \cup a'S)_S$ *и* ${}_SB$ *так, что* $\mathcal{S}(\mathcal{T}') = \mathcal{S}_k$ *для некоторого* $k \in \{1,...,r\}$.

Теорема 1.27. *Следующие условия для ЧУ-моноида S эквивалентны:*

(1) класс $\mathcal{F}^<$ *аксиоматизируем;*

(2) класс $\mathcal{F}^<$ *замкнут относительно ультрапроизведений;*

(3) для всякого двойного остова $\mathcal{S}$ *над S существует конечное число двойных остовов* $\mathcal{S}_1,...,\mathcal{S}_{r'}$ *над S таких, что для всякого правого ЧУ-полигона* A_S *и любого плоского левого ЧУ-полигона* ${}_SB$, *если пары* $(a,b),(a',b') \in A \times B$ *связаны двойной ЧУ-схемой* $\mathcal{T}$ *над* A_S *и* ${}_SB$ *с двойным остовом* $\mathcal{S}$, *то пары* (a,b) *и* (a',b') *связаны двойной ЧУ-схемой* $\mathcal{T}'$ *над* $(aS \cup a'S)_S$ *и* ${}_SB$ *так, что* $\mathcal{S}(\mathcal{T}') = \mathcal{S}_k$ *для некоторого* $k \in \{1,...,r'\}$.

В этом же параграфе рассматривается класс сильно плоских ЧУ-полигонов. Как было отмечено выше, ЧУ-полигон является сильно плоским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям $(P^<)$ и $(E^<)$. Условия $(P^<)$ и $(E^<)$ представляют самостоятельный интерес при изучении ЧУ-полигонов. Они определяются по аналогии с условиями (P) и (E) для полигонов:

$(P^<)$ если $x,y \in A$ и $s,t \in S$ такие, что $sx \leqslant ty$, то существует элемент $z \in A$ и элементы $s',t' \in S$ такие, что $x = s'z, y = t'z$ и $ss' \leqslant tt'$;

$(E^<)$ если $x \in A$ и $s,t \in S$ такие, что $sx \leqslant tx$, то существуют $z \in A$ и $s' \in S$ такие, что $x = s'z$ и $ss' \leqslant ts'$.

Для произвольных $s,t \in S$ определим следующие множества

$$r^<(s,t) = \{u \in S \mid su \leqslant tu\},$$

$$R^{<}(s,t) = \{(u,v) \in S \times S \mid su \leqslant tv\}.$$

Теорема 1.29. *Следующие условия для ЧУ-моноида S эквивалентны:*

(1) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию ($E^{<}$), аксиоматизируем;

(2) любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ удовлетворяет условию ($E^{<}$);

(3) для любых $s,t \in S$ множество $r^{<}(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S.

Теорема 1.31. *Следующие условия для ЧУ-моноида S эквивалентны:*

(1) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию ($P^{<}$), аксиоматизируем;

(2) любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ удовлетворяет условию ($P^{<}$);

(3) для любых $s,t \in S$ множество $R^{<}(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как подполигон правого полигона $(S \times S)_S$.

Следующая теорема является комбинацией теорем 1.29, 1.31 и дает описание ЧУ-моноидов с аксиоматизируемым классом сильно плоских ЧУ-полигонов. Этот результат является аналогом соответствующего результата для класса сильно плоских полигонов (см. [22]).

Теорема 1.33. *Следующие условия для ЧУ-моноида S эквивалентны:*

(1) класс $\mathcal{SF}^{<}$ аксиоматизируем;

(2) любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ является сильно плоским ЧУ-полигоном;

(3) для любых $s,t \in S$ множество $r^{<}(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S и множество $R^{<}(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как подполигон правого полигона $(S \times S)_S$.

В третьем параграфе первой главы исследуются полные, модельно полные и категоричные классы ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условиям $(E^<)$ и $(P^<)$, а также полные, модельно полные и категоричные классы сильно плоских ЧУ-полигонов.

Теорема 1.34. *Не существует ЧУ-моноида S такого, что аксиоматизируемый класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(E^<)$, полон (модельно полон, категоричен).*

Теорема 1.35. *Пусть S – коммутативный ЧУ-моноид и класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, полон;

(2) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, модельно полон;

(3) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, категоричен;

(4) всякий ЧУ-полигон, удовлетворяющий условию $(P^<)$, является свободным над множеством ЧУ-полигоном;

(5) S – частично упорядоченная абелева группа без одноэлементных подгрупп T таких, что ЧУ-полигон ${}_SS/T$ удовлетворяет условию $(P^<)$.

Теорема 1.36. *Пусть S – коммутативный ЧУ-моноид и класс $\mathcal{SF}^<$ аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) класс $\mathcal{SF}^<$ полон;

(2) класс $\mathcal{SF}^<$ модельно полон;

(3) класс $\mathcal{SF}^<$ категоричен;

(4) $\mathcal{SF}^< = \mathcal{F}r^<$;

(5) S – частично упорядоченная абелева группа.

Заметим, что вопрос описания некоммутативных ЧУ-моноидов с полным (модельно полным, категоричным) классом сильно плоских ЧУ-полигонов, а также ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, остается открытым.

Во второй главе рассматриваются проективные и свободные ЧУ-полигоны. Необходимые определения и предварительные результаты приводятся в первом параграфе. Во втором параграфе рассматриваются аксиоматизируемые классы проективные и свободных ЧУ-полигонов.

Теорема 2.13. *Для ЧУ-моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) класс $\mathcal{P}^<$ аксиоматизируем;

(2) каждая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ проективна;

(3) класс $\mathcal{SF}^<$ аксиоматизируем и S – совершенный слева ЧУ-моноид.

Для формулировки критерия аксиоматизируемости класса свободных над множеством ЧУ-полигонов нам понадобится новое понятие. Пусть $e \in E$ и $s, x \in S$. Будем говорить, что $s = xy$ является *e-хорошей факторизацией по x*, если $y \notin wS$ для любого w такого, что $e = xw$ и $Sw = Se$.

Теорема 2.14. *Класс $\mathcal{F}r^<$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{P}^<$ аксиоматизируем и S удовлетворяет условию (*): для любого $e \in E \setminus \{1\}$ существует конечное множество $T \subseteq S$ такое, что любой $s \in S$ имеет e-хорошую факторизацию по x для некоторого $x \in T$.*

Пусть S – ЧУ-моноид и $s, t \in S$, $r \in \mathcal{H}_1$. Через $\mathcal{H}_1$ обозначен класс отношения Грина (см. [7]) $\mathcal{H}$ с представителем 1, т.е. множество всех обратимых элементов ЧУ-моноида S. Для формулировки теоремы 2.16 определим следующие множества:

$\langle x, y\rangle \in L_1(s,t) \Leftrightarrow x -$ максимальный элемент ЧУ-множества S такой, что $sx \leqslant ty$;

$\langle x, y\rangle \in L_2(s,t) \Leftrightarrow x -$ максимальный элемент ЧУ-множества S такой, что $sx < ty$ и либо $sx \notin tS$, либо $ty \notin sS$;

$\langle x, y\rangle \in L_3(r) \Leftrightarrow y \neq ry$ и $x -$ максимальный элемент ЧУ-множества S такой, что $x \leqslant ry$ и $x \leqslant y$.

Теорема 2.16. *Пусть S – ЧУ-моноид. Тогда класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем в том и только том случае, когда*

1) класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем;

2) ЧУ-множество S не содержит бесконечно возрастающих и бесконечно убывающих цепей;

3) для любого $\rho \in S \times S$ множество $r^{<}(\rho)$ пусто или конечно порождено как правый идеал S;

4) для любого $i \in \{1, 2\}$ и $\rho \in S \times S$ множество $L_i(\rho)$ пусто или существует конечное множество $L^i_\rho \subseteq L_i(\rho)$ такое, что $L_i(\rho) \subseteq \bigcup_{\langle x,y\rangle \in L^i_\rho} \langle x, y\rangle S$;

5) для любого $s \in \mathcal{H}_1$ множество $L_3(s)$ пусто или существует конечное множество $L^3_s \subseteq L_3(s)$ такое, что $L_3(s) \subseteq \bigcup_{\langle x,y\rangle \in L^3_s} \langle x, y\rangle S$.

В третьем параграфе рассматриваются вопросы полноты (модельной полноты, категоричности) классов проективных и свободных ЧУ-полигонов.

Теорема 2.17. *Пусть S – ЧУ-моноид такой, что класс $\mathcal{P}^{<}$ аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) класс $\mathcal{P}^{<}$ полон;

(2) класс $\mathcal{P}^{<}$ модельно полон;

(3) класс $\mathcal{P}^{<}$ категоричен;

(4) $\mathcal{P}^{<} = \mathcal{F}r^{<}$;

(5) S – частично упорядоченная группа.

Следующая теорема показывает, что полные, модельно полные и категоричные классы свободных над множеством ЧУ-полигонов совпадают.

Теорема 2.18. *Пусть S – ЧУ-моноид такой, что класс $\mathcal{F}r^{<}$ аксиоматизируем. Тогда класс $\mathcal{F}r^{<}$ полон, модельно полон и категоричен.*

Для свободных над ЧУ-множеством ЧУ-полигонов получен следующий результат.

Теорема 2.19. *Не существует ЧУ-моноида S такого, что аксиоматизируемый класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ полон (модельно полон, категоричен).*

Исследованию теоретико-модельных свойств регулярных ЧУ-полигонов посвящена третья глава данной работы. В первом параграфе третьей главы вводятся необходимые для дальнейшего определения и предварительные результаты. Вопросы аксиоматизируемости класса регулярных ЧУ-полигонов рассматриваются во втором параграфе главы.

Теорема 3.6. *Класс $\mathcal{R}^{<}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда*

1) полугруппа R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами;

2) для любых $n \geqslant 1$, $s_i, t_i \in S$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ множество $\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x \leqslant t_i x\}$ пусто или конечно-порождено как правый идеал полугруппы R.

В третьем параграфе доказывается, что не существует моноида, над которым аксиоматизируемый класс регулярных ЧУ-полигонов был бы полон или модельно полон (теоремы 3.7, 3.8).

1 Теоретико-модельные свойства плоских ЧУ-полигонов

1.1 Необходимые определения и предварительные сведения

1.1.1 Сведения из теории ЧУ-полигонов и теории моделей полигонов

Следующие теоретико-модельные понятия из [4, 5] нам понадобятся в дальнейшем.

Класс K алгебраических систем называется *аксиоматизируемым*, если существует сигнатура Σ и такое множество предложений Z сигнатуры Σ, что для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in K \Longleftrightarrow (\text{сигнатура } \mathcal{A} \text{ равна } \Sigma \text{ и } \mathcal{A} \models \Phi \text{ для всех } \Phi \in Z). \tag{1}$$

Если для класса K выполняется (1), то Σ называется *сигнатурой* K, а множество Z называется *множеством аксиом* для K (обозначаем $K = K_\Sigma(Z)$).

Будем говорить, что класс K алгебраических систем *замкнут относительно элементарной эквивалентности* (*изоморфизмов, подсистем, ультрапроизведений и др.*), если вместе с алгебраическими системами $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, он содержит все элементарно эквивалентные им системы (все изоморфные им системы, все их подсистемы, ультрапроизведение систем $\mathcal{A}_i$ и др.).

Приведем одну полезную характеризацию аксиоматизируемых классов.

Теорема 1.1. *[5] Класс K алгебраических систем сигнатуры Σ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно* *элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.*

Если все системы класса K имеют сигнатуру Σ, то множество предложений сигнатуры Σ, истинных на всех системах из K, называется *элементарной теорией* K или, просто, *теорией* K и обозначается через $Th(K)$. Если $K = \{\mathcal{A}\}$, то вместо $Th(K)$ будем писать $Th(\mathcal{A})$. Алгебраическая система, на которой истины все предложения теории T, называется *моделью теории* T. Непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *полной*, если $\Phi \in T$ или $\neg\Phi \in T$ для любого предложения Φ сигнатуры Σ. Непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *модельно полной*, если

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$$

для любых моделей $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ теории T, имеющих сигнатуру Σ.

Теория T сигнатуры Σ называется *α–категоричной*, если она имеет модель мощности α и все модели теории T мощности α изоморфны между собой. Теория T сигнатуры Σ называется *категоричной*, если T – α–категорична для некоторого α.

Если K – класс алгебраических систем сигнатуры Σ, то через K^∞ обозначим класс бесконечных систем из K. Класс K называется *полным* (*модельно полным*), если теория $Th(K^\infty)$ класса K^∞ полна (модельно полна). Класс K называется *категоричным*, если теория $Th(K)$ категорична.

Следующий результат известен как *тест Лося - Вота*; его доказательство сразу же следует из теоремы Лёвенгейма - Сколема - Тарского.

Предложение 1.2. *[5] Предположим, что теория T непротиворечива, имеет лишь бесконечные модели и $\varkappa$-категорична для некоторой* *мощности* $\varkappa \geq |L|$. *Тогда* T *полна.*

Следующая теорема дает достаточное условие модельной полноты класса.

Теорема 1.3. *(Теорема Линстрёма) [5] Пусть класс* K *бесконечных* L*-структур аксиоматизируем, категоричен в некоторой бесконечной мощности* $\varkappa \geqslant |L|$ *и замкнут относительно объединения возрастающих цепей. Тогда класс* K *является модельно полным.*

Напомним некоторые определения и факты из теории полигонов.

Пусть S – моноид, 1 – единица S. Через E обозначим множество идемпотентов моноида S. Структура $\langle A; L_S\rangle$ языка $L_S = \{s \mid s \in S\}$ называется *левым S-полигоном* (*или, просто, левым полигоном*), если для любых $a, a' \in A$ и $s, t \in S$

(1) $(st)a = s(ta)$;

(2) $1a = a$.

Аналогично определяется понятие правого S-полигона.

Частично упорядоченным моноидом (*ЧУ-моноидом*) называется моноид S, на котором введен частичный порядок $\leqslant$ так, что если $s, t, u \in S$ и $s \leqslant t$, то $us \leqslant ut$ и $su \leqslant tu$. Всюду под S будем понимать моноид или ЧУ-моноид, что будет ясно из контекста или отдельно оговорено. Пусть S – ЧУ-моноид. Структура $\langle A; L_S^{\leqslant}\rangle$ языка $L_S^{\leqslant} = \{s \mid s \in S\} \bigcup \{\leqslant\}$ называется *левым частично упорядоченным S-полигоном* (*или, просто, левым ЧУ-полигоном*), если для любых $a, a' \in A$ и $s, t \in S$

(1) $(st)a = s(ta)$;

(2) $1a = a$;

(3) $a \leqslant a'$ влечет $sa \leqslant sa'$;

(4) $s \leqslant t$ влечет $sa \leqslant ta$.

Везде далее, если не оговорено противное, под (ЧУ-)полигоном будем понимать левый (ЧУ-)полигон. Полигон $\langle A; L_S \rangle$ и ЧУ-полигон $\langle A; L_S^{\leqslant} \rangle$ будем обозначать одинаково через ${}_SA$, оговаривая каждый раз, является ли этот полигон упорядоченным. Заметим, что (ЧУ-)моноид S можно рассматривать как (ЧУ-)полигон ${}_SS$.

Под *гомоморфизмом* ЧУ-полигонов понимается сохраняющий порядок гомоморфизм полигонов. Подструктура (ЧУ-)полигона ${}_SA$ называется *(ЧУ-)подполигоном* (ЧУ-)полигона ${}_SA$. *Конечно порожденным (ЧУ-)подполигоном* (ЧУ-)полигона ${}_SA$ называется (ЧУ-)подполигон вида ${}_S(Sa_1 \cup \ldots \cup Sa_n)$, где $a_1, \ldots, a_n \in A$. *Циклическим (ЧУ-)подполигоном* (ЧУ-)полигона ${}_SA$ называется (ЧУ-)полигон вида ${}_SSa$, где $a \in A$. *Копроизведением* (ЧУ-)полигонов ${}_SA_i$ $(i \in I)$ называется их дизъюнктное объединение, которое будем обозначать через $\coprod_{i \in I} {}_SA_i$. Элементы x, y (ЧУ-)полигона ${}_SA$ называются *связанными* (обозначается $x \sim y$), если существуют $n \in \omega$, $a_0, \ldots, a_n \in A$, $s_1, \ldots, s_n \in S$ такие, что $x = a_0$, $y = a_n$ и $a_i = s_i a_{i-1}$ или $a_{i-1} = s_i a_i$ для любых i, $1 \leq i \leq n$. *Связным* (ЧУ-)подполигоном (ЧУ-)полигона ${}_SA$ называется (ЧУ-)подполигон ${}_SB$ такой, что $x \sim y$ для любых $x, y \in B$. Легко понять, что $\sim$ является отношением конгруэнции на (ЧУ-)полигоне ${}_SA$, классы которого, являющиеся (ЧУ-)подполигонами, называются *связными компонентами* (ЧУ-)полигона ${}_SA$.

Теорема 1.4. *[29, 41] Всякий (ЧУ-)полигон единственным образом разложим в копроизведение связных (ЧУ-)полигонов.*

Категорию множеств, как обычно, обозначим через SET, категорию частично упорядоченных множеств (ЧУ-множеств) – через $POSET$. Ясно, что совокупность ЧУ-полигонов (для фиксированного ЧУ-моноида S) вместе с гомоморфизмами ЧУ-полигонов образует категорию, которую обозначим через $S - POSET$.

Для определения плоских ЧУ-полигонов нам понадобится понятие тензорного произведения ЧУ-полигонов. Пусть A_S – правый ЧУ-полигон и ${}_SB$ – левый ЧУ-полигон. Тензорное произведение A_S и ${}_SB$, обозначаемое через $A_S \otimes {}_SB$, это фактор-множество множества $A \times B$ относительно эквивалентности, порожденной множеством $\{((as, b), (a, sb)) \mid a \in A, b \in B, s \in S\}$. Для $a \in A$ и $b \in B$ класс эквивалентности с представителем (a, b) будем обозначать через $a \otimes b$.

Следующая лемма определяет порядок на тензорном произведении $A_S \otimes {}_SB$.

Лемма 1.5. *[23] Пусть A_S – правый ЧУ-полигон и ${}_SB$ – левый ЧУ-полигон. Тогда для $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$ неравенство $a \otimes b \leqslant a' \otimes b'$ выполняется тогда и только тогда, когда существуют $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_m, t_m \in S$, $a_2, \ldots, a_m \in A$ и $b_1, \ldots, b_m \in B$ такие, что*

$$\begin{array}{rclrcl} & & & b & \leqslant & s_1b_1, \\ as_1 & \leqslant & a_2t_1, & t_1b_1 & \leqslant & s_2b_2, \\ a_2s_2 & \leqslant & a_3t_2, & t_2b_2 & \leqslant & s_3b_3, \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_ms_m & \leqslant & a't_m, & t_mb_m & \leqslant & b'. \end{array}$$

Равенство $a \otimes b = a' \otimes b'$ справедливо тогда и только тогда, когда выполняются оба неравенства $a \otimes b \leqslant a' \otimes b'$ и $a \otimes b \geqslant a' \otimes b'$.

Последовательность неравенств из леммы 1.5 называется *частично упорядоченной схемой* (*или ЧУ-схемой*) $\mathcal{T}$ длины m над A_S и ${}_SB$, связывающей (a,b) с (a',b'). *Остов* $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathcal{T})$ ЧУ-схемы $\mathcal{T}$ – это последовательность

$$\mathcal{S}=(s_1,t_1,\ldots,s_m,t_m)\in S^{2m}.$$

По лемме 1.5, если $a,a'\in A$ и $b,b'\in B$, где A_S – правый ЧУ-полигон и ${}_SB$ – левый ЧУ-полигон, то $a\otimes b=a'\otimes b'$ в $A_S\otimes {}_SB$ тогда и только тогда, когда существует ЧУ-схема $\mathcal{T}$ из (a,b) в (a',b') над A_S и ${}_SB$ с остовом $\mathcal{S}$ и ЧУ-схема $\mathcal{T}'$ из (a',b') в (a,b) над A_S и ${}_SB$ с остовом $\mathcal{S}'$, например. В этом случае мы будем говорить, что существует *двойная ЧУ-схема* $\mathcal{DT}=\mathcal{T}\cup\mathcal{T}'$ из (a,b) в (a',b') с *двойным остовом* $\mathcal{S}(\mathcal{DT})$. Множество всех двойных остовов обозначим через $\mathbb{DOS}$.

ЧУ-полигон ${}_SA$ называется *слабо плоским*, если функтор $-\otimes {}_SA$ из категории $POSET-S$ правых ЧУ-полигонов в категорию $POSET$ сохраняет вложения правых идеалов S в S; *плоским*, если он сохраняет произвольные вложения правых ЧУ-полигонов; *сильно плоским*, если он сохраняет универсальные квадраты (эквивалентно, уравнители и универсальные квадраты). Через $\mathcal{WF}^<,\mathcal{F}^<,\mathcal{SF}^<$ обозначим, соответственно, классы всех слабо плоских, плоских и сильно плоских ЧУ-полигонов. Класс всех сильно плоских полигонов будем обозначать $\mathcal{SF}$.

Теорема 1.6. *[49] Полигон ${}_SA$ является сильно плоским тогда и только тогда, когда ${}_SA$ удовлетворяет условиям (P) и (E):*

(P) если $x,y\in A$ и $s,t\in S$ такие, что $sx=ty$, то существует элемент $z\in A$ и элементы $s',t'\in S$ такие, что $x=s'z, y=t'z$ и $ss'=tt'$;

(E) если $x\in A$ и $s,t\in S$ такие, что $sx=tx$, то существуют $z\in A$ и $s'\in S$ такие, что $x=s'z$ и $ss'=ts'$.

Аналогичный результат справедлив и для ЧУ-полигонов.

Теорема 1.7. *[47] ЧУ-полигон ${}_SA$ является сильно плоским тогда и только тогда, когда ${}_SA$ удовлетворяет условиям $(P^<)$ и $(E^<)$:*

$(P^<)$ если $x, y \in A$ и $s, t \in S$ такие, что $sx \leqslant ty$, то существует элемент $z \in A$ и элементы $s', t' \in S$ такие, что $x = s'z, y = t'z$ и $ss' \leqslant tt'$;

$(E^<)$ если $x \in A$ и $s, t \in S$ такие, что $sx \leqslant tx$, то существуют $z \in A$ и $s' \in S$ такие, что $x = s'z$ и $ss' \leqslant ts'$.

Покажем, что условия $(P^<)$ и $(E^<)$ влекут условия (P) и (E).

Лемма 1.8. *Если ЧУ-полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию $(E^<)$, то ${}_SA$ удовлетворяет условию (E).*

Доказательство. Предположим, что ЧУ-полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию $(E^<)$ и $sa = ta$. В силу условия $(E^<)$ существуют $u_1 \in S$ и $d \in A$ такие, что

$$su_1 \leqslant tu_1 \tag{2}$$

и $a = u_1 d$. Тогда $su_1 d = tu_1 d$ и, снова, учитывая условие $(E^<)$, получаем, что существуют $u_2 \in S$ и $b \in A$ такие, что

$$su_1 u_2 \geq tu_1 u_2 \tag{3}$$

и $d = u_2 b$. Если $u = u_1 u_2$, то с одной стороны из (2) следует $su \leqslant tu$, с другой стороны из (3) следует $su \geq tu$, т.е. $su = tu$, кроме того, $a = u_1 d = u_1 u_2 b = ub$. $\square$

Лемма 1.9. *Если ЧУ-полигон ${}_SA$ удовлетворяет условиям $(E^<)$ и $(P^<)$, то ${}_SA$ удовлетворяет условию (P).*

Доказательство. Предположим, что $sa = tb$. В силу условия $(P^<)$ существуют $u_1, v_1 \in S$ и $d \in A$ такие, что

$$su_1 \leqslant tv_1, \tag{4}$$

$a = u_1 d$ и $b = v_1 d$. Тогда $su_1 d = tv_1 d$ и по лемме 1.8 существуют $w \in S$ и $c \in A$ такие, что $su_1 w = tv_1 w$ и $d = wc$. Если $u = u_1 w$, а $v = v_1 w$, то $su = tv$, $a = uc$ и $b = vc$. $\square$

Объединяя вместе леммы 1.8 и 1.9, получаем, с учетом теоремы 1.7, следующую теорему.

Теорема 1.10. *Если ${}_SA$ является сильно плоским ЧУ-полигоном, то ${}_SA$ удовлетворяет условиям (P) и (E).*

ЧУ-полигон ${}_SP$ называется *проективным,* если для любого сюръективного гомоморфизма $\pi : {}_SA \to {}_SB$ и всякого гомоморфизма $\varphi : {}_SP \to {}_SB$ существует гомоморфизм $\psi : {}_SP \to {}_SA$ такой, что $\varphi = \pi\psi$. Через $\mathcal{P}(\mathcal{P}^<)$ обозначим класс всех проективных полигонов (ЧУ-полигонов).

В [48] показано, что, как и для проективных полигонов, для проективных ЧУ-полигонов имеет место следующая характеризация:

Теорема 1.11. *[48] Копроизведение ЧУ-полигонов ${}_SP_i$ $(i \in I)$ является проективным тогда и только тогда, когда каждый ${}_SP_i$ – проективный ЧУ-полигон. Связный ЧУ-полигон ${}_SP$ проективен тогда и только тогда, когда $P \cong Se$ для некоторого $e \in E$.*

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – категории и $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – функтор. Объект a категории $\mathcal{A}$ называется *свободным* (*слева*) *над объектом* b *категории* $\mathcal{B}$ (по отношению к функтору $\mathcal{F}$) (см. [2]), если существует морфизм $u : b \to \mathcal{F}(a)$ такой, что для любого объекта a' категории $\mathcal{A}$ и любого морфизма $u' : b \to \mathcal{F}(a')$ существует единственный морфизм $v : a \to a'$ такой, что $u' = \mathcal{F}(v) \circ u$.

Пусть $\mathcal{F}$ – забывающий функтор из категории $S\!-\!SET$ левых полигонов в категорию SET множеств. Полигон ${}_SF$ называется *свободным над множеством* X, если ${}_SF$ как объект категории $S - SET$ свободен над

X, как объектом категории SET. Если в данном определении заменить категорию $S-SET$ на категорию $S-POSET$ левых ЧУ-полигонов, то получим определение ЧУ-полигона, *свободного над множеством* X; если кроме этого заменить категорию SET на категорию $POSET$ ЧУ-множеств, то получим определение ЧУ-полигона, *свободного над частично упорядоченным множеством* X. Класс свободных над множеством полигонов обозначим через $\mathcal{F}r$; свободных над множеством ЧУ-полигонов – через $\mathcal{F}r^{<}$; свободных над ЧУ-множеством ЧУ-полигонов – через $\mathcal{F}r^{\ll}$.

Теорема 1.12. *[41, 48] (ЧУ-)полигон* $_SF$ *является свободным над множеством* X *тогда и только тогда, когда* $_SF \cong \coprod_{x\in X} {}_SSx$, *где* $_SSx$ *– копии (ЧУ-)полигона* $_SS$.

Теорема 1.13. *ЧУ-полигон* $_SF$ *свободен над ЧУ-множеством* X *тогда и только тогда, когда* $_SF \cong \coprod_{x\in X} {}_SSx$, *где* $_SSx$ *– копии ЧУ-полигона* $_SS$, *причем для любых* $s,t\in S$ *и* $x,y\in X$

$$s_x \leqslant t_y \Leftrightarrow s\leqslant t \text{ и } x\leqslant y,$$

где s_x, t_y *– копии элементов* $s,t\in S$ *в* Sx *и* Sy *соответственно.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Предположим, что $\mathcal{F}$ – забывающий функтор из категории $S-POSET$ в категорию $POSET$, ЧУ-полигон $_SF$ свободен над ЧУ-множеством X и $u: X\to F$ – отображение ЧУ-множеств из определения свободного объекта категории.

Покажем, что u – вложение и $Su(x)\cap Su(y)=\emptyset$ для $x,y\in X$, $x\neq y$. Для этого рассмотрим ЧУ-полигон $_SB=\coprod_{x\in X} {}_SSu(x)$ с порядком, задаваемым следующим образом:

$$su(x)\leqslant tu(y) \Leftrightarrow s\leqslant t \text{ и } x\leqslant y, \tag{5}$$

и вложение $u' : X \to B$, причем $u'(x) = u(x)$. Тогда существует гомоморфизм $v : {}_SF \to {}_SB$ такой, что $u' = \mathcal{F}(v) \circ u$. Заметим, что $v(u(x)) = u(x)$, где $x \in X$. Поскольку u' – вложение, т.е. $\mathcal{F}(v) \circ u$ – вложение, то u – вложение. Более того, поскольку v – гомоморфизм ЧУ-полигонов, то $v(Su(x)) = Su(x)$ для любого $x \in X$. Следовательно, $Su(x) \cap Su(y) = \emptyset$ для $x, y \in X$, $x \neq y$. Это означает, что $\coprod_{x \in X} Su(x) \subseteq F$. Из определений ЧУ-полигона и гомоморфизма ЧУ-полигонов следует, что ЧУ-полигон ${}_SF$ удовлетворяет условию (5).

Предположим, что $\coprod_{x \in X} Su(x) \subset F$ и пусть ${}_SC = {}_SF$, $u' : X \to C$, $u'(x) = u(x)$. Тогда существует два различных гомоморфизма v_1, v_2 из ${}_SF$ в ${}_SC$ таких, что v_1 – тождественный и $v_2 = v$, где гомоморфизм $v : {}_SF \to \coprod_{x \in X} {}_SSu(x)$ определен выше. Противоречие. Таким образом, ${}_SF = \coprod_{x \in X} {}_SSu(x)$ и существует изоморфизм ЧУ-полигонов ${}_SF$ и $\coprod_{x \in X} {}_SSx$. $\square$

1.1.2 Совершенные слева ЧУ-моноиды

Далее нам понадобится понятие совершенного слева ЧУ-моноида, которое является обобщением известного понятия совершенного слева моноида. ЧУ-полигон ${}_SB$ называется *оболочкой* ЧУ-полигона ${}_SA$, если существует эпиморфизм $f : {}_SB \to {}_SA$ такой, что для всякого ЧУ-подполигона ${}_SC$ ЧУ-полигона ${}_SB$ ограничение f на ${}_SC$ не является эпиморфизмом. Оболочка ${}_SB$ ЧУ-полигона ${}_SA$ называется *проективной оболочкой* ${}_SA$, если ${}_SB$ – проективный ЧУ-подполигон. ЧУ-моноид S называется *совершенным слева,* если всякий ЧУ-полигон имеет проективную оболочку. В [29] доказана следующая теорема.

Теорема 1.14. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) S – совершенный слева моноид;

2) S удовлетворяет условиям (A) и (M_R);

3) $\mathcal{SF} = \mathcal{P}$.

Здесь мы докажем, что аналогичный результат верен и для ЧУ-моноидов. Условия (A) и (M_R) для моноида заменяются условиями $(A^<)$ и $(M_R^<)$ для ЧУ-моноида S:

$(A^<)$ всякий ЧУ-полигон удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи циклических ЧУ-подполигонов;

$(M_R^<)$ ЧУ-моноид S удовлетворяет условию обрыва убывающей цепи главных правых идеалов.

Следующие леммы необходимы для доказательства основного результата данного параграфа. Их доказательства частично повторяют доказательства аналогичных результатов из [29] и [37].

Лемма 1.15. *Пусть ${}_SA$ – связный сильно плоский ЧУ-полигон и S удовлетворяет условию $(A^<)$. Тогда ${}_SA$ – циклический ЧУ-полигон.*

Доказательство. Пусть ${}_SA$ – связный сильно плоский ЧУ-полигон и $a, b \in A$. В силу связности ${}_SA$ существуют $c_0, \ldots, c_n \in A$ и $s_0, \ldots, s_{2n-1} \in S$ такие, что $c_0 = a$, $c_n = b$ и $s_{2i}c_i = s_{2i+1}c_{i+1}$ $(0 \leqslant i < n)$. Индукцией по n, используя сильную плоскость ЧУ-полигона ${}_SA$ и теорему 1.10, нетрудно показать, что существует $c \in A$ такой, что $a, b \in Sc$.

Предположим, что ЧУ-полигон ${}_SA$ не является циклическим. Пусть $a_0 \in A$. Тогда найдется $b_0 \in A$ такой, что ЧУ-полигон ${}_S(Sa_0 \cup Sb_0)$ не циклический. Как замечено выше, существует $a_1 \in A$ такой, что $Sa_0 \cup Sb_0 \subseteq Sa_1$, причем $Sa_0 \subset Sa_1$. Найдется $b_1 \in A$ такой, что ЧУ-полигон ${}_S(Sa_1 \cup Sb_1)$ не циклический. Тогда $Sa_1 \bigcup Sb_1 \subseteq Sa_2$ и $Sa_1 \subset Sa_2$ для некоторого $a_2 \in A$. Продолжая процесс построения элементов a_i множества A, получим строго возрастающую цепь циклических ЧУ-подполигонов ЧУ-полигона ${}_SA$. Тогда S не удовлетворяет условию $(A^<)$. $\square$

Следствие 1.16. *Пусть ${}_SA$ – сильно плоский ЧУ-полигон и S удовлетворяет условию $(A^<)$. Тогда ${}_SA$ – копроизведение циклических ЧУ-полигонов, причем элементы из различных компонент связности ЧУ-полигона ${}_SA$ несравнимы.*

Лемма 1.17. *Пусть ЧУ-моноид S удовлетворяет условиям $(A^<)$ и $(M_R^<)$. Тогда любой сильно плоский ЧУ-полигон является проективным.*

Доказательство. Пусть ЧУ-моноид S удовлетворяет условиям $(A^<)$ и $(M_R^<)$, ${}_SA$ – циклический сильно плоский ЧУ-полигон, $A = Sa$, где $a \in A$, и $T = \{s \in S \mid sa = a\}$. Ясно, что T – ЧУ-подмоноид S. Выберем правый идеал rS $(r \in T)$ ЧУ-моноида S, являющийся минимальным среди правых идеалов S, порожденных элементами из T (он существует в силу условия $(M_R^<)$).

Пусть $s \in T$. Покажем, что $rS \subseteq sS$. Так как $ra = sa = a$, то по теореме 1.10 выполняется условие (E), т.е. существуют $u \in S$ и $b \in Sa$ такие, что $ru = su$ и $a = ub$. Поскольку $b \in Sa$, то $b = va$ для некоторого $v \in S$. Тогда $ruv = suv$ и $uva = ub = a$, т.е. $uv \in T$. Следовательно, $ruv = suv \in T \cap rS$ и в силу минимальности rS получаем $rS \subseteq sS$.

Покажем, что отображение $\alpha : Sa \to Sr$, определяемое равенством $\alpha(sa) = sr$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом ЧУ-полигонов. Пусть $s, t \in S$. Предположим, что $sr \leqslant tr$. Тогда $sra \leqslant tra$. Так как $r \in T$, то $ra = a$ и $sa \leqslant ta$. Предположим, что $sa \leqslant ta$. Поскольку Sa – сильно плоский ЧУ-полигон, то существуют $u \in S$ и $b \in Sa$ такие, что $su \leqslant tu$ и $a = ub$. Так как $b \in Sa$, то $b = va$ для некоторого $v \in S$. Тогда $a = uva$ и $uv \in T$. Следовательно, по доказанному выше, $rS \subseteq uvS$ и $r = uvw$ для некоторого $w \in S$. Поскольку $su \leqslant tu$, то $suv \leqslant tuv$ и $sr = suvw \leqslant tuvw = tr$, т.е. $sr \leqslant tr$. Таким образом, α – изоморфизм ЧУ-полигонов.

Заметим, что $r \in E$. Действительно, $r = \alpha(a) = \alpha(ra) = r\alpha(a) = r^2$. Следовательно, по теореме 1.11 ЧУ-полигон ${}_SA$ является проективным. Доказательство леммы завершает применение следствия 1.16 и утверждения 1.4. □

Лемма 1.18. *Пусть ЧУ-моноид* S *удовлетворяет условию* $(A^<)$ *и* $r \in S$. *Тогда существует* $n \in \omega$ *такой, что* $Sr^n = Sr^{n+j}$ *для любого* $j \in \omega$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Имеем

$$Sr \supseteq Sr^2 \supseteq \ldots \supseteq Sr^n \supseteq \ldots .$$

Через $\bar{r}_i$ обозначим элемент ЧУ-полигона ${}_SS^\omega$ такой, что $\bar{r}_i(j) = r^{|j-i|}$ $(i, j \in \omega)$. Пусть D – однородный ультрафильтр на ω. Поскольку

$\bar{r}_i/D = r\bar{r}_{i+1}/D$ для любого $i \in \omega$, то в ЧУ-полигоне ${}_SS^\omega/D$ существует возрастающая цепь ЧУ-подполигонов

$$ {}_SS\bar{r}_0/D \subseteq {}_SS\bar{r}_1/D \subseteq \ldots \subseteq {}_SS\bar{r}_n/D \subseteq \ldots, $$

которая по условию обрывается, т.е. существует $k \in \omega$ такой, что $S\bar{r}_k/D = S\bar{r}_{k+i}/D$ для всех $i \in \omega$. Тогда найдется $n \in \omega$ такой, что $r^n = tr^{n+1}$ для некоторого $t \in S$, т.е. $Sr^n = Sr^{n+1}$. Отсюда следует равенство $Sr^n = Sr^{n+j}$ для всех $j \in \omega$. □

Лемма 1.19. *Пусть ЧУ-моноид S удовлетворяет условиям $(A^<)$ и $(M_R^<)$. Тогда S – совершенный слева ЧУ-моноид.*

Доказательство. Пусть ${}_SA$ – циклический ЧУ-полигон, $A = Sa$, где $a \in A$. Так же как в доказательстве леммы 1.17 строим ЧУ-подмоноид $T = \{s \in S \mid sa = a\}$ ЧУ-моноида S и выбираем $r \in T$ так, что идеал rS является минимальным среди правых идеалов S, порожденных элементами из T. Тогда по лемме 1.18 найдется $n \in \omega$ такой, что для некоторого $t \in S$

$$ r^n = tr^{2n}. \tag{6} $$

Ясно, что $r^i \in T$ для любого $i \in \omega$. В силу минимальности идеала rS имеет место равенство $r^nS = r^{2n}S$, т.е. $r^n = r^{2n}s$ для некоторого $s \in S$. Умножим равенство (6) на s справа и на r^n слева. Получим $r^n = r^ntr^n$. Следовательно, элемент $f = r^nt$ является идемпотентом. Так как $a = r^na = fr^na = fa$, то $f \in T$. Ясно, что $rS = r^nS = fS$. Определим отображение $\alpha : Sf \to Sa$ так, что $\alpha(sf) = sa$ для любого $s \in S$. Если $s, t \in S$ и $sf \leqslant tf$, то умножив это неравенство на a, получим $sa \leqslant ta$, т.е. α – гомоморфизм ЧУ-полигонов. Так как $\alpha(f) = a$, то α – эпиморфизм ЧУ-полигонов.

Покажем, что ${}_SSf$ – проективная оболочка ЧУ-полигона ${}_SA$. Предположим, что $\alpha(Stf) = Sa$, причем $\alpha(tf) = a$. Тогда $tfa = \alpha(tff) = \alpha(tf) = a$, т.е. $tf \in T$, следовательно, $u = ftf \in T$. Из минимальности идеала fS $(rS = fS)$ получаем $uS = fS$, т.е. $f = us$ для некоторого $s \in S$. Поскольку $uf = u$, то $ufs = f$. Так как

$$s_1u^n \leqslant s_2u^n \Rightarrow s_1u^ns^n \leqslant s_2u^ns^n \Rightarrow s_1f \leqslant s_2f$$

и

$$s_1f \leqslant s_2f \Rightarrow s_1ftf \leqslant s_2ftf \Rightarrow s_1u \leqslant s_2u \Rightarrow s_1u^n \leqslant s_2u^n$$

для любых $s_1, s_2 \in S$ и $n \in \omega$, то ${}_SSu^n \cong {}_SSf$. По лемме 1.18 существует $k \in \omega$ такой, что $Su^k = Su^{k+i}$ для любого $i \in \omega$. Так как ЧУ-полигоны ${}_SSu^n$ $(n \in \omega)$ помимо изоморфизма связаны включениями $Su^{n+1} \subseteq Su^n$ $(n \in \omega)$, то $Su^{n+1} = Su^n = Sf$ $(n \in \omega)$, в частности, ${}_SSu = {}_SSf$. Поскольку $Su \subseteq Stf \subseteq Sf$, то ${}_SStf = {}_SSf$. Следовательно, ${}_SSf$ – проективная оболочка ЧУ-полигона ${}_SA$. Таким образом, любой циклический ЧУ-полигон имеет проективную оболочку.

Пусть ${}_SA$ – произвольный ЧУ-полигон. Поскольку S удовлетворяет условию $(A^<)$, то ${}_SA = \bigcup_{i\in I} {}_SSc_i$, где ${}_SSc_i$ – максимальные циклические ЧУ-подполигоны ${}_SA$. Пусть ${}_SSe_i$ – проективные оболочки ЧУ-полигонов ${}_SSc_i$ и $\alpha_i : {}_SSe_i \to {}_SSc_i$ – соответствующие эпиморфизмы, где $e_i \in E$, $i \in I$. Определим эпиморфизм α из проективного ЧУ-полигона $\coprod_{i\in I} {}_SSe_i$ в ${}_SA$ следующим образом: $\alpha(se_i) = \alpha_i(se_i)$. Ясно, что $\coprod_{i\in I} {}_SSe_i$ – проективная оболочка ${}_SA$. □

Лемма 1.20. *Если любой сильно плоский ЧУ-полигон является проективным, или любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ является проективным ЧУ-полигоном, или S – совершенный слева ЧУ-моноид, то S удовлетворяет условию $(M_R^<)$.*

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполнены и $b_{i+1}S \subseteq b_iS$, где $b_i \in S$ и $i \in \omega$. Тогда существуют $a_i \in S$ $(i \in \omega)$ такие, что $b_0 = a_0$ и $b_{i+1} = b_i a_{i+1}$. Откуда $b_i = a_0 \cdot \ldots \cdot a_i$. Пусть D – однородный ультрафильтр на ω, $\bar{c}_i \in S^\omega$, $\bar{c}_i(k) = a_i \cdot \ldots \cdot a_k$ для $k \geq i$ и $\bar{c}_i(k) = 1$ в противном случае. Через ${}_SA$ обозначим ЧУ-полигон $\bigcup_{i\in\omega} {}_SS\bar{c}_i/D$, являющийся ЧУ-подполигоном ЧУ-полигона ${}_SS^\omega/D$. Так как $\bar{c}_i/D = a_i\bar{c}_{i+1}/D$, то ЧУ-полигон ${}_SA$ – объединение возрастающей цепи ЧУ-полигонов ${}_SS\bar{c}_i/D$ $(i \in \omega)$.

Покажем, что ${}_SA$ – сильно плоский ЧУ-полигон. Пусть $s, s', t, t' \in S$. Предположим, что $s's\bar{c}_i/D \leqslant t't\bar{c}_j/D$. Тогда существует $k \in \omega$ такой, что $s's\bar{c}_i(k) \leqslant t't\bar{c}_j(k)$. Можно считать, что $i \leqslant j$. Тогда $s'sa_i \cdot \ldots \cdot a_{j-1}a_j \cdot \ldots \cdot a_k \leqslant t'ta_j \cdot \ldots \cdot a_k$ и $s\bar{c}_i/D = sa_i \cdot \ldots \cdot a_k\bar{c}_{k+1}/D$, $t\bar{c}_j/D = ta_j \cdot \ldots \cdot a_k\bar{c}_{k+1}/D$. Аналогично рассматривается неравенство $s's\bar{c}_i/D \leqslant t's\bar{c}_j/D$. По теореме 1.7 ${}_SA$ – сильно плоский ЧУ-полигон.

Если S – совершенный слева ЧУ-моноид, то существует проективная оболочка ${}_SP$ для ЧУ-полигона ${}_SA$. Поскольку ${}_SA$ – объединение возрастающей цепи циклических ЧУ-подполигонов, то по теореме 1.11 $P \cong Se$ для некоторого $e \in E$. Тогда существует эпиморфизм $\alpha : {}_SSe \to {}_SA$ ЧУ-полигонов. Отсюда следует, что ${}_SA$ – циклический ЧУ-полигон, точнее, ${}_SA = {}_SS\bar{u}/D$, где $\bar{u} = \alpha(e)$.

Если любой сильно плоский ЧУ-полигон является проективным или любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ является проективным ЧУ-полигоном, то в силу того, что ${}_SA$ – сильно плоский ЧУ-полигон, как и в случае совершенного слева ЧУ-моноида, ${}_SA$ является ЧУ-подполигоном циклического ЧУ-полигона ${}_SS\bar{u}/D$ для некоторого $\bar{u}/D \in S^\omega/D$.

Пусть $\bar{u}(i) = u_i$ и $\bar{c}_i/D = d_i\bar{u}/D$, где $d_i \in S$ $(i \in \omega)$. Тогда $d_i\bar{u}/D = a_i \cdot \ldots \cdot a_j d_{j+1}\bar{u}/D$ для любых i, j, $j \geq i$, т.е. $I_1 = \{i \in \omega \mid d_iu_i = a_i \cdot \ldots \cdot$

$a_j d_{j+1} u_i\} \in D$. Из равенства $\bar{c}_0/D = d_0\bar{u}/D$ следует, что $I_2 = \{i \in \omega \mid a_0 \cdot \ldots \cdot a_i = d_0 u_i\} \in D$. Тогда для $i \in I_1 \cap I_2$ имеем $b_i S = a_0 \cdot \ldots \cdot a_i S = d_0 u_i S = a_0 \cdot \ldots \cdot a_j d_{j+1} u_i S \subseteq a_0 \cdot \ldots \cdot a_j S = b_j S$ для любого $j \geq i$. $\square$

Лемма 1.21. *Если любой сильно плоский ЧУ-полигон является проективным или S – совершенный слева ЧУ-моноид, то S удовлетворяет условию $(A^<)$.*

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполнены, ${}_SB$ – ЧУ-полигон и $Sb_i \subseteq Sb_{i+1} \subseteq B$, $i \in \omega$. Тогда существуют $a_i \in S$ $(i \in \omega)$ такие, что $b_i = a_i b_{i+1}$. Определим D, $\bar{c}_i$, ${}_SA$ также, как в доказательстве леммы 1.20. Аналогично тому, как это делалось в лемме 1.20 показывается, что ${}_SA$ – сильно плоский ЧУ-полигон. Если любой сильно плоский ЧУ-полигон является проективным, то по теореме 1.11 ${}_SA$ изоморфен ЧУ-полигону ${}_SSe$ для некоторого $e \in E$, т.е. является циклическим ЧУ-полигоном. Если S совершенен слева, то существует проективная оболочка ЧУ-полигона ${}_SA$, тогда, как и при доказательстве леммы 1.20, показывается, что ${}_SA$ – циклический ЧУ-полигон. Поскольку ${}_SA$ – циклический ЧУ-полигон, являющийся объединением возрастающей цепи ${}_SS\bar{c}_i/D$ $(i \in \omega)$ циклических ЧУ-полигонов, то существует $k \in \omega$ такой, что $S\bar{c}_k/D = S\bar{c}_i/D$ для всех $i \geq k$. Пусть $i \geq k$. Найдется $r_i \in S$ такой, что $\bar{c}_i/D = r_i\bar{c}_k/D$. Следовательно, существует $j \in \omega$ такой, что $j \geqslant i$ и $\bar{c}_i(j) = r_i\bar{c}_k(j)$, т.е. $a_i \cdot \ldots \cdot a_j = r_i a_k \cdot \ldots \cdot a_j$. Тогда $b_i = a_i \cdot \ldots \cdot a_j b_{j+1} = r_i a_k \cdot \ldots \cdot a_j b_{j+1} = r_i b_k \in Sb_k$. $\square$

Следующая теорема дает характеризацию совершенных слева ЧУ-моноидов.

Теорема 1.22. *Для ЧУ-моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) S *– совершенный слева ЧУ-моноид;*

2) S *удовлетворяет условиям* $(A^<)$ *и* $(M_R^<)$*;*

3) $\mathcal{SF}^< = \mathcal{P}^<$*.*

Доказательство. По лемме 1.17 из *2)* следует *3)*. По лемме 1.19 из *2)* следует *1)*. По лемме 1.20 из *3)* и из *1)* следует, что ЧУ-моноид S удовлетворяет условию $(M_R^<)$. По лемме 1.21 из *3)* и из *1)* следует, что ЧУ-моноид S удовлетворяет условию $(A^<)$. □

В дальнейшем нам будет полезны следующие леммы.

Лемма 1.23. *Если* S *– совершенный слева ЧУ-моноид, то* S *– совершенный слева моноид.*

Доказательство. Пусть S – совершенный слева ЧУ-моноид. По теореме 1.14 достаточно показать, что $\mathcal{SF} = \mathcal{P}$. Пусть ${}_SA$ – сильно плоский полигон. Определим на A отношение $\leqslant$ следующим образом:

$$sa \leqslant tb \Longleftrightarrow \exists u \in A,\ \exists s_1, s_2, t_1, t_2 \in S:$$

$$a = s_1u,\ b = t_1u,\ ss_1u = s_2u,\ tt_1u = t_2u,\ s_2 \leqslant t_2, \tag{7}$$

где $a, b \in A$, $s, t \in S$. Покажем, что $\leqslant$ – отношение частичного порядка. Рефлексивность отношения $\leqslant$ очевидна.

Покажем транзитивность отношения $\leqslant$. Пусть $a, b, c \in A$ и $s, t, r \in S$ такие, что $sa \leqslant tb \leqslant rc$. Тогда найдутся $u, v \in A$, $s_1, s_2, t_1, t_2, t', t'', r_1, r_2 \in S$ такие, что выполняется (7) и $b = t'v$, $c = r_1v$, $tt'v = t''v$, $rr_1v = r_2v$, $t'' \leqslant r_2$. Заметим, что $t_2u = tt_1u = tb = tt'v = t''v$. Так как ${}_SA$ – сильно плоский полигон, то по теореме 1.6 полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (P). Следовательно, из равенства $t_2u = t''v$ следует существование $w \in A$ и $s_3, r_3 \in S$: $u = s_3w$, $v = r_3w$ и $t_2s_3 = t''r_3$. Тогда $a = s_1s_3w$, $c = r_1r_3w$,

$ss_1s_3w = ss_1u = s_2u = s_2s_3w$, $rr_1r_3w = rr_1v = r_2v = r_2r_3w$ и $s_2s_3 \leqslant t_2s_3 = t''r_3 \leqslant r_2r_3$. Транзитивность отношения $\leqslant$ показана.

Покажем симметричность отношения $\leqslant$. Пусть $a, b \in A$ и $s, t \in S$: $sa \leqslant tb \leqslant sa$. Тогда найдутся $u, v \in A$, $s_1, s_2, t_1, t_2, t', t'', r_1, r_2 \in S$ такие, что выполняется (7) и $b = t'v$, $a = r_1v$, $tt'v = t''v$, $sr_1v = r_2v$ и $t'' \leqslant r_2$. Из равенства $t_2u = t''v$, получаемого как и выше, по условию (P) найдутся $w \in A$ и $s_3, r_3 \in S$ такие, что $u = s_3w$, $v = r_3w$ и $t_2s_3 = t''r_3$. Заметим, что $s_2s_3w = s_2u = ss_1u = sa = sr_1v = r_2v = r_2r_3w$. Из равенства $s_2s_3w = r_2r_3w$ по условию (E) найдутся $x \in A$, $t \in S$ такие, что $w = tx$ и $s_2s_3t = r_2r_3t$. Так как $s_2s_3t \leqslant t_2s_3t = t''r_3t \leqslant r_2r_3t$, то $s_2s_3t = t_2s_3t$ и $sa = s_2s_3w = s_2s_3tx = t_2s_3tx = t_2s_3w = t_2u = tt_1u = tb$. Симметричность отношения $\leqslant$ показана.

Нетрудно понять, что для любых $s, t, u, v \in S$ и $a, b \in A$, если $u \leqslant v$, $sa \leqslant tb$, то $usa \leqslant vtb$. Таким образом, ${}_SA$ – ЧУ-полигон.

Покажем, что ЧУ-полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию $(E^<)$. Предположим $sa \leqslant ta$ для некоторых $s, t \in S$, $a \in A$. Тогда найдутся $u \in A$, $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$ такие, что $a = s_1u = t_1u$, $ss_1u = s_2u$, $tt_1u = t_2u$ и $s_2 \leqslant t_2$. Поскольку $ss_1u = s_2u$ и полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (E), то найдутся $u_1 \in A$ и $r_1 \in S$ такие, что $u = r_1u_1$ и $ss_1r_1 = s_2r_1$. Поскольку $tt_1r_1u_1 = tt_1u = t_2u = t_2r_1u_1$, т.е. $tt_1r_1u_1 = t_2r_1u_1$, и полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (E), то найдутся $u_2 \in A$ и $r_2 \in S$ такие, что $u_1 = r_2u_2$ и $tt_1r_1r_2 = t_2r_1r_2$. Поскольку $s_1r_1r_2u_2 = s_1r_1u_1 = s_1u = t_1u = t_1r_1u = t_1r_1r_2u_2 = t_1r_1r_2u_2$, т.е. $s_1r_1r_2u_2 = t_1r_1r_2u_2$, и полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (E), то найдутся $u_3 \in A$ и $r_3 \in S$ такие, что $u_2 = r_3u_3$ и $t_1r_1r_2r_3 = s_1r_1r_2r_3$. Тогда $a = s_1r_1r_2r_3u_3$ и $ss_1r_1r_2r_3 = s_2r_1r_2r_3 \leqslant t_2r_1r_2r_3 = tt_1r_1r_2r_3 = ts_1r_1r_2r_3$. Таким образом, ${}_SA$ удовлетворяет условию $(E^<)$.

Покажем, что ${}_SA$ удовлетворяет условию $(P^<)$. Пусть $sa \leqslant tb$. Тогда выполняется (7). В силу условия (E) из равенства $ss_1u = s_2u$ следует существование $u_1 \in A$ и $r_1 \in S$ таких, что $u = r_1u_1$ и $s_2r_1 = ss_1r_1$. Так как $t_2r_1u_1 = tt_1r_1u_1$ и полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (E), то найдутся $u_2 \in A$ и $r_2 \in S$ такие, что $u_1 = r_2u_2$ и $t_2r_1r_2 = tt_1r_1r_2$. Таким образом, $a = s_1r_1r_2u_2$, $b = t_1r_1r_2u_2$ и $ss_1r_1r_2 = s_2r_1r_2 \leqslant t_2r_1r_2 = tt_1r_1r_2$.

По теореме 1.7 ${}_SA$ – сильно плоский ЧУ-полигон. Так как S – совершенный слева ЧУ-моноид, то по теореме 1.22 ЧУ-полигон ${}_SA$ проективен. По теореме 1.11 полигон ${}_SA$ изоморфен копроизведению циклических полигонов, порожденных идемпотентами, т.е. ${}_SA$ – проективный полигон. □

Позднее V. Gould и L. Shaheen в [36] доказано, что
S – совершенный слева ЧУ-моноид $\Longleftrightarrow$ S – совершенный слева моноид. В силу леммы 1.23 получаем, что следующие результаты справедливы и для совершенных слева ЧУ-моноидов.

Лемма 1.24. *[3] Пусть S – совершенный слева моноид. Тогда*

(1) S – моноид с групповой границей;

(2) если $Sb\,(bS)$ – минимальный левый (правый) идеал моноида S, то bS (Sb) минимальный правый (левый) идеал моноида S;

(3) если $Sb_1 \subseteq Sb_0$ и $Sb_1 \cong Sb_0$, то $Sb_0 = Sb_1$;

(4) любой минимальный левый (правый) идеал моноида S порождается идемпотентом.

Пусть S – моноид. Определим на S отношение эквивалентности $\mathcal{H}$ (см. [7]) следующим образом:

$$s\mathcal{H}t \Leftrightarrow Ss = St \text{ и } sS = tS,$$

где $s, t \in S$. Класс отношения $\mathcal{H}$ с представителем 1 обозначим $\mathcal{H}_1$. Заметим, что множество $\mathcal{H}_1$ состоит в точности из обратимых элементов моноида S и является группой. Будем говорить, что моноид S *локален*, если $S \setminus \mathcal{H}_1$ является идеалом.

Следствие 1.25. *[3] Пусть S – совершенный слева моноид. Тогда S локален и для любых $a, b \in S$*

$$Sa = Sb \Longleftrightarrow aS = bS.$$

1.2 Аксиоматизируемость классов плоских ЧУ-полигонов

В. Гоулд в работе [22] дала описание моноидов с аксиоматизируемыми классами слабо плоских и плоских полигонов. В данном параграфе эти результаты обобщаются на случай ЧУ-полигонов. Теоремы 1.26 и 1.27 являются аналогами соответствующих теорем для полигонов (см. [22]).

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{S} = (s_1, t_1, \dots, s_m, t_m)$ – остов длины m. Определим следующие формулы:

$$\mu_{\mathcal{S}}(x, x_2, \dots, x_m, x') \leftrightharpoons (xs_1 \leqslant x_2t_1 \wedge x_2s_2 \leqslant x_3t_2 \wedge \dots \wedge x_ms_m \leqslant x't_m),$$

$$\nu_{\mathcal{S}}(x, x_2, \dots, x_m, x') \leftrightharpoons (x \leqslant s_1x_1 \wedge t_1x_1 \leqslant s_2x_2 \wedge \dots \wedge t_mx_m \leqslant x').$$

Пусть $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = (s_1, t_1, \dots, s_n, t_n, u_1, v_1, \dots, u_m, v_m)$ – двойной остов. Положим

$$\varphi_{\mathcal{S}}(x, x') \leftrightharpoons \exists x_2 \dots \exists x_n \exists y_2 \dots \exists y_m (\mu_{\mathcal{S}_1}(x, x_2, \dots, x_n, x') \wedge \mu_{\mathcal{S}_2}(x', y_2, \dots, y_m, x)),$$

$$\psi_{\mathcal{S}}(x, x') \leftrightharpoons \exists x_1 \dots \exists x_n \exists y_1 \dots \exists y_m (\nu_{\mathcal{S}_1}(x, x_1, \dots, x_n, x') \wedge \nu_{\mathcal{S}_2}(x', y_1, \dots, y_m, x)).$$

Теорема 1.26. *Следующие условия для ЧУ-моноида S эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{WF}^<$ аксиоматизируем;

2) класс $\mathcal{WF}^<$ замкнут относительно ультрапроизведений;

3) для всякого двойного остова $\mathcal{S}$ над S и $a, a' \in S$ существует конечное число двойных остовов $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_r$ над S таких, что для всякого слабо плоского ЧУ-полигона ${}_SB$, если пары $(a, b), (a', b') \in S \times B$ связаны двойной ЧУ-схемой $\mathcal{T}$ над S_S и ${}_SB$ с двойным остовом $\mathcal{S}$, то пары (a, b) и (a', b') связаны двойной ЧУ-схемой $\mathcal{T}'$ над $(aS \cup a'S)_S$ и ${}_SB$ так, что $\mathcal{S}(\mathcal{T}') = \mathcal{S}_k$ для некоторого $k \in \{1, ..., r\}$.

Доказательство. Из теоремы 1.1 (теоремы Лося) следует импликация *1)* $\Rightarrow$ *2)*.

Предположим, что *2)* выполняется, а *3)* не выполняется. Через J обозначим множество всех конечных подмножеств $\mathbb{DOS}$ и предположим, что для некоторого двойного остова $\mathcal{S}_0 = (s_1, t_1, \ldots, s_n, t_n, u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m) \in \mathbb{DOS}$ и $a, a' \in S$ для каждого $f \in J$ существуют слабо плоский ЧУ-полигон ${}_SB_f$ и $b_f, b'_f \in B_f$, для которых пары $(a, b_f), (a', b'_f) \in S \times B_f$ связаны двойной ЧУ-схемой $\mathcal{T}_f$ над S_S и ${}_SB$ с двойным остовом $\mathcal{S}_0$, при этом не существует двойной ЧУ-схемы над $(aS \cup a'S)_S$ и ${}_SB_f$, связывающей (a, b_f) и (a', b'_f) с остовом, принадлежащем множеству f.

Для каждого $\mathcal{S} \in \mathbb{DOS}$ положим $J_{\mathcal{S}} = \{f \in J : \mathcal{S} \in f\}$. Все пересечения конечного числа множеств $J_{\mathcal{S}}$ не пусты (потому что $\mathbb{DOS}$ бесконечно), следовательно, существует ультрафильтр Φ на J такой, что каждое $J_{\mathcal{S}}$ ($\mathcal{S} \in \mathbb{DOS}$) принадлежит Φ. Заметим, что $a \otimes \bar{b} = a' \otimes \bar{b}'$ в $S_S \otimes {}_SB$, где ${}_SB = \prod_{f \in J} {}_SB_f$, $\bar{b}(f) = b_f$ и $\bar{b}'(f) = b'_f$, и это равенство определяется двойной ЧУ-схемой над S_S и ${}_SB$ с двойным остовом $\mathcal{S}_0$. Отсюда следует, что равенство $a \otimes (\bar{b}/\Phi) = a' \otimes (\bar{b}'/\Phi)$ выполняется также и в $S_S \otimes {}_SU$, где ${}_SU = (\prod_{f \in J} {}_SB_f)/\Phi$, и определяется двойной ЧУ-схемой над S_S и ${}_SU$ с двойным остовом $\mathcal{S}_0$.

По предположению ${}_SU$ является слабым плоским ЧУ-полигоном, следовательно, $(a, \bar{b}/\Phi)$ и $(a', \bar{b}'/\Phi)$ связаны двойной ЧУ-схемой $\mathcal{T}'$ над $(aS \cup a'S)_S$ и ${}_SU$:

$$\begin{array}{rclrclrclrcl} & & & \bar b\,/\Phi & \leqslant & s'_1\bar d_1\,/\Phi, & & & & \bar b'\,/\Phi & \leqslant & u'_1\bar g_1\,/\Phi,\\ as'_1 & \leqslant & c_2t'_1, & t'_1\bar d_1\,/\Phi & \leqslant & s'_2\bar d_2\,/\Phi, & a'u'_1 & \leqslant & h_2v'_1, & v'_1\bar g_1\,/\Phi & \leqslant & u'_2\bar g_2\,/\Phi,\\ c_2s'_2 & \leqslant & c_3t'_2, & t'_2\bar d_2\,/\Phi & \leqslant & s'_3\bar d_3\,/\Phi, & h_2u'_2 & \leqslant & h_3v'_2, & v'_2\bar g_2\,/\Phi & \leqslant & u'_3\bar g_3\,/\Phi,\\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\ c_ns'_n & \leqslant & a't'_n, & t'_n\bar d_n\,/\Phi & \leqslant & \bar b'\,/\Phi; & h_mu'_m & \leqslant & av'_m, & v'_m\bar g_m\,/\Phi & \leqslant & \bar b\,/\Phi,\end{array}$$

где $\bar d_i(f) = d_{i,f}$ и $\bar g_j(f) = g_{j,f}$ для любых $f \in J$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $j \in \{1,\ldots,m\}$. Полагаем $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(\mathcal{T}')$. Поскольку Φ замкнут относительно конечных пересечений, то существует $D \in \Phi$ такой, что

$$\begin{array}{rclrclrclrcl} & & & b_f & \leqslant & s'_1d_{1,f}, & & & & b'_f & \leqslant & u'_1g_{1,f},\\ as'_1 & \leqslant & c_2t'_1, & t'_1d_{1,f} & \leqslant & s'_2d_{2,f}, & a'u'_1 & \leqslant & h_2v'_1, & v'_1g_{1,f} & \leqslant & u'_2g_{2,f},\\ c_2s'_2 & \leqslant & c_3t'_2, & t'_2d_{2,f} & \leqslant & s'_3d_{3,f}, & h_2u'_2 & \leqslant & h_3v'_2, & v'_2g_{2,f} & \leqslant & u'_3g_{3,f},\\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\ c_ns'_n & \leqslant & a't'_n, & t'_nd_{n,f} & \leqslant & b'_f; & h_mu'_m & \leqslant & av'_m, & v'_mg_{m,f} & \leqslant & b_f\end{array}$$

для любого $f \in D$. Следовательно, пары (a, b_f) и (a', b'_f) связаны двойной ЧУ-схемой над $(aS \cup a'S)_S$ и ${}_SB_f$ с двойным остовом $\mathcal{S}'$. Выберем $f \in D \cap J_{\mathcal{S}'}$. Тогда $\mathcal{S}' \in f$, что противоречит выбору (a, b_f) и (a', b'_f). Таким образом, *3)* доказано.

Предположим, что *3)* выполняется. Построим множество аксиом для класса $\mathcal{WF}^<$.

Пусть $\mathbb{S}_1$ – множество двойных остовов $\mathcal{S}$, для которых выполняется условие: если существуют $a, a' \in S$ такие, что $S_S \models \varphi_{\mathcal{S}}(a, a')$, то не существует слабо плоского ЧУ-полигона ${}_SB$ такого, что ${}_SB \models \psi_{\mathcal{S}}(b, b')$ для любых $b, b' \in B$. Для $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_1$ обозначим предложение

$$\chi_{\mathcal{S}} \leftrightharpoons \forall x \forall x' (\neg \psi_{\mathcal{S}}(x, x')).$$

Пусть $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_2 = \mathbb{DOS} \setminus \mathbb{S}_1$. Тогда $\mathcal{S}$ является двойным остовом некоторой ЧУ-схемы, соединяющей (a,b) с (a',b') над S_S и некоторым слабо плоским ЧУ-полигоном ${}_SB$. Следовательно, существует конечное число остовов $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_r$, удовлетворяющих условию из п. *3)* теоремы. Можно считать, что для каждого $k \in \{1, ..., r\}$ существуют слабо плоский ЧУ-полигон ${}_SC_k$, элементы $c, c' \in C_k$ такие, что

$$(aS \cup a'S)_S \models \varphi_{\mathcal{S}_k}(a,a'),\ {}_SC_k \models \psi_{\mathcal{S}_k}(c,c'). \tag{8}$$

Через $\phi_{\mathcal{S}}$ обозначим предложение

$$\phi_{\mathcal{S}} \leftrightharpoons \forall y \forall y' (\psi_{\mathcal{S}}(y,y') \to \psi_{\mathcal{S}_1}(y,y') \vee \ldots \vee \psi_{\mathcal{S}_r}(y,y')).$$

Пусть

$$\Sigma_{\mathcal{WF}^<} = \{\chi_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{S} \in \mathbb{S}_1\} \cup \{\phi_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{S} \in \mathbb{S}_2\}.$$

Покажем, что $\Sigma_{\mathcal{WF}^<}$ является множеством аксиом для $\mathcal{WF}^<$.

Предположим, что ${}_SD$ – слабо плоский ЧУ-полигон. Пусть $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_1$. По построению $\mathbb{S}_1$ ясно, что ${}_SD \models \chi_{\mathcal{S}}$.

Пусть $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_2$ и $d, d' \in D$ такие, что ${}_SD \models \psi_{\mathcal{S}}(d,d')$ и (a,d) связана с (a',d') над S_S и ${}_SD$ двойной ЧУ-схемой с двойным остовом $\mathcal{S}$. Так как D слабо плоский, то (a,d) и (a',d') связаны над $(aS \cup a'S)_S$ и ${}_SD$. По условию *3)* можно взять двойную ЧУ-схему с одним из двойных остовов $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_r$, например, $\mathcal{S}_k$. Таким образом, ${}_SD \vDash \phi_{\mathcal{S}_k}(d,d')$, откуда ${}_SD \vDash \phi_{\mathcal{S}}$. Следовательно, ${}_SD$ является моделью предложения $\Sigma_{\mathcal{WF}^<}$.

Покажем, что каждая модель $\Sigma_{\mathcal{WF}^<}$ является слабо плоским ЧУ-полигоном. Пусть ${}_SC \vDash \Sigma_{\mathcal{WF}^<}$, $a, a' \in S, c, c' \in C$ и в $S_S \otimes {}_SC$ имеет место равенство $a \otimes c = a' \otimes c'$. Тогда существует ЧУ-схема, связывающая (a,c) с (a',c') над S_S и ${}_SC$ с двойным остовом $\mathcal{S}$. Следовательно, $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_2$. Поскольку ${}_SC \models \phi_{\mathcal{S}}$ и ${}_SC \models \psi_{\mathcal{S}}(c,c')$, то ${}_SC \models \psi_{\mathcal{S}_k}(c,c')$ для некоторого

$k \in \{1\ldots,r\}$. Отсюда и из (8) следует существование схемы над $(aS\cup a'S)_S$ и ${}_SC$, связывающей (a,c) с (a',c'), т.е. равенство $a\otimes c=a'\otimes c'$ имеет место и в $(aS\cup a'S)_S\otimes {}_SC$. Таким образом, ЧУ-полигон ${}_SC$ является слабо плоским. $\square$

Теорема 1.27. *Следующие условия для ЧУ-моноида S эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{F}^<$ аксиоматизируем;

2) класс $\mathcal{F}^<$ замкнут относительно ультрапроизведений;

3) для всякого двойного остова $\mathcal{S}$ над S существует конечное число двойных остовов $\mathcal{S}_1,...,\mathcal{S}_{r'}$ над S таких, что для всякого правого ЧУ-полигона A_S и любого плоского левого ЧУ-полигона ${}_SB$, если пары $(a,b),(a',b')\in A\times B$ связаны двойной ЧУ-схемой $\mathcal{T}$ над A_S и ${}_SB$ с двойным остовом $\mathcal{S}$, то пары (a,b) и (a',b') связаны двойной ЧУ-схемой $\mathcal{T}'$ над $(aS\cup a'S)_S$ и ${}_SB$ так, что $\mathcal{S}(\mathcal{T}')=\mathcal{S}_k$ для некоторого $k\in\{1,...,r'\}$.

Доказательство. Импликация *1)* $\Rightarrow$ *2)* следует из теоремы 1.1.

Докажем, что из *2)* следует *3)*. Также, как в доказательстве импликации *2)* $\Rightarrow$ *3)* в теореме 1.26, построим множество J, множества $J_{\mathcal{S}}$ для $\mathcal{S}\in\mathbb{DOS}$ и ультрафильтр Φ.

Предположим, что $\mathcal{F}^<$ замкнут относительно ультрапроизведений, но условие *3)* не выполняется. Предположим $\mathcal{S}_0=(s_1,t_1,...,s_m,t_m,v_1,u_1,...,v_n,u_n)\in\mathbb{DOS}$ такой, что для любого $f\in J$ существуют правый ЧУ-полигон $(A_f)_S$, плоский левый ЧУ-полигон ${}_SB_f$ и пары (a_f,b_f), $(a'_f,b'_f)\in A_f\times B_f$ такие, что (a_f,b_f) и (a'_f,b'_f) связаны над $(A_f)_S$ и ${}_SB_f$ двойной ЧУ-схемой $\mathcal{T}_f$ с двойным остовом $\mathcal{S}_0$, но не существует двойной ЧУ-схемы над $(a_fS\cup a'_fS)_S$ и ${}_SB_f$, связывающей (a_f,b_f) и (a'_f,b'_f) с двойным остовом из множества f. Заметим, что

$\bar{a}\otimes\bar{b}=\bar{a}'\otimes\bar{b}'$ в $A_S\otimes{}_SB$, где $A_S=\prod_{f\in J}(A_f)_S$, ${}_SB=\prod_{f\in J}{}_SB_f$ и $\bar{a}(f)=a_f,\bar{b}(f)=b_f$ для любого $f\in J$, и что это равенство определяется двойной ЧУ-схемой над A_S и ${}_SB$ с остовом $\mathcal{S}_0$. Отсюда следует, что равенство $\bar{a}\otimes(\bar{b}\,/\Phi)=\bar{a}'\otimes(\bar{b}'\,/\Phi)$ выполняется в $A_S\otimes{}_SU$, где ${}_SU={}_S(\prod_{f\in J}B_f)/\Phi$ и определяется двойной ЧУ-схемой над A_S и ${}_SU$ с двойным остовом $\mathcal{S}_0$. Поскольку ${}_SU$ плоский, то для двойного остова $\mathcal{S}_0$ существует двойной остов $\mathcal{S}(\mathcal{T}')=\mathcal{S}'=(s_1',t_1',...,s_m',t_m',v_1',u_1',...,v_n',u_n')$, где $\mathcal{T}'$ – ЧУ-схема

$$\begin{array}{rclrclrclrcl}
 & & & \bar{b}\,/\Phi & \leqslant & s_1'\bar{d}_1\,/\Phi, & & & & \bar{b}'\,/\Phi & \leqslant & u_1'\bar{g}_1\,/\Phi,\\
as_1' & \leqslant & c_2t_1', & t_1'\bar{d}_1\,/\Phi & \leqslant & s_2'\bar{d}_2\,/\Phi, & a'u_1' & \leqslant & h_2v_1', & v_1'\bar{g}_1\,/\Phi & \leqslant & u_2'\bar{g}_2\,/\Phi,\\
c_2s_2' & \leqslant & c_3t_2', & t_2'\bar{d}_2\,/\Phi & \leqslant & s_3'\bar{d}_3\,/\Phi, & h_2u_2' & \leqslant & h_3v_2', & v_2'\bar{g}_2\,/\Phi & \leqslant & u_3'\bar{g}_3\,/\Phi,\\
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
c_ns_n' & \leqslant & a't_n', & t_n'\bar{d}_n\,/\Phi & \leqslant & \bar{b}'\,/\Phi; & h_mu_m' & \leqslant & av_m', & v_m'\bar{g}_m\,/\Phi & \leqslant & \bar{b}\,/\Phi,
\end{array}$$

где $\bar{c_j}(f)=c_{j,f}\in a_fS\cup a_f'S$ для $2\le j\le n$, $f\in J$ и $\bar{d}_j(f)=d_{f,j}\in B_f$ $(1\le j\le n$ и $f\in J)$.

Так как ультрафильтр Φ замкнут относительно конечных пересечений, то существует $D\in\Phi$ такой, что

$$\begin{array}{rclrclrclrcl}
 & & & b_f & \leqslant & s_1'd_{1,f}, & & & & b_f' & \leqslant & u_1'g_{1,f},\\
as_1' & \leqslant & c_2t_1', & t_1'd_{1,f} & \leqslant & s_2'd_{2,f}, & a'u_1' & \leqslant & h_2v_1', & v_1'g_{1,f} & \leqslant & u_2'g_{2,f},\\
c_2s_2' & \leqslant & c_3t_2', & t_2'd_{2,f} & \leqslant & s_3'd_{3,f}, & h_2u_2' & \leqslant & h_3v_2', & v_2'g_{2,f} & \leqslant & u_3'g_{3,f},\\
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
c_ns_n' & \leqslant & a't_n', & t_n'd_{n,f} & \leqslant & b_f'; & h_mu_m' & \leqslant & av_m', & v_m'g_{m,f} & \leqslant & b_f
\end{array}$$

для любого $f\in D$. Следовательно, пары (a,b_f) и (a',b_f') связаны двойной ЧУ-схемой над $(aS\cup a'S)_S$ и ${}_SB_f$ с двойным остовом $\mathcal{S}'$. Выберем $f\in D\cap J_{\mathcal{S}'}$. Но поскольку $\mathcal{S}'$ принадлежит f, это невозможно. Таким образом, доказано, что из *2)* следует *3)*.

Покажем, что из *3)* следует *1)*. Предположим, что для каждого двойного остова существует конечное число двойных остовов со свойством, указанным в п. *3)* теоремы. Построим множество аксиом для класса $\mathcal{F}^{<}$.

Пусть $\mathbb{S}_1$ – множество двойных остовов $\mathcal{S}$, для которых выполняется условие: для любого правого ЧУ-полигона A_S, если существуют $a, a' \in A$ такие, что $A_S \models \varphi_{\mathcal{S}}(a, a')$, то не существует слабо плоского ЧУ-полигона $_SB$ такого, что $_SB \models \psi_{\mathcal{S}}(b, b')$ для любых $b, b' \in B$. Пусть $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_2 = \mathbb{DOS} \setminus \mathbb{S}_1$. Тогда для некоторого правого ЧУ-полигона A_S и плоского левого ЧУ-полигона $_SB$ существуют $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$ такие, что $a \otimes b = a' \otimes b'$ в $A_S \otimes {_SB}$.

Пусть $\mathcal{S} = (s_1, t_1, ..., s_m, t_m, v_1, u_1, ..., v_n, u_n)$, F_S^{m+n} – свободный правый ЧУ-полигон

$$xS \amalg x_2S \amalg ... \amalg x_mS \amalg y_2S \amalg ... \amalg y_nS \amalg x'S$$

и $\rho_{\mathcal{S}}$ – конгруэнция на F_S^{m+n}, порожденная множеством

$$\{(xs_1, x_2t_1), (x_2s_2, x_3t_2), ..., (x_{m-1}s_{m-1}, x_mt_{m-1}), (x_ms_m, x't_m),$$

$$(x'u_1, y_2v_1), (y_2u_2, y_3v_2), ..., (y_{n-1}u_{n-1}, y_nv_{n-1}), (y_nu_n, x'v_n)\}.$$

Обозначим $\rho_{\mathcal{S}}$-класс с представителем $w \in F^{m+n}$ через $w/\rho_{\mathcal{S}}$. Заметим, что если (a, b), (a', b') связаны двойной ЧУ-схемой с двойным остовом $\mathcal{S}$, то $(x/\rho_{\mathcal{S}}, b)$, $(x'/\rho_{\mathcal{S}}) \in F^{m+n}/\rho_{\mathcal{S}}$ связаны некоторой двойной ЧУ-схемой с двойным остовом $\mathcal{S}$.

Тогда $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_2$ является двойным остовом по крайней мере одной двойной ЧУ-схемы из $(x/\rho_{\mathcal{S}}, b)$ в $(x'/\rho_{\mathcal{S}})$ над $(F^{m+n}/\rho_{\mathcal{S}})_S$ и $_SB$, где $_SB$ плоский и $b, b' \in B$. Из определения плоского ЧУ-полигона сразу получается, что $(x/\rho_{\mathcal{S}}, b)$ и $(x'/\rho_{\mathcal{S}})$ связаны некоторой двойной ЧУ-схемой над $(x/\rho_{\mathcal{S}}S \cup x'/\rho_{\mathcal{S}}S)_S$ и $_SB$. Пусть $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_{r'}$ – множество остовов для $\mathcal{S}$ из условия п.

3). Тогда для каждого $k \in \{1, ..., r\}$ существуют плоский ЧУ-полигон ${}_SC_k$ и элементы $c, c' \in C_k$ такие, что

$$(x/\rho_{\mathcal{S}}S \cup x'/\rho_{\mathcal{S}}S)_S \models \varphi_{\mathcal{S}_k}(x/\rho_{\mathcal{S}}, x'/\rho_{\mathcal{S}}),\ {}_SC_k \models \psi_{\mathcal{S}_k}(c, c'). \tag{9}$$

Через $\phi_{\mathcal{S}}$ обозначим предложение:

$$\phi_{\mathcal{S}} \leftrightharpoons \forall y \forall y' (\psi_{\mathcal{S}}(y, y') \to \psi_{\mathcal{S}_1}(y, y') \vee \ldots \vee \psi_{\mathcal{S}_{r'}}(y, y')).$$

Пусть

$$\Sigma_{\mathcal{F}^<} = \{\chi_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{S} \in \mathbb{S}_1\} \cup \{\phi_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{S} \in \mathbb{S}_2\}.$$

Докажем, что $\Sigma_{\mathcal{F}^<}$ является множеством аксиом класса $\mathcal{F}^<$.

Пусть ${}_SD$ – произвольный плоский ЧУ-полигон.

Если $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_1$, то ${}_SD \models \chi_{\mathcal{S}}$ по построению $\mathbb{S}_1$.

Пусть $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_2$ и $d, d' \in D$ такие, что ${}_SD \models \psi_{\mathcal{S}}(d, d')$ и пары $(x/\rho_{\mathcal{S}}, b)$, $(x'/\rho_{\mathcal{S}}, b')$ связаны над $(F^{m+n}/\rho_{\mathcal{S}})_S$ и ${}_SD$ двойной ЧУ-схемой с двойным остовом $\mathcal{S}$. Так как ${}_SD$ плоский, то $(x/\rho_{\mathcal{S}}, b)$, $(x'/\rho_{\mathcal{S}}, b')$ связаны над $(x/\rho_{\mathcal{S}}S \cup x'/\rho_{\mathcal{S}}S)_S$ и ${}_SD$. По условию *3)* можно взять двойную ЧУ-схему с одним из двойных остовов $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{r'}$, например, $\mathcal{S}_k$. Таким образом, ${}_SD \vDash \phi_{\mathcal{S}_k}(d, d')$, откуда ${}_SD \vDash \phi_{\mathcal{S}}$. Следовательно, $\mathcal{F}^< \vDash \Sigma_{\mathcal{F}^<}$.

Осталось показать, что ЧУ-полигон ${}_SC$, в котором истинны все предложения из $\Sigma_{\mathcal{F}^<}$, является плоским. Достаточно доказать, что если равенство $x/\rho_{\mathcal{S}} \otimes b = x'/\rho_{\mathcal{S}} \otimes b'$ верно в $(F^{m+n}/\rho_{\mathcal{S}})_S \otimes {}_SC$, то оно верно и в $(x/\rho_{\mathcal{S}}S \cup x'/\rho_{\mathcal{S}}S)_S \otimes {}_SC$.

Пусть $\mathcal{S} \in \mathbb{DOS}$ и $(x/\rho_{\mathcal{S}}, b)$, $(x'/\rho_{\mathcal{S}}, b')$ связаны над $(F^{m+n}/\rho_{\mathcal{S}})_S$ и ${}_SC$ двойной ЧУ-схемой с двойным остовом $\mathcal{S}$. Следовательно, $\mathcal{S}$ принадлежит $\mathbb{S}_2$. Поскольку ${}_SC \models \phi_{\mathcal{S}}$ и ${}_SC \models \psi_{\mathcal{S}}(c, c')$, то ${}_SC \models \psi_{\mathcal{S}_k}(c, c')$ для некоторого $k \in \{1 \ldots, r\}$. Отсюда и из (9) следует существование ЧУ-схемы над $(x/\rho_{\mathcal{S}}S \cup x'/\rho_{\mathcal{S}}S)_S$ и ${}_SC$, связывающей $(x/\rho_{\mathcal{S}}, b)$ с $(x'/\rho_{\mathcal{S}}, b')$, т.е. равенство

$x/\rho_S \otimes b = x'/\rho_S \otimes b'$ имеет место и в $(x/\rho_S S \cup x'/\rho_S S)_S \otimes_S C$. Таким образом, ЧУ-полигон ${}_S C$ является плоским. $\square$

Теперь мы переходим к рассмотрению аксиоматизируемых классов сильно плоских ЧУ-полигонов. Вначале приведем характеризацию ЧУ-моноидов с аксиоматизируемыми классами ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условиям $(P^<)$ и $(E^<)$ (теоремы 1.29 и 1.31), которая представляет самостоятельный интерес.

Для произвольных $s, t \in S$ определим множества:

$$r(s,t) = \{u \in S \mid su = tu\},\ R(s,t) = \{< u, v > \in S \times S \mid su = tv\},$$

$$r^<(s,t) = \{u \in S \mid su \leqslant tu\},\ R^<(s,t) = \{< u, v > \in S \times S \mid su \leqslant tv\}.$$

Лемма 1.28. *Пусть любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_S S$ удовлетворяет условию $(E^<)$ или является свободным ЧУ-полигоном над ЧУ-множеством. Тогда*

1) для любых $s, t \in S$ множество $r^<(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S;

2) для любых $s, t \in S$ множество $r(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены, $s, t \in S$, $r^<(s,t) \neq \emptyset$ $(r(s,t) \neq \emptyset)$. Предположим, что $r^<(s,t)$ $(r(s,t))$ не является конечно порожденным правым идеалом S.

Пусть $\{u_\beta \mid \beta < \gamma\}$ – множество порождающих $r^<(s,t)$ $(r(s,t))$ минимальной мощности γ. Поскольку кардинал γ бесконечен, то он является предельным ординалом. Пусть $\bar{u} \in \prod_{\beta<\gamma} S_\beta$ такой, что $\bar{u}(\beta) = u_\beta$, где каждое ${}_S S_\beta$ – копия ${}_S S$. Можно считать, что $u_\beta \notin \bigcup_{\alpha<\beta} u_\alpha S$ для любого $\beta < \gamma$.

Пусть D – однородный ультрафильтр на γ. Полагаем ${}_SU = (\prod_{\beta<\gamma} {}_SS_\beta)/D$.

Если любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ является свободным ЧУ-полигоном над ЧУ-множеством, то по теореме 1.13 ${}_SU$ изоморфен копроизведению копий ЧУ-полигона ${}_SS$, следовательно, связная компонента ${}_SU$, содержащая элемент $\bar{u}/D$, удовлетворяет условию $(E^<)$. Если любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ удовлетворяет условию $(E^<)$, то и в этом случае связная компонента ${}_SU$, содержащая элемент $\bar{u}/D$, удовлетворяет условию $(E^<)$.

Если $su_\beta \leqslant tu_\beta$ ($su_\beta = tu_\beta$) для любых $\beta < \gamma$, то $s\bar{u} \leqslant t\bar{u}$ ($s\bar{u} = t\bar{u}$) и, следовательно, $s\,\bar{u}\,/D \leqslant t\,\bar{u}\,/D$ ($s\,\bar{u}\,/D = t\,\bar{u}\,/D$). Тогда по определению условия ($E^<$) (для случая равенства, в силу леммы 1.8) существуют $s' \in S$ и $\bar{v}\,/D \in U$ такие, что $ss' \leqslant ts'$ ($ss' = ts'$) и $\bar{u}\,/D = s'\,\bar{v}\,/D$.

Из $ss' \leqslant ts'$ ($ss' = ts'$) следует $s' \in r^<(s,t)$ ($s' \in r(s,t)$), т.е. $s' = u_\beta w$ для некоторых $\beta < \gamma$ и $w \in S$. Пусть $I = \{\alpha < \gamma \mid u_\alpha = s'v_\alpha\}$. Ясно, что $I \in D$. Из однородности ультрафильтра D следует, что существует $\sigma \in I$ такой, что $\sigma > \beta$. Тогда

$$u_\sigma = s'v_\sigma = u_\beta w v_\sigma \in u_\beta S,$$

противоречие. Следовательно, $r^<(s,t)$ ($r(s,t)$) конечно порождено как правый идеал S. $\square$

Теорема 1.29. *Следующие условия для ЧУ-моноида S эквивалентны:*

1) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию ($E^<$), аксиоматизируем;

2) любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ удовлетворяет условию ($E^<$);

3) для любых $s,t\in S$ множество $r^<(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S.

Доказательство. Импликация *1)* $\Rightarrow$ *2)* следует из теоремы 1.1; импликация *2)* $\Rightarrow$ *3)* следует из леммы 1.28.

Предположим, что *3)* выполняется. Определим множество аксиом для класса ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию ($E^<$).

Покажем, что

$$\Sigma_E = \{\Phi_\rho \mid \rho \in S\times S\}$$

является множеством аксиом для класса ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию ($E^<$).

Предположим, что ЧУ-полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию ($E^<$) и $\rho=(s,t)\in S\times S$. Если $r^<(\rho)=\emptyset$ и $sa\leqslant ta$ для некоторого $a\in A$, то поскольку ${}_SA$ удовлетворяет условию ($E^<$), существует $s'\in S$ такой, что $ss'\leqslant ts'$, противоречие. Следовательно, ${}_SA\models\Phi_\rho$. Если $r^<(\rho)\neq\emptyset$ и $sa\leqslant ta$ для некоторого $a\in S$, то опять же $ss'\leqslant ts'$ для некоторого $s'\in S$ и $a=s'b$ для некоторого $b\in A$. Тогда $s'\in r^<(\rho)$, т.е. $s'=w_{\rho i}v$ для некоторых $i\in\{1,\ldots,m(\rho)\}$ и $v\in S$. Тогда $a=w_{\rho i}c$, где $c=vb\in A$. Таким образом, ${}_SA\models\Phi_\rho$. Тем самым мы показали, что в ${}_SA$ выполняются все предложения из Σ_E.

Предположим, что в ${}_SA$ выполняются все предложения из Σ_E и $sa\leqslant ta$ для некоторых $s,t\in S$ и $a\in A$. Положим $\rho=(s,t)$. Так как ${}_SA\models\Phi_\rho$ и $r^<(\rho)\neq\emptyset$, то $a=w_{\rho i}b$ для некоторого $i\in\{1,\ldots,m(\rho)\}$. Из выбора $w_{\rho i}$ следует, что $sw_{\rho i}\leqslant tw_{\rho i}$. Следовательно, ${}_SA$ удовлетворяет условию ($E^<$), что и требовалось доказать. □

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 1.28 с заменой в доказательстве леммы 1.8 на лемму 1.9.

Лемма 1.30. *1) Если любая ультрастепень ЧУ-полигона* ${}_SS$ *удовлетворяет условию* $(P^<)$, *то для любых* $s,t \in S$ *множество* $R^<(s,t)$ *либо пусто, либо конечно порождено как ЧУ-подполигон правого ЧУ-полигона* $(S \times S)_S$.

2) Если любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ *удовлетворяет условиям* $(P^<)$ *и* $(E^<)$, *то для любых* $s,t \in S$ *множество* $R(s,t)$ *либо пусто, либо конечно порождено как подполигон правого полигона* $(S \times S)_S$.

3) Если любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ *является свободным над ЧУ-множеством ЧУ-полигоном, то для любых* $s,t \in S$ *множество* $R(s,t)$ *либо пусто, либо конечно порождено как подполигон правого полигона* $(S \times S)_S$.

Аналогично доказательству теоремы 1.29 получается соответствующая теорема для условия ($P^<$).

Теорема 1.31. *Следующие условия для ЧУ-моноида* S *эквивалентны:*

1) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию ($P^<$ *), аксиоматизируем;*

2) любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ *удовлетворяет условию (* $P^<$ *);*

3) для любых $s,t \in S$ *множество* $R^<(s,t)$ *либо пусто, либо конечно порождено как подполигон правого полигона* $(S \times S)_S$ *.*

Для сильно плоских полигонов имеет место следующий теорема.

Теорема 1.32. *[3] Класс* $\mathcal{SF}$ *аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любых* $s,t \in S$ *либо множество* $R(s,t)$ *пусто или конечно порождено как правый полигон, либо множество* $r(s,t)$ *пусто или конечно порождено как правый идеал* S *.*

Соединяя вместе теоремы 1.29 и 1.31, получаем, с учетом теоремы 1.7, аналогичный результат для класса сильно плоских ЧУ-полигонов.

Теорема 1.33. *Следующие условия для ЧУ-моноида S эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{SF}^<$ аксиоматизируем;

2) любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ является сильно плоским ЧУ-полигоном;

3) для любых $s, t \in S$ множество $r^<(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S, и множество $R^<(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как подполигон правого полигона $(S \times S)_S$.

Приведем *пример* ЧУ-моноида, для которого класс $\mathcal{SF}^<$ аксиоматизируем, и ЧУ-моноида, для которого класс $\mathcal{SF}^<$ не аксиоматизируем. Рассмотрим моноид всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ относительно умножения. Если на $\mathbb{N}$ ввести тривиальный частичный порядок $\leqslant$, т.е. частичный порядок, совпадающий с равенством, то по теореме 1.33 класс $\mathcal{SF}^<$ аксиоматизируем. Если на $\mathbb{N}$ рассмотреть естественный порядок $\leqslant$, то класс $\mathcal{SF}^<$ будет не аксиоматизируем, так как например, множество $R(4,3) = \{(x,y) \in S \times S \mid 4x \leqslant 3y\}$ содержит подмножество $\{(1,2),(1,3),\ldots\}$, поэтому оно не конечно порождено как подполигон правого полигона $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})_{\mathbb{N}}$.

1.3 Полнота, модельная полнота и категоричность классов плоских ЧУ-полигонов

В последнем параграфе данной главы исследуются полные, модельно полные и категоричные классы ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условиям $(E^{<})$ и $(P^{<})$, а также полные, модельно полные и категоричные классы сильно плоских ЧУ-полигонов.

Теорема 1.34. *Не существует ЧУ-моноида S такого, что аксиоматизируемый класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(E^{<})$, полон (модельно полон, категоричен).*

Доказательство. Покажем, что аксиоматизируемый класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(E^{<})$, не является полным. Пусть существуют различные $s_1, s_2 \in S$ такие, что $1 < s_1$ и $1 < s_2$. Умножая первое неравенство на s_2 справа и второе на s_1 слева, получим:

$$s_2 \leqslant s_1 s_2 \text{ и } s_1 \leqslant s_1 s_2.$$

Пусть ${}_SA = \coprod_{i\in\omega} {}_SS_i$, где элементы множеств S_i, S_j несравнимы для $i \neq j$. Рассмотрим предложение

$$\Psi \rightleftharpoons \exists x \forall y_1 y_2 (x \leqslant y_1 \wedge x \leqslant y_2 \to \exists z (y_1 \leqslant z \wedge y_2 \leqslant z)).$$

Ясно, что ${}_SA \models \Psi$.

Через K обозначим множество $\{(i,j) \mid i \in \omega, 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}\}$. Зададим на множестве K отношение $\leqslant$ следующим образом:

$$(i,j) \leqslant (i',j') \Leftrightarrow \exists k \in \omega (i' = i + k \wedge \exists s (1 \leqslant s \leqslant 2^k \wedge j' = 2^k(j-1)+s)).$$

Нетрудно проверить, что $\leqslant$ – отношение частичного порядка.

Пусть ${}_SB = \coprod_{k\in K} {}_SS_k$, причем для любых $k, l \in K$ если $k \leqslant l$, $s_k \leqslant s_l$, где ${}_SS_m$ – копия ЧУ-полигона ${}_SS$, а s_m – копия элемента $s \in S$ в ЧУ-полигоне ${}_SS_m$ $(m \in K)$. Тогда ${}_SB$ удовлетворяет условию $(E^<)$.

Покажем, что ${}_SB \vDash \neg\Psi$. Предположим $s_k \in {}_SB$, где $k = (i, j) \in K$. Так как $k < l$ и $k < m$ для $l = (i+1, 2j-1)$ и $m = (i+1, 2j)$, то $s_k < s_l$ и $s_k < s_m$. Поскольку элементы компонент ${}_SS_l$ и ${}_SS_m$ несравнимы, то ${}_SB \vDash \neg\exists z(s_l \leqslant z \wedge s_m \leqslant z)$. Таким образом, ЧУ-полигоны ${}_SA$ и ${}_SB$ не являются элементарно эквивалентными, т.е. класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(E^<)$, не является полным.

Так как класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(E^<)$, замкнут относительно копроизведений, то из модельной полноты этого класса следует его полнота. Следовательно, этот класс не является модельно полным.

Из категоричности класса структур следует полнота этого класса, поэтому класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(E^<)$, не категоричен. $\square$

Теорема 1.35. *Пусть S – коммутативный ЧУ-моноид и класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, полон;

2) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, модельно полон;

3) класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, категоричен;

4) всякий ЧУ-полигон, удовлетворяющий условию $(P^<)$, является свободным над множеством ЧУ-полигоном;

5) S – частично упорядоченная абелева группа без одноэлементных *подгрупп T таких, что ЧУ-полигон ${}_SS/T$ удовлетворяет условию $(P^<)$.*

Доказательство. Утверждение *2)$\Rightarrow$1)* следует из замкнутости класса ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, относительно операции копроизведения. Утверждение *4)$\Rightarrow$2)* следует из теоремы Линдстрёма. Утверждения *3)$\Rightarrow$1)*, *4)$\Rightarrow$3)* очевидны.

1)$\Rightarrow$5) Покажем, что S – частично упорядоченная абелева группа. Зафиксируем $a \in S$. Достаточно доказать, что $Sa = S$. Пусть D – однородный ультрафильтр на ω. Для $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множество целых чисел) определим $f_k \in S^\omega$ следующим образом:

$$f_k(i) = a^{|k+i|}.$$

Покажем, что ЧУ-полигон ${}_SU = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} {}_SSf_k/D$, являющийся ЧУ-подполигоном ЧУ-полигона ${}_SS^\omega/D$, удовлетворяет условию $(P^<)$. Так как $f_k/D = af_{k-1}/D$, то $Sf_k/D \subseteq Sf_{k-1}/D$. Предположим, что $r\,g_1/D \leqslant s\,g_2/D$, где $r, s \in S$, $g_1/D, g_2/D \in U$. Существует $k \in \mathbb{Z}$ такой, что $g_1/D, g_2/D \in S\,f_k/D$, т.е. $g_1/D = t_1\,f_k/D$, $g_2/D = t_2\,f_k/D$ для некоторых $t_1, t_2 \in S$. Следовательно, существует $i \in \omega$ такой, что $i + k > 0$, $r\,g_1(i) \leqslant s\,g_2(i)$, $g_1(i) = t_1 f_k(i) = t_1 a^{k+i}$, $g_2(i) = t_2 f_k(i) = t_2 a^{k+i}$. Таким образом, $rt_1a^{k+i} \leqslant st_2a^{k+i}$, $g_1/D = t_1\,a^{k+i} f_{-i}/D$, $g_2/D = t_2 a^{k+i}\,f_{-i}/D$. Это означает, что ${}_SU$ удовлетворяет условию $(P^<)$. Так как S - коммутативный ЧУ-моноид, то

$$\coprod_{i\in\omega} {}_SU_i \vDash \forall x \exists y (x = ay),$$

где ${}_SU_i$ – копии ЧУ-полигона ${}_SU$, $i \in \omega$. Поскольку класс ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$, полон и ${}_SS$ удовлетворяет условию $(P^<)$, то

$$\coprod_{i\in\omega} {}_SS_i \vDash \forall x \exists y (x = ay),$$

где ${}_SS_i$ – копии ЧУ-полигона ${}_SS$, $i \in \omega$. Следовательно, $Sa = S$.

Пусть T – подгруппа S и ${}_SS/T$ – ЧУ-полигон, удовлетворяющий условию $(P^<)$. Тогда для любых $u, v \in T$ справедливо $\coprod_{i\in\omega} {}_SS_i/T \models \exists x(ux = vx)$ и в силу полноты класса ЧУ-полигонов, удовлетворяющих условию $(P^<)$ имеем $\coprod_{i\in\omega} {}_SS_i \models \exists x(ux = vx)$. Откуда $u = v$ и $T = \{1\}$.

5)⇒4) Заметим, что для ЧУ-полигона $\coprod_{i\in I} {}_SA_i$, удовлетворяющего условию $(P^<)$, элементы множеств A_i и A_J $(i \neq j)$ несравнимы. Поэтому достаточно показать, что любой связный ЧУ-полигон ${}_SA$, удовлетворяющий условию $(P^<)$, изоморфен ${}_SS$. Пусть $a \in A$. Так как S – группа, то ${}_SA = {}_SSa$. Рассмотрим подгруппу $T = \{u \in S \mid ua = a\}$ группы S. На множестве S/T определим порядок:

$$s/T \leqslant t/T \Longleftrightarrow sa \leqslant ta.$$

Пусть отображение $\varphi : S/T \to A$ задается следующим образом: $\varphi(s/T) = sa$ для любого $s \in S$. Ясно, что φ – изоморфизм ЧУ-полигонов ${}_SS/T$ и ${}_SA$. Тогда ${}_SS/T$ – ЧУ-полигон, удовлетворяющий условию $(P^<)$, и по условию $T = \{1\}$. Таким образом, ${}_SA \cong {}_SS$. □

Формулировка следующей теоремы аналогична формулировке соответствующей теоремы для полигонов (см. [15]).

Теорема 1.36. *Пусть S – коммутативный ЧУ-моноид и класс $\mathcal{SF}^<$ аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{SF}^<$ полон;

2) класс $\mathcal{SF}^<$ модельно полон;

3) класс $\mathcal{SF}^<$ категоричен;

4) $\mathcal{SF}^< = \mathcal{F}r^<$;

5) S – частично упорядоченная абелева группа.

Доказательство. Утверждение *2)* $\Rightarrow$ *1)* следует из замкнутости класса $\mathcal{SF}^{<}$ относительно операции копроизведения. Утверждение *4)* $\Rightarrow$ *2)* следует из теоремы Линдстрёма. Утверждение *4)* $\Rightarrow$ *3)* следует из равенства $\mathcal{SF}^{<} = \mathcal{F}r^{<}$ и категоричности класса $\mathcal{F}r^{<}$. Утверждение *3)* $\Rightarrow$ *1)* следует из теоремы 1.2.

5) $\Rightarrow$ *4)*. Так как всякая группа удовлетворяет условиям $(A^{<})$ и $(M_R^{<})$, то по теореме 1.22 справедливо равенство $\mathcal{SF}^{<} = \mathcal{P}^{<}$. Более того, для группы выполняется равенство $\mathcal{P}^{<} = \mathcal{F}r^{<}$. Таким образом, $\mathcal{SF}^{<} = \mathcal{F}r^{<}$.

1) $\Rightarrow$ *5)*. Рассуждения, приведенные при доказательстве того, что S – абелева группа (импликация *1)* $\Rightarrow$ *5)*) в теореме 1.35, сохраняются и для случая полноты класса $\mathcal{SF}^{<}$. □

Замечание 1.37. *Условие коммутативности ЧУ-моноида S используется в доказательстве предыдущей теоремы только при доказательстве импликации* 1) $\Rightarrow$ 5).

2 Теоретико-модельные свойства проективных и свободных ЧУ-полигонов

2.1 Необходимые определения и предварительные сведения

Сформулируем результаты, дающие необходимые и достаточные условия аксиоматизируемости классов проективных и свободных полигонов. Данные результаты будут использованы в данной главе.

Теорема 2.1. *[3] Класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и моноид S совершенен слева.*

Для формулировки критерия аксиоматизируемости класса свободных полигонов понадобится новое понятие. Пусть $e \in E$ и $s, x \in S$. Будем говорить, что $s = xy$ является *e-хорошей факторизацией по x*, если $y \notin wS$ для любого w такого, что $e = xw$ и $Sw = Se$.

Теорема 2.2. *[3] Класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем и S удовлетворяет условию (*): для любого $e \in E \setminus \{1\}$ существует конечное множество $T \subseteq S$ такое, что любой $a \in S$ имеет e-хорошую факторизацию по w для некоторого $w \in T$.*

Непосредственно из доказательства этой теоремы (см. [3]) легко получается следующее утверждение:

Следствие 2.3. *Пусть S – ЧУ-моноид. Если класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем, то моноид S удовлетворяет условию (*).*

Для доказательства утверждения 2.7 нам потребуются следующие результаты.

Пусть $\varkappa$ – бесконечный кардинал. Тогда $\varkappa$ – предельный ординал и можно рассматривать $\varkappa$ как объединение всех меньших ординалов. Фильтр F называется *$\varkappa$-регулярным,* если существует такое семейство $R = \{S_\alpha \mid \alpha \in \varkappa\}$ различных элементов F, что любое пересечение бесконечного подмножества семейства R пусто.

Предложение 2.4. *[3] Для любой бесконечной мощности $\varkappa$ существует $\varkappa$-регулярный ультрафильтр на множестве I, где $|I| = \varkappa$.*

Теорема 2.5. *[3] Пусть F – $\varkappa$-регулярный фильтр на множестве I, $|I| = \varkappa$ и ${}_SA_i$ ($i \in I$) – полигоны бесконечной мощности λ. Тогда мощность фильтрованного произведения ${}_S(\prod_{i\in I} A_i)/F$ равна $\lambda^\varkappa$.*

Будем говорить, что моноид удовлетворяет *условию конечности правых решений (УКПР),* если

$$\forall s \in S\ \exists n_s \in \omega\ \forall t \in S\ |\{x \in S|\ sx = t\}| \leq n_s.$$

Утверждение 2.6. *[3] Пусть S – моноид такой, что каждая ультрастепень полигона ${}_SS$ является проективным полигоном. Тогда S удовлетворяет (УКПР).*

Аналогичное утверждение справедливо и для ЧУ-моноидов.

Лемма 2.7. *Пусть S – ЧУ-моноид такой, что каждая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ является проективным ЧУ-полигоном. Тогда S удовлетворяет (УКПР).*

Доказательство. Предположим, что существует $t \in S$, для которого условие леммы *не* выполняется. Это означает, что для каждого $n \in \omega$ существует элемент $a_n \in S$ такой, что $|\{x \in S \mid tx = a_n\}| > n$. Пусть Φ –

неглавный ультрафильтр на ω. Для каждого $n \in \omega$ выберем $b_{n,1}, \ldots, b_{n,n} \in S$ такие, что $tb_{n,i} = a_n$, $1 \leq i \leq n$. Положим

$$\bar{c}_n = (1, \ldots, 1, b_{n,n}, b_{n+1,n}, b_{n+2,n}, \ldots),$$

где $b_{n,n}$ стоит на n-м месте. Ясно, что $\bar{c}_i/\Phi \neq \bar{c}_j/\Phi$ для любых $i \neq j$, но $t\bar{c}_i/\Phi = \bar{a}/\Phi$, где $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots)$. Поскольку ${}_SU = {}_SS^\omega/\Phi$ проективен и $\bar{a}/\Phi \in S\bar{c}/\Phi \cong Se$ для некоторого $e \in E$, то существует $d \in S$ такой, что $A = \{x \in S \mid tx = d\}$ бесконечно.

Выберем кардинал $\alpha > |S|$. По утверждению 2.4 и теореме 2.5 существует ультрафильтр Θ на α такой, что $|A^\alpha/\Theta| = |A|^\alpha > |S|$. Пусть ${}_SV = {}_SS^\alpha/\Theta$ и $\bar{d} \in S^\alpha$ такой, что $\bar{d}(i) = d$ для всех $i \in \alpha$. Если $\bar{x} \in A^\alpha$, то ясно, что $t\bar{x}/\Theta = \bar{d}/\Theta$. По условию леммы ${}_SV$ проективен, следовательно, $\bar{d}/\Theta \in S\bar{g}/\Theta \cong Sf$ для некоторого $f \in E$. Тогда существует элемент $u \in S$ такой, что уравнение $tx = u$ имеет более $|S|$ решений в S, что невозможно. Таким образом, S удовлетворяет (УКПР). $\square$

Далее приводятся леммы, которые будут использоваться при доказательстве основных результатов данной главы. Некоторые из этих лемм, с нашей точки зрения, представляют самостоятельный интерес.

Элемент $a \in S$ называется *e-сократимым справа*, если для любых $s, t \in S$ из равенства $sa = ta$ следует $se = te$. Заметим, что если a – e-сократимый справа элемент S, то ${}_SSa \cong {}_SSe$. Отсюда и из теоремы 1.12 получаем следующую лемму.

Лемма 2.8. *Циклический ЧУ-полигон ${}_SA$ свободен над множеством тогда и только тогда, когда ${}_SA = {}_SSa$ для некоторого 1-сократимого справа элемента $a \in A$.*

Лемма 2.9. *Пусть S – ЧУ-моноид. Если для любых $s, t \in S$ множество $r^{<}(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S и множество $R(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как подполигон правого полигона $(S \times S)_S$, то для любых $s, t \in S$ множество $r(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S.*

Доказательство. Пусть $s, t \in S$ и $r(s,t) \neq \emptyset$. Заметим, что $r(s,t) \subseteq r^{<}(s,t)$ и $r(s,t) \subseteq r^{<}(t,s)$. По условию $r^{<}(s,t) = \bigcup_{x \in X} xS$ и $r^{<}(t,s) = \bigcup_{y \in Y} yS$ для некоторых конечных множеств $X \subseteq S$ и $Y \subseteq S$, в частности, $sx \leqslant tx$ и $ty \leqslant sy$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Кроме того, для любых $x, y \in S$ имеем $R(x,y) = \bigcup_{\langle u,v \rangle \in W_{xy}} \langle u,v \rangle S$ для некоторого конечного множества $W_{xy} \in S \times S$, в частности, $xu = yv$ для любых $\langle u,v \rangle \in W_{xy}$. Для $x \in X$ через U_x обозначим множество $\{u \in S \mid \langle u,v \rangle \in W_{xy}$ для некоторых $y \in Y$ и $v \in S\}$.

Докажем равенство $r(s,t) = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{u \in U_x} xuS$. Пусть $w \in r(s,t)$. Так как $r(s,t) \subseteq r^{<}(s,t)$ и $r(s,t) \subseteq r^{<}(t,s)$, то $w = xw' = yw''$ для некоторых $x \in X$, $y \in Y$, $w', w'' \in S$ и $\langle w', w'' \rangle \in R(x,y)$. Следовательно, $\langle w', w'' \rangle = \langle u,v \rangle z$ для некоторых $\langle u,v \rangle \in W_{xy}$ и $z \in S$. Тогда $w = xuz$ и $w \in \bigcup_{x \in X} \bigcup_{u \in U_x} xuS$. Включение $r(s,t) \subseteq \bigcup_{x \in X} \bigcup_{u \in U_x} xuS$ доказано.

Пусть $x \in X$, $u \in U_x$ и $w \in S$. Тогда $xu = yv$ для некоторых $y \in Y$, $v \in S$. Следовательно, $sxu = syv$ и $txu = tyv$. Из неравенств $sx \leqslant tx$ и $ty \leqslant sy$ следует $sxu \leqslant txu = tyv \leqslant syv = sxu$, т.е. $sxu = txu$. Следовательно, $sxuw = txuw$ и $xuw \in r(s,t)$. Включение $\bigcup_{x \in X} \bigcup_{u \in U_x} xuS \subseteq r(s,t)$ доказано. □

Лемма 2.10. *Если S – совершенный слева моноид, $t \in S$ и $S = tS$, то $t \in \mathcal{H}_1$.*

Доказательство. Пусть $t \in S$ и $S = tS$. Тогда найдется $t' \in S$ такой, что $tt' = 1$. Заметим, что отображение $\varphi :_S S \to_S St$, задаваемое правилом $\varphi(s) = st$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом полигонов. Действительно, если $kt = lt$, то $ktt' = ltt'$, т.е. $k = l$ для любых $k, l \in S$. Поскольку $St \subseteq S$, то по лемме 1.24 $St = S$, т.е. $t \in \mathcal{H}_1$. □

Лемма 2.11. *Если в ЧУ-моноиде S нет бесконечных возрастающих цепей, то не существуют $s, t \in \mathcal{H}_1$ таких, что $s < t$.*

Доказательство. Предположим, что $s, t \in \mathcal{H}_1$ и $s < t$. Так как $s \in \mathcal{H}_1$, то существует элемент $s^{-1} \in S$, обратный для s. Умножив справа неравенство $s < t$ на s^{-1}, получим $1 \leq ts^{-1}$. Если бы $1 = ts^{-1}$, то $s = tss^{-1} = t$, что не так. Следовательно, $1 < ts^{-1}$. Введем обозначение: $r = ts^{-1}$. Тогда $1 < r$ и, домножая обе части этого неравенства на r^i $(i \in \omega)$, получим $r^i \leqslant r^{i+1}$. Поскольку $\mathcal{H}_1$ – группа, то $r^i \in \mathcal{H}_1$ для любого $i \in \omega$. Если $r^i = r^{i+1}$ для некоторого $i \in \omega$, то $1 = r^i(r^i)^{-1} = r^{i+1}(r^i)^{-1} = r$, что не так. Таким образом, получаем бесконечно возрастающую цепь:

$$1 < r < r^2 < r^3 < \ldots,$$

что противоречит условию леммы. □

2.2 Аксиоматизируемость классов проективных и свободных ЧУ-полигонов

В данном параграфе исследуются вопросы аксиоматизируемости классов проективных и свободных ЧУ-полигонов.

По теореме 1.11 проективный ЧУ-полигон, как и проективный полигон, является копроизведением ЧУ-полигонов вида ${}_SSe$, где $e \in E$, причем элементы из разных компонент связности не сравнимы. Поэтому рассуждения, проводимые для проективных полигонов, как правило верны и для проективных ЧУ-полигонов. В частности, если любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ проективна, то, в точности повторяя доказательство соответствующего утверждения для полигонов из [33], показывается, что S удовлетворяет условиям $(A^{<})$ и $(M_R^{\leq})$. Более того, это доказательство проходит и при том условии, когда всякая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ свободна над ЧУ-множеством. Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 2.12. *Если любая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ проективна или свободна над ЧУ-множеством, то ЧУ-моноид S совершенен слева.*

Следующий результат дает описание ЧУ-моноидов с аксиоматизируемым классом проективных ЧУ-полигонов.

Теорема 2.13. *Для ЧУ-моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{P}^{<}$ аксиоматизируем;

2) каждая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ проективна;

3) класс $\mathcal{SF}^{<}$ аксиоматизируем и S – совершенный слева ЧУ-моноид.

Доказательство. 3)$\Rightarrow$1). Так как S совершенен слева, то по теореме 1.22 $\mathcal{SF}^{<} = \mathcal{P}^{<}$. Тогда класс $\mathcal{P}^{<}$ аксиоматизируем.

1)$\Rightarrow$2). Ясно, что если класс $\mathcal{P}^<$ аксиоматизируем, то по теореме 1.1 каждая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ проективна.

2)$\Rightarrow$3). Предположим, что каждая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ проективна. Тогда, в силу включения $\mathcal{P}^< \subseteq \mathcal{SF}^<$, аксиоматизируемость класса $\mathcal{SF}^<$ следует из теоремы 1.33. Совершенность слева ЧУ-моноида S следует из леммы 2.12. $\square$

Следующая теорема дает характеризацию ЧУ-моноидов, над которыми класс ЧУ-полигонов, свободных над множеством, аксиоматизируем.

Теорема 2.14. *Класс $\mathcal{F}r^<$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{P}^<$ аксиоматизируем и S удовлетворяет условию (*): для любого $e \in E \setminus \{1\}$ существует конечное множество $T \subseteq S$ такое, что любой $a \in S$ имеет e-хорошую факторизацию по w для некоторого $w \in T$.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{F}r^<$ аксиоматизируем, то всякая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ является свободным над множеством ЧУ-полигоном, а, следовательно, проективным ЧУ-полигоном. По теореме 2.13 класс $\mathcal{P}^<$ аксиоматизируем и S – совершенный слева ЧУ-моноид. По лемме 1.23 моноид S совершенный слева. По следствию 1.25 S локален. Покажем выполнение (*).

Пусть $e \in E$, $e \neq 1$. Для любого $a \in S$ имеет место равенство $a = a \cdot 1$. Если $e = av$ и $Sv = Se$, то из локальности S следует $1 \neq vc$ для любого c.

Предположим, что условие (*) не выполняется. Через J обозначим множество конечных подмножеств S. Предположим, что для любого $f \in J$ существует элемент $w_f \in S$ такой, что w_f не имеет e-хорошую факторизацию по w для любого $w \in f$. Ясно, что S и J бесконечны.

Для каждого $w \in S$ положим $J_w = \{f \in J \mid w \in f\}$. Поскольку $\{w_1, \ldots, w_n\} \in J_{w_1} \cap \ldots \cap J_{w_n}$, то существует ультрафильтр Φ над J такой, что $J_w \in \Phi$ для всех $w \in S$.

Пусть ${}_SU = {}_S(S^J/\Phi)$. По предположению ${}_SU$ – свободный над множеством ЧУ-полигон. Пусть $\bar{x} \in S^J$ такой, что $\bar{x}(f) = w_f$. Поскольку ${}_SU$ свободен, то по теореме 1.12 и следствию 2.8 $\bar{x}/\Phi = w\bar{d}/\Phi$ для некоторого w, где $\bar{d}/\Phi$ является 1-сократим справа элементом. Предположим, что $\bar{d}(f) = d_f$ для любого $f \in J$.

Покажем, что

$$D = \{f \in J \mid wd_f \text{ является } e\text{-хорошей факторизацией по } w\} \in \Phi.$$

Предположим противное. Тогда

$$D' = \{f \in J \mid d_f = vz \text{ для некоторых } v, z \text{ таких, что } e = wv \text{ и } Sv = Se\} \in \Phi.$$

По лемме 2.7 существует конечное число элементов $v_1, \ldots, v_n$ таких, что $e = wv_i$ и $Sv_i = Se$. Для $1 \le i \le n$ положим

$$D_i = \{f \in J : d_f = v_i z \text{ для некоторого } z\}.$$

Тогда $D' = D_1 \cup \ldots \cup D_n$. Следовательно, $D_i \in \Phi$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Так как $Sv_i = Se$ и S локален, то $v_i S = gS$ для некоторого $g \in E$, причем $g \neq 1$. Но $gv_i = v_i$, следовательно, $gd_f = d_f$ для любых $f \in D_i \in \Phi$. Откуда $g\bar{d}/\Phi = \bar{d}/\Phi$. Поскольку $\bar{d}/\Phi$ является 1-сократим справа, то $g = 1$. Противоречие. Таким образом, $D \in \Phi$.

Пусть $T = \{f \in J : w_f = wd_f\}$. Тогда $T \in \Phi$. Выберем $f \in D \cap T \cap J_w$. Имеем $w \in f$. Так как $f \in T$, то $w_f = wd_f$. Более того, поскольку $f \in D$, то w_f является e-хорошей факторизацией по w. Это противоречит выбору w_f. Таким образом, (*) выполняется.

Предположим, что класс $\mathcal{P}^<$ аксиоматизируем и S удовлетворяет (*). Через $\Sigma_{\mathcal{P}^<} = \Sigma_{\mathcal{SF}^<}$ обозначим множество аксиом для $\mathcal{P}^<$. Пусть $e \in E, e \neq 1$. Выберем конечное множество $f = \{u_1, \ldots, u_n\}$, которое существует в силу (*), такое что каждый $a \in S$ имеет e-хорошую факторизацию по u_i для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Поскольку класс $\mathcal{P}^<$ аксиоматизируем, то по лемме 2.7 для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует конечное число элементов $v_{i1}, \ldots, v_{im_i} \in S$, $m_i \geq 0$, таких что $Sv_{i1} = \ldots = Sv_{im_i} = Se$ и $e = u_i v_{ij}, 1 \leq j \leq m_i$. Пусть

$$\varphi_{e,i}(a) \leftrightharpoons \exists b(a = u_i b \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq m_i} b \neq v_{ij} a).$$

Определим ϕ_e следующим образом:

$$\forall a \bigvee_{1 \leq i \leq n} \varphi_{e,i}(a).$$

Положим

$$\Sigma_{\mathcal{F}r^<} = \Sigma_{\mathcal{P}^<} \cup \{\phi_e \mid e \in E \setminus \{1\}\}.$$

Покажем, что $\Sigma_{\mathcal{F}r^<}$ является множеством аксиом для $\mathcal{F}r^<$.

Пусть ${}_SF$ – свободный над множеством X ЧУ-полигон, $e \in E, e \neq 1$ и $a \in F$. Тогда $a = sx$ для некоторого $x \in X$. По выбору элементов $u_1, \ldots, u_n$ имеем $s = u_i t$ для некоторого $t \in S$, причем $t \neq vw$ для любого $w \in S$ и $v \in S$ такого, что $e = u_i v$ и $Sv = Se$. Положим $b = tx$. Ясно, что ${}_SF \vDash \phi_e$. Легко понять, что ${}_SF \vDash \Sigma_{\mathcal{P}^<}$.

Обратно, пусть ${}_SA$ – ЧУ-полигон и ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r^<}$. Тогда ${}_SA$ проективен. Следовательно, ${}_SA$ – копроизведение связных компонент вида ${}_SSa$, где a является e-сократим справа для некоторого $e \in E$; кроме того, $ea = a$. Предположим, что $e \neq 1$. Поскольку ${}_SA \models \phi_e$, то $a = u_i b$ для некоторого b такого, что $b \neq va$ для любого $v \in S$ со свойствами $e = u_i v$, $Sv = Se$. Так как $b = wa$ для некоторого $w \in S$, то $a = u_i wa$, следовательно,

$e = u_i we$. Ясно, что $Se = Swe$ и $b = wa = wea$. Получили противоречие. Таким образом, $e = 1$ и ${}_SA$ – свободный над множеством ЧУ-полигон. Аксиоматизируемость класса $\mathcal{F}r^{<}$ доказана. □

Лемма 2.15. *Пусть S – ЧУ-моноид. Если класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем, то класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем.*

Доказательство. Пусть класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем. По следствию 2.3 моноид S удовлетворяет условию (*). По теореме 1.1 всякая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ является свободным над ЧУ-множеством ЧУ-полигоном. По лемме 1.28 для любых $s, t \in S$ множество $r^{<}(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S и по лемме 1.30 множество $R(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как подполигон правого полигона $(S \times S)_S$. По лемме 2.9 для любых $s, t \in S$ множество $r(s,t)$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал S. По теореме 1.32 класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем. По лемме 2.12 ЧУ-моноид S совершенен слева. Следовательно, по лемме 1.23 моноид S также совершенен слева, что по теореме 2.1 влечет аксиоматизируемость класса $\mathcal{P}$. Таким образом, по теореме 2.2 класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем. □

Для формулировки следующей теоремы нам понадобится ряд обозначений.

Пусть S – ЧУ-моноид и $s, t \in S$, $r \in \mathcal{H}_1$. Определим следующие множества:

$\langle x, y\rangle \in L_1(s,t) \Leftrightarrow x$ – максимальный элемент ЧУ-множества S такой, что $sx \leqslant ty$;

$\langle x, y\rangle \in L_2(s,t) \Leftrightarrow x$ – максимальный элемент ЧУ-множества S такой, что $sx < ty$ и либо $sx \notin tS$, либо $ty \notin sS$;

$\langle x, y\rangle \in L_3(r) \Leftrightarrow\ y \neq ry$ и x – максимальный элемент ЧУ-множества S такой, что $x \leqslant ry$ и $x \leqslant y$.

Теорема 2.16. *Пусть S – ЧУ-моноид. Класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем в том и только том случае, когда*

1) класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем;

2) ЧУ-множество S не содержит бесконечно возрастающих и бесконечно убывающих цепей;

3) для любого $\rho \in S \times S$ множество $r^{<}(\rho)$ пусто или конечно порождено как правый идеал S;

4) для любых $i \in \{1, 2\}$ и $\rho \in S \times S$ множество $L_i(\rho)$ пусто или существует конечное множество $L^i_\rho \subseteq L_i(\rho)$ такое, что $L_i(\rho) \subseteq \bigcup_{\langle x,y\rangle \in L^i_\rho} \langle x, y\rangle S$;

5) для любого $s \in \mathcal{H}_1$ множество $L_3(s)$ пусто или существует конечное множество $L^3_s \subseteq L_3(s)$ такое, что $L_3(s) \subseteq \bigcup_{\langle x,y\rangle \in L^3_s} \langle x, y\rangle S$.

Доказательство. **Необходимость.**

Пусть класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем. Из леммы 2.15 следует *1)*.

Докажем *2)*. Предположим, что в S есть бесконечно возрастающая цепь $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ и D – произвольный неглавный ультрафильтр на ω. По теореме 1.1 ${}_SS^\omega/D \in \mathcal{F}r^{\ll}$. Покажем, что $S \cdot \bar{1}/D$, где $\bar{1}(j) = 1$ $(j \in \omega)$, является связной компонентой ЧУ-полигона ${}_SS^\omega/D$. Пусть $\bar{1}/D = t\bar{c}/D$ для некоторых $t \in S$ и $\bar{c} \in S^\omega$, то поскольку свободный полигон является проективным, по утверждению 2.6 множество $\{x \in S \mid tx = 1\}$ конечно и, следовательно, $\bar{c}/D \in S \cdot \bar{1}/D$.

Рассмотрим элементы $\bar{a}, \bar{a}_i \in S^\omega$, где $\bar{a}(j) = a_j$ и $\bar{a}_i(j) = a_i$ $(i, j \in \omega)$. Ясно, что $\bar{a}_i/D < \bar{a}/D$, причем $\bar{a}_i/D \in S \cdot \bar{1}/D$ и $\bar{a}/D \notin S \cdot \bar{1}/D$. Поскольку класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем, то ${}_SS^\omega/D \in \mathcal{F}r^{\ll}$ и существует изоморфизм связной компоненты ЧУ-полигона ${}_SS^{\omega}/D$, содержащей элемент $\bar{a}/D$, в связную компоненту ${}_SS\cdot\bar{1}/D$. Предположим, что $\bar{b}/D$ – образ элемента $\bar{a}/D$ при этом изоморфизме и $\bar{b}(j)=b\in S$ $(j\in\omega)$. Так как $\bar{a}_i/D<\bar{a}/D$ $(i\in\omega)$, то по теореме 1.13 $\bar{b}/D<\bar{a}/D$ и $\bar{a}_i/D<\bar{b}/D$ для любого $i\in\omega$. Следовательно, существует $j\in\omega$ такой, что $b<a_j$ и $a_i<b$ для любого $i\in\omega$, т.е. $a_i<a_j$ для любого $i\in\omega$. Противоречие. Аналогично доказывается отсутствие в S бесконечно убывающих цепей.

Из теоремы 1.28 следует *3)*.

Докажем *4)*. Предположим, что $i\in\{1,2\}$ и существует $\rho=(s,t)\in S\times S$, для которого условие *4)* не выполняется. Пусть $\{\langle x_\alpha,y_\alpha\rangle\in L_i(\rho)\mid\alpha<\gamma\}$ – множество минимальной мощности γ такое, что $L_i(\rho)\subseteq\bigcup_{\alpha<\gamma}\langle x_\alpha,y_\alpha\rangle S$. Поскольку γ бесконечен, то он является предельным ординалом. Можно считать, что

$$\langle x_\beta,y_\beta\rangle\notin\bigcup_{\alpha<\beta}\langle x_\alpha,y_\alpha\rangle S \qquad (10)$$

для любого $\beta<\gamma$. Пусть D – произвольный неглавный ультрафильтр на γ. Так как класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем, то ${}_SS^{\gamma}/D\in\mathcal{F}r^{\ll}$. Рассмотрим элементы $\bar{x},\bar{y}\in S^{\gamma}$, где $\bar{x}(\alpha)=x_\alpha$, $\bar{y}(\alpha)=y_\alpha$ $(\alpha\in\gamma)$. Заметим, что $s\bar{x}/D\leqslant t\bar{y}/D$, причем, если $i=2$, то $s\bar{x}/D\notin tS^{\gamma}/D$ или $t\bar{y}/D\notin sS^{\gamma}/D$.

Предположим, что элементы $\bar{x}/D$ и $\bar{y}/D$ находятся в разных связных компонентах ЧУ-полигона ${}_SS^{\gamma}/D$. Так как ${}_SS^{\gamma}/D\in\mathcal{F}r^{\ll}$, то существует изоморфизм из связной компоненты ЧУ-полигона ${}_SS^{\gamma}/D$, содержащей элемент $\bar{x}/D$, в связную компоненту ЧУ-полигона ${}_SS^{\gamma}/D$, содержащую элемент $\bar{y}/D$. Пусть $\bar{x}'/D$ – образ элемента $\bar{x}/D$ при этом изоморфизме и $\bar{x}'(\alpha)=x'_\alpha$ для любого $\alpha\in\gamma$, причем, если $i=2$, то $s\bar{x}'/D\notin tS^{\gamma}/D$ или $t\bar{y}/D\notin sS^{\gamma}/D$. По теореме 1.13 $\bar{x}/D<\bar{x}'/D$ и $s\bar{x}'/D\leqslant t\bar{y}/D$. Тогда $s\bar{x}/D<s\bar{x}'/D\leqslant t\bar{y}/D$. Откуда найдется $\alpha\in\gamma$ такое, что $x_\alpha<x'_\alpha$,

$sx_\alpha < sx'_\alpha \leqslant ty_\alpha$ и при $i = 2$ либо $sx'_\alpha \notin tS$, либо $ty_\alpha \notin sS$, что противоречит условию $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_i(\rho)$.

Пусть элементы $\bar{x}/D$ и $\bar{y}/D$ находятся в одной связной компоненте ЧУ-полигона ${}_SS^\gamma/D$. По теореме 1.13 существует изоморфизм из этой связной компоненты в ЧУ-полигон ${}_SS$. Пусть $\bar{h}/D$ – прообраз 1, $\bar{x}/D$ – прообраз $k \in S$ и $\bar{y}/D$ – прообраз $l \in S$ при этом изоморфизме. Из неравенства $s\bar{x}/D \leqslant t\bar{y}/D$ получаем, что $sk \leqslant tl$ и при $i = 2$ либо $sk \notin tS$, либо $tl \notin sS$. Покажем, что $\langle k, l\rangle \in L_i(\rho)$. Пусть $k \leqslant k'$, $sk \leqslant sk' \leqslant tl$ и при $i = 2$ либо $sk' \notin tS$, либо $tl \notin sS$. Домножая эти неравенства справа на $\bar{h}/D$ и вводя обозначение $\bar{x}'/D = k'\bar{h}/D$, получим $\bar{x}/D \leqslant \bar{x}'/D$, $s\bar{x}/D \leqslant s\bar{x}'/D \leqslant t\bar{y}/D$ и при $i = 2$ либо $s\bar{x}'/D \notin tS^\gamma/D$, либо $t\bar{y}/D \notin sS^\gamma/D$. Тогда $I = \{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha \leqslant x'_\alpha,\ sx_\alpha \leqslant sx'_\alpha \leqslant ty_\alpha$ и при $i = 2$ либо $sx'_\alpha \notin tS,$ либо $ty_\alpha \notin sS\} \in D$. Так как $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_i(\rho)$ для любого $\alpha \in \gamma$, то $I \subseteq \{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha = x'_\alpha\}$. Следовательно, $\{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha = x'_\alpha\} \in D$ и $\bar{x}/D = \bar{x}'/D$, откуда $k = k'$ и $\langle k, l\rangle \in L_i(\rho) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\gamma}\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S$, т.е. $\langle k, l\rangle = \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle r$ для некоторых $\alpha \in \gamma$ и $r \in S$. С другой стороны, $\langle \bar{x}/D, \bar{y}/D\rangle = \langle k, l\rangle\bar{h}/D$. Откуда найдется $\beta > \alpha$ такой, что $\langle x_\beta, y_\beta\rangle \in \langle k, l\rangle S \subseteq \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S$, что противоречит (10).

Докажем *5)*. Предположим, что существует $s \in \mathcal{H}_1$, для которого условие *5)* не выполняется. Так же, как и при доказательстве пункта *4)*, для множества $L_3(s)$ строим множество $\{\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_3(s) \mid \alpha \in \gamma\}$ такое, что (10) выполняется для всех $\beta < \gamma$, ультрафильтр D на γ и элементы $\bar{x}/D, \bar{y}/D$ из S^γ/D. Ясно, что $\bar{x}/D \leqslant \bar{y}/D$, $\bar{x}/D \leqslant s\bar{y}/D$ и $\bar{y}/D \neq s\bar{y}/D$.

Предположим, что элементы $\bar{x}/D$ и $\bar{y}/D$ находятся в разных связных компонентах ЧУ-полигона ${}_SS^\gamma/D$. Пусть $\bar{h}/D$ – порождающий элемент связной компоненты ЧУ-полигона ${}_SS^\gamma/D$, содержащей $\bar{x}/D$, $\bar{h}'/D$ – порождающий элемент связной компоненты ЧУ-полигона ${}_SS^\gamma/D$, содержащей $\bar{y}/D$. Существует изоморфизм из ЧУ-полигона ${}_SS\bar{h}/D$ в ЧУ-полигон ${}_S S\bar{h}'/D$. Можно считать, что $\bar{h}'/D$ – образ элемента $\bar{h}/D$ при этом изоморфизме. По теореме 1.13 $\bar{h}/D < \bar{h}'/D$, $t\bar{h}'/D \leqslant r\bar{h}'/D = \bar{y}/D$ и $t\bar{h}'/D \leqslant sr\bar{h}'/D = s\bar{y}/D$. Таким образом, $\bar{x}/D < t\bar{h}'/D \leqslant \bar{y}/D$ и $\bar{x}/D < t\bar{h}'/D \leqslant s\bar{y}/D$. Откуда найдется $\alpha \in \gamma$ такой, что $x_\alpha < th'_\alpha$, $th'_\alpha \leqslant y_\alpha$ и $th'_\alpha \leqslant sy_\alpha$, что противоречит условию $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_3(s)$.

Пусть элементы $\bar{x}/D, \bar{y}/D$ находятся в одной связной компоненте ЧУ-полигона ${}_S S^\gamma/D$. По теореме 1.13 существует изоморфизм из этой связной компоненты в ЧУ-полигон ${}_S S$. Пусть $\bar{h}/D$ – прообраз 1, $\bar{x}/D$ – прообраз k и $\bar{y}/D$ – прообраз l при этом изоморфизме. Из соотношений $\bar{x}/D \leqslant \bar{y}/D$, $\bar{x}/D \leqslant s\bar{y}/D$ и $\bar{y}/D \neq s\bar{y}/D$ получаем, что $k \leqslant l$, $k \leqslant sl$ и $l \neq sl$. Покажем, что $\langle k, l\rangle \in L_3(s)$. Пусть $k \leqslant k'$, $k' \leqslant l$ и $k' \leqslant sl$. Домножая эти неравенства справа на $\bar{h}/D$ и вводя обозначение $\bar{x}'/D = k'\bar{h}/D$, получим $\bar{x}'/D \leqslant \bar{y}/D$ и $\bar{x}'/D \leqslant s\bar{y}/D$. Тогда $I = \{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha \leqslant x'_\alpha,\, x'_\alpha \leqslant y_\alpha \text{ и } x'_\alpha \leqslant sy_\alpha\} \in D$. Так как $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_3(s)$ для любого $\alpha \in \gamma$, то $I \subseteq \{\alpha < \gamma \mid x_\alpha = x'_\alpha\}$. Следовательно, $\{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha = x'_\alpha\} \in D$ и $\bar{x}/D = \bar{x}'/D$, откуда $k = k'$ и $\langle k, l\rangle \in L_3(s) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\gamma}\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S$, т.е. $\langle k, l\rangle = \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle r$ для некоторых $\alpha \in \gamma$ и $r \in S$. С другой стороны, $\langle \bar{x}/D, \bar{y}/D\rangle = \langle k, l\rangle\bar{h}/D$. Откуда найдется $\beta > \alpha$ такой, что $\langle x_\beta, y_\beta\rangle \in \langle k, l\rangle S \subseteq \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S$, что противоречит (10).

Достаточность.

Предположим, что условия *1)-5)* теоремы выполнены. Пусть $\rho = (s,t) \in S \times S$. Если $r^<(\rho) \neq \emptyset$, то выберем и зафиксируем конечное множество $\bar{r}_\rho$ порождающих $r^<(\rho)$. Определим предложение $\Phi_r(\rho)$ языка $L_S^{\leqslant}$ следующим образом: если $r^<(\rho) = \emptyset$, то

$$\Phi_r(\rho) \leftrightharpoons \forall x \neg(sx \leqslant tx),$$

в противном случае, когда $r^<(\rho) \neq \emptyset$, полагаем

$$\Phi_r(\rho) \leftrightharpoons \forall x(sx \leqslant tx \to \exists z \bigvee\nolimits_{u\in\bar{r}_\rho} x = uz).$$

Введем обозначения:

$$\alpha_\rho(x,y) \rightleftharpoons sx < ty \wedge (\neg\exists u(sx = tu) \vee \neg\exists u(ty = su)),$$

$$\gamma_s(x,y) \rightleftharpoons x \leqslant y \wedge x \leqslant sy \wedge y \neq sy.$$

Определим предложение $\Phi_{L_1}(\rho)$ языка $L_S^{\leqslant}$ следующим образом: если $L_1(\rho) = \emptyset$, то

$$\Phi_{L_1}(\rho) \leftrightharpoons \forall xy \neg(sx \leqslant ty),$$

в противном случае, когда $L_1(\rho) \neq \emptyset$, полагаем

$$\Phi_{L_1}(\rho) \rightleftharpoons \forall xy(sx \leqslant ty \to \exists z(sz \leqslant ty \wedge x \leqslant z \wedge$$
$$\wedge \forall z'(z \leqslant z' \wedge sz' \leqslant ty \to z = z') \wedge \exists w \bigvee\nolimits_{<u,v> \in L^1_\rho} \langle z,y\rangle = \langle u,v\rangle w)).$$

Определим предложение $\Phi_{L_2}(\rho)$ языка $L_S^{\leqslant}$ следующим образом: если $L_2(\rho) = \emptyset$, то

$$\Phi_{L_2}(\rho) \leftrightharpoons \forall xy \neg\alpha_\rho(x,y),$$

в противном случае, когда $L_2(\rho) \neq \emptyset$, полагаем

$$\Phi_{L_2}(\rho) \rightleftharpoons \forall xy(\alpha_\rho(x,y) \to \exists z(\alpha_\rho(z,y) \wedge x \leqslant z \wedge$$
$$\wedge \forall z'(\alpha_\rho(z',y) \wedge z \leqslant z' \to z = z') \wedge \exists w \bigvee\nolimits_{<u,v> \in L^2_\rho} \langle z,y\rangle = \langle u,v\rangle w)).$$

Пусть $s \in \mathcal{H}_1$. Определим предложение $\Phi_{L_3}(s)$ языка $L_S^{\leqslant}$ следующим образом: если $L_3(s) = \emptyset$, то

$$\Phi_{L_3}(s) \leftrightharpoons \forall xy \neg\gamma_s(x,y),$$

в противном случае, когда $L_3(s) \neq \emptyset$, полагаем

$$\Phi_{L_3}(s) \rightleftharpoons \forall xy(\gamma_s(x,y) \to \exists z((x \leqslant z \wedge \gamma_s(z,y) \wedge$$
$$\wedge \forall z'(z \leqslant z' \wedge \gamma_s(z',y) \to z = z') \wedge \exists w \bigvee\nolimits_{<u,v> \in L^3_s} \langle z,y\rangle = \langle u,v\rangle w))).$$

По условию класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем. Обозначим через $\Sigma_{\mathcal{F}r}$ множество аксиом для этого класса.

Пусть

$$\Sigma_{\mathcal{F}r^{\ll}} = \Sigma_{\mathcal{F}r} \cup \{\Phi_r(\rho) \mid \rho \in S \times S\} \cup \{\Phi_{L_1}(\rho) \mid \rho \in S \times S\} \cup$$

$$\cup \{\Phi_{L_2} < (\rho) \mid \rho \in S \times S\} \cup \{\Phi_{L_3}(s) \mid s \in \mathcal{H}_1\}.$$

Докажем, что $\Sigma_{\mathcal{F}r^{\ll}}$ является множеством аксиом класса $\mathcal{F}r^{\ll}$.

Предположим ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r^{\ll}}$. По теореме 1.4 ${}_SA = \coprod_{x \in X} {}_SA_x$, где ${}_SA_x$ – связные компоненты. Пусть $x \in X$. Так как ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r}$, то полигон ${}_SA_x$ изоморфен полигону ${}_SS$. Тогда существуют $h_x \in A_x$ и отображение $\varphi : {}_SA_x \to {}_SS$ такие, что ${}_SA_x = {}_SSh_x$, $\varphi(h_x) = 1$ и φ является изоморфизмом полигонов. Покажем, что ЧУ-полигоны ${}_SSh_x$ и ${}_SS$ изоморфны. Для этого достаточно показать, что

$$sh_x \leqslant th_x \Longleftrightarrow s \leqslant t$$

для любых $s, t \in S$. Если $s \leqslant t$, то по определению ЧУ-полигона $sh_x \leqslant th_x$. Пусть $sh_x \leqslant th_x$. Так как ${}_SA_x \vDash \Phi_r(s,t)$, то найдутся $u \in Sh_x$ и $r \in S$ такие, что $h_x = ru$ и $sr \leqslant tr$. Из того, что $u \in Sh_x$ следует существование элемента $r' \in S$ такого, что $u = r'h_x$. Тогда $h_x = rr'h_x$ и, действуя изоморфизмом φ на обе части этого равенства, получаем $1 = rr'$. Умножив неравенство $sr \leqslant tr$ справа на r', получим $srr' \leqslant trr'$, откуда $s \leqslant t$. Таким образом, ЧУ-полигоны ${}_SSh_x$ и ${}_SS$ изоморфны.

Заметим, что на ЧУ-множестве $\mathcal{H}_1$ отношение $\leqslant$ тривиально. Действительно, пусть $z_1 < z_2$ для некоторых $z_1, z_2 \in \mathcal{H}_1$. Тогда $1 < z_1 z_2^{-1}$. Обозначив $z_1 z_2^{-1}$ через u, получим возрастающую цепь

$$1 < u \leqslant u^2 \leqslant u^3 \leqslant \ldots .$$

Если $u^i = u^j$ для некоторых $i, j \in \omega$, $j > i$, то в силу $u^i \in \mathcal{H}_1$ имеет место равенство $1 = u^{j-i}$, следовательно, $1 = u$, что не так. Таким образом, получили строго возрастающую цепь элементов ЧУ-моноида S, что противоречит условию *2)*.

Определим на множестве X отношение $\leqslant$ следующим образом:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{H}_1 : x \leqslant zy$$

для любых $x, y \in X$. Так как на ЧУ-множестве $\mathcal{H}_1$ отношение порядка тривиально, то на X отношение $\leqslant$ является отношением порядка. Покажем, что ${}_SA$ – свободный ЧУ-полигон над ЧУ-множеством X. Пусть $h_1, h_2 \in \{h_x \mid x \in X\}$, $h_1 \neq h_2$. Предположим, что $h_1 < z_0h_2$. Покажем, что существует $z \in \mathcal{H}_1$ такой, что $h_1 \leqslant zh_2$ и $z \leqslant z_0$. Если $z_0 \in \mathcal{H}_1$, то в качестве z берем z_0. Пусть $z_0 \notin \mathcal{H}_1$. Так как класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем, то по теореме 2.2 класс $\mathcal{P}$ аксиоматизирум и по теореме 2.1 моноид S совершенен слева. Тогда по лемме 2.10 имеем $1 \notin z_0S$. Так как ${}_SA \models \Phi_{L_2}(1, z_0)$, то найдется $z_1 \in S$ такой, что $z_1h_2 \leqslant z_0h_2$, $h_1 \leqslant z_1h_2$ и $z_1 \notin z_0S$. Если $z_1 \in \mathcal{H}_1$, то в качестве z выбираем z_1. Иначе, поскольку ${}_SA \models \Phi_{L_2}(1, z_1)$, получаем элемент $z_2 \in S$ такой, что $z_2h_2 \leqslant z_1h_2$, $h_1 \leqslant z_2h_2$ и $z_2 \notin z_1S$. Если $z_2 \in \mathcal{H}_1$, то в качестве z выбираем z_2. В противном случае продолжаем этот процесс. В результате получаем либо элемент $z_i \in \mathcal{H}_1$ для которого $h_1 \leqslant z_ih_2$, либо убывающую цепь $z_0h_2 \geqslant z_1h_2 \geqslant z_2h_2 \geqslant \ldots$, в которой в силу соотношений $z_{i+1} \notin z_iS$ $(i \in \omega)$ все неравенства строгие, что противоречит условию *2)*.

Покажем, что элемент $z \in \mathcal{H}_1$ такой, что $h_1 \leqslant zh_2$, единственный. Предположим, что существует $z' \in \mathcal{H}_1$ такой, что $h_1 \leqslant z'h_2$ и $z \neq z'$. Тогда $h_1 \leqslant z'z^{-1}(zh_2)$. Поскольку ${}_SA \models \Phi_{L_3}(z'z^{-1})$, то найдется $z_1 \in Sh_2$ такой, что $h_1 \leqslant z_1h_2$, $z_1 \leqslant z$ и $z_1 \leqslant z'$. Тогда, как замечено выше, существует

$z_2 \in \mathcal{H}_1$ такой, что $h_1 \leqslant z_2h_2 \leqslant z_1h_2$. Отсюда следуют неравенства: $z_2 \leqslant z$ и $z_2 \leqslant z'$. Так как z и z' – различные элементы, то либо $z_2 < z$, либо $z_2 < z'$, т.е. в ЧУ-множестве $\mathcal{H}_1$ порядок не тривиальный. Противоречие.

Предположим, что $sh_1 < th_2$. Докажем, что существует единственный $z \in \mathcal{H}_1$ такой, что $h_1 \leqslant zh_2$ и $szh_2 \leqslant th_2$. Так как ${}_SA \models \Phi_{L_1}(s,t)$, то найдется $z' \in S$ такой, что $sz'h_2 \leqslant th_2$ и $h_1 \leqslant z'h_2$. По доказанному выше существует единственный $z \in \mathcal{H}_1$ такой, что $h_1 \leqslant zh_2 \leqslant z'h_2$. Тогда $szh_2 \leqslant sz'h_2 \leqslant th_2$.

Пусть $x \in X$ и $\{y \in X \mid x$ сравнимо с y по отношению $\leqslant\}$. Предположим $s \in S$. Через s_y $(y \in X)$ обозначим элемент szy, где z – элемент $\mathcal{H}_1$ такой, что h_x сравним с zh_y. По доказанному выше замечанию элемент s_y строится однозначно. Тогда для любых $x, y \in X$ и $s, t \in S$ выполняется условие (1) теоремы 1.13, т.е. ${}_SA$ – свободный над ЧУ-множеством X ЧУ-полигон.

Обратно. Пусть ${}_SA$ – свободный над ЧУ-множеством X ЧУ-полигон. Покажем, что ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r\ll}$. Ясно, что ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r}$. По теореме 1.12 ${}_SA = \coprod_{x\in X} {}_SSx$, где ${}_SSx$ – копии ЧУ-полигона ${}_SS$ и s_x – копии элементов $s \in S$ и выполняется условие (1) теоремы 1.13. Пусть $\rho = (s,t)$. Так как ${}_SS \models \Phi_r(\rho)$, то ${}_SA \models \Phi_r(\rho)$.

Покажем, что ${}_SA \models \Phi_{L_i}(\rho)$. Пусть $skx \leqslant tly$ и при $i = 2$ либо $sk \notin tS$, либо $tl \notin sS$, где $x, y \in X$. Тогда по теореме 1.13 $x \leqslant y$ и $sk \leqslant tl$. По условию *2)* в ЧУ-множестве ${}_SS$ существует максимальный элемент $r \in S$ такой, что $k \leqslant r$, $sr \leqslant tl$ и при $i = 2$ либо $sr \notin tS$, либо $tl \notin sS$. Тогда $\langle r, l\rangle \in L_i(\rho)$ и по условию *4)* теоремы $\langle r, l\rangle = \langle x^0, y^0\rangle w$ для некоторых $w \in S$ и $\langle x^0, y^0\rangle \in L^i_\rho$. Следовательно, $kx \leqslant ry$, $\langle ry, ly\rangle = \langle x^0, y^0\rangle wy$ и при $i = 2$ либо $sr \notin tS$, либо $tl \notin sS$. Соотношение ${}_SA \models \Phi_{L_i}(\rho)$ доказано.

Покажем, что ${}_SA \models \Phi_{L_3}(s)$, где $s \in \mathcal{H}_1$. Пусть $kx \leqslant ly$ и $kx \leqslant sly$

для некоторых $k, l \in S$, $x, y \in X\}$. По условию *2)* в ЧУ-множестве ${}_SS$ существует максимальный элемент $r \in S$ такой, что $k \leqslant r$, $r \leqslant l$ и $r \leqslant sl$. Тогда $\langle r, l\rangle \in L_3(s)$ и по условию *5)* теоремы $\langle r, l\rangle = \langle x^0, y^0\rangle w$ для некоторых $w \in S$ и $\langle x^0, y^0\rangle \in L_s^i$. Следовательно, $kx \leqslant ry$, $\langle ry, ly\rangle = \langle x^0, y^0\rangle wy$. Соотношение ${}_SA \models \Phi_{L_3}(s)$ доказано.

Таким образом, ${}_SA$ является свободным ЧУ-полигоном над ЧУ-множеством X тогда и только тогда, когда ${}_SA \models \Sigma$. Следовательно, класс $\mathcal{F}r^{\leqslant}$ аксиоматизируем.

$\square$

2.3 Полнота, модельная полнота и категоричность классов проективных и свободных ЧУ-полигонов

В этом параграфе рассматриваются вопросы полноты (модельной полноты, категоричности) классов проективных и свободных ЧУ-полигонов.

Теорема 2.17. *Пусть S – ЧУ-моноид такой, что класс $\mathcal{P}^<$ аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{P}^<$ полон;

2) класс $\mathcal{P}^<$ модельно полон;

3) класс $\mathcal{P}^<$ категоричен;

4) $\mathcal{P}^< = \mathcal{F}r^<$;

5) S – частично упорядоченная группа.

Доказательство. Пусть S – частично упорядоченная группа. Тогда S удовлетворяет условиям $(A^<)$ и $(M_R^<)$. По теореме 1.22 S – совершенный слева ЧУ-моноид и $\mathcal{SF}^< = \mathcal{P}^< = \mathcal{F}r^<$. Следовательно, $\mathcal{SF}^<$ аксиоматизируем. Тогда по теореме 1.36 и замечанию 1.37 пункты *1), 2), 3), 4)* эквивалентны и из *5)* следует *4)*. Таким образом, достаточно доказать импликацию *1)* $\Rightarrow$ *5)*. Из аксиоматизируемости класса $\mathcal{P}^<$ и теоремы 1.22 следует, что S – совершенный слева ЧУ-моноид. По лемме 1.23 S – совершенный слева моноид и по теореме 1.14 S удовлетворяет условию (M_R). Следовательно, в S существует минимальный правый идеал, который по лемме 1.24 (4) имеет вид eS для некоторого $e \in E$. По этой же лемме (2) левый идеал Se минимален. Ясно, что ${}_SSe \in \mathcal{P}^<$. По следствию 1.25 S локален. Следовательно, 1 является *единственным* идемпотентом таким, что $Se = S$ или $eS = S$. Предположим $e \neq 1$. Тогда $Se \subset S$ и $eS \subset S$.

Для любого $a \in S$ полагаем

$$X_a = \{x \in S \mid ex = a\}.$$

В силу аксиоматизируемости класса $\mathcal{P}^<$, всякая ультрастепень ЧУ-полигона ${}_SS$ проективна. По лемме 2.7 каждое множество X_a является конечным подмножеством множества $\{a \in S | Sa = Se\}$. Пусть $X_e \cap Se = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$. Возьмем произвольное $t \in Se$. Покажем, что $|X_{et} \cap Se| = n$. Ясно, что $a_i t \in X_{et} \cap Se$, $1 \leq i \leq n$. Так как $Se = Sa_i$ – минимальный левый идеал, то по лемме 1.24 правый идеал $a_i S$ минимален для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Предположим, что $a_i t = a_j t$, где $1 \leq i, j \leq n$. Поскольку правые идеалы $a_i S$ и $a_j S$ минимальны, то $a_i S = a_j S$. Следовательно, $a_j = a_i k$ для некоторого $k \in S$. Так как $ea_i = ea_j = e$, то $ek = ea_i k = ea_j = e$, т.е. $ek = e$. Так как $Se = Sa_i$, то $a_i = a_i e$ и, следовательно,

$$a_j = a_i k = a_i ek = a_i e = a_i.$$

Тогда $|\{a_1 t, \ldots, a_n t\}| = n$.

Предположим, что существует $c \in X_{et} \cap Se$ такой, что $c \neq a_i t$ для любого i, $1 \leq i \leq n$. Поскольку $c = ce$ и левый идеал Se минимален, то $Se = Sce = Sc$, т.е. левый идеал Sc также является минимальным. Следовательно, $Sc = Sec$ и $c = lec$ для некоторого $l \in S$. В силу минимальности eS выполняется равенство $eS = ecS$. Следовательно, существует $d \in cS$ такой, что $ed = e$ и $d = cr$, где $r \in S$. Предположим, что $d \in Se$. Тогда $d = a_i$ для некоторого i, $1 \leq i \leq n$. Из равенств $ecrt = edt = ea_i t = et = ec$ следует $ecrt = ec$. Умножим это равенство на l слева. Тогда $crt = c$, т.е. $c = a_i t$. Это противоречит выбору c. Таким образом, $d \in (X_e \cup cS) \setminus Se$. Так как $d = cr$, то $ecr = ed = e = ecre$. Умножим это равенство на l слева. Тогда $cr = cre$, т.е. $d \in Se$, что не так.

Таким образом, $X_{et} \cap Se = \{a_1 t, \cdots, a_n t\}$ и $a_i t \neq a_j t$ $(i \neq j)$ для любого $t \in Se$. Следовательно, $Se \models \psi$, где

$$\psi \leftrightharpoons \forall x \Big(ex = x \to \exists y_1, \ldots, y_n \Big(\bigwedge_{1 \le i \le n} (ey_i = x) \wedge$$

$$\wedge \forall y (ey = x \to \bigvee_{1 \le i \le n} y = y_i) \Big) \Big).$$

Поскольку класс $\mathcal{P}^<$ полон, то ${}_SA = \coprod_{i \in \omega} {}_SSe_i \equiv {}_SB = \coprod_{i \in \omega} {}_SS_i$, где ${}_SS_i$, ${}_SSe_i$ $(i \in \omega)$ – копии ЧУ-полигонов ${}_SS$ и ${}_SSe$ соответственно. Поскольку ${}_SA \models \psi$, то ${}_SB \models \psi$. В частности, в ${}_SB$ существует ровно n решений уравнения $ey = e$; но $|X_e \cap Se| = n$ и $1 \in X_e \setminus Se$, противоречие. Следовательно, $e = 1$.

Так как моноид S удовлетворяет условию (M_R), то каждый главный правый идеал aS моноида S содержит минимальный правый идеал bS и по лемме 1.24 правый идеал bS порожден идемпотентом, то $aS = S$ для любого $a \in S$. Поскольку S – минимальный правый идеал, то по лемме 1.24 S является также минимальным левым идеалом, следовательно, $Sa = S$ для любого $a \in S$. Таким образом, S – частично упорядоченная группа. $\square$

Переходим к рассмотрению вопросов полноты, модельной полноты и категоричности классов $\mathcal{F}r^<$ и $\mathcal{F}r^\ll$. Следующая теорема следует из характеризации свободных над множеством ЧУ-полигонов как копроизведений копий ЧУ-полигона ${}_SS$.

Теорема 2.18. *Пусть S – ЧУ-моноид такой, что класс $\mathcal{F}r^<$ аксиоматизируем. Тогда класс $\mathcal{F}r^<$ полон, модельно полон и категоричен.*

Доказательство следующей теоремы в точности повторяет доказательство теоремы 1.34.

Теорема 2.19. *Не существует ЧУ-моноида S такого, что аксиоматизируемый класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ полон (модельно полон, категоричен).*

3 Теоретико-модельные свойства регулярных ЧУ-полигонов

3.1 Необходимые определения и предварительные сведения

Пусть в ЧУ-полигоне ${}_SA$ существует регулярный ЧУ-подполигон. Заметим, что объединение всех регулярных ЧУ-подполигонов ЧУ-полигона ${}_SA$ есть регулярный ЧУ-подполигон, который называется *регулярным центром* ЧУ-полигона ${}_SA$ и обозначается через $R({}_SA)$. Вместо $R({}_SS)$ будем писать ${}_SR$. Подполугруппа R ЧУ-моноида S называется *регулярным центром* ЧУ-моноида S. Всюду в дальнейшем предполагается $R \neq \emptyset$.

Утверждение 3.1. *Пусть S – ЧУ-моноид. Тогда для любых $e, f \in E$ из $eS \subseteq fS$ следует $e = fe$.*

Доказательство. Предположим $eS \subseteq fS$. Тогда $e = fk$ для некоторого $k \in S$. Домножим предыдущее равенство на f слева. Получим $f^2k = fe = e$. □

Предложение 3.2. *Если $e, f \in R$, $e^2 = e$ и $f^2 = f$, то*

1) $eR = fR \iff eS = fS$;

2) $eR \subset fR \iff eS \subset fS$.

Доказательство. Пусть $e, f \in R$, $e^2 = e$ и $f^2 = f$.

Докажем 1). Если $eR = fR$, то $e = ee \in eR = fR \subseteq fS$ и $eS \subseteq fS$; аналогично, $fS \subseteq eS$, т.е. $eS = fS$. Если $eS = fS$, то $e = fe \in fR$ и $eR \subseteq fR$; аналогично, $fR \subseteq eR$, т.е. $eR = fR$.

Докажем 2). Если $eR \subset fR$, то $e = ee \in eR \subset fR \subseteq fS$ и $eS \subseteq fS$. Заметим, что равенства быть не может (иначе в силу п. 1 было бы $eR = fR$).

Таким образом, $eS \subset fS$. Если $eS \subset fS$, то $e = fe \in fR$ и $eR \subseteq fR$. Равенство также не возможно. Поэтому $eR \subset fR$. $\square$

Пусть ${}_SA$ – ЧУ-полигон. Элемент $a \in A$ называется *регулярным*, если существует гомоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_SSa \longrightarrow {}_SS$ такой, что $\varphi(a)a = a$. ЧУ-полигон ${}_SA$ называется регулярным, если все его элементы регулярны [48]. Класс регулярных ЧУ-полигонов обозначим $\mathcal{R}^<$.

Предложение 3.3. *[48] Пусть ${}_SA$ – ЧУ-полигон и $a \in A$. Следующие условия эквивалентны:*

1) a – регулярный элемент;

2) существует идемпотент $e \in S$ такой, что ${}_SSa \cong {}_SSe$.

Предложение 3.4. *Пусть ${}_SA$ – ЧУ-полигон, $a \in A$. Следующие условия эквивалентны:*

1) a – регулярный элемент;

2) существуют идемпотент $e \in S$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\psi : {}_SSa \longrightarrow {}_SSe$ такие, что $\psi(a) = e$;

3) существует идемпотент $e \in S$ такой, что ЧУ-полигоны ${}_SSa$ и ${}_SSe$ изоморфны.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$ 2). Пусть $a \in A$ – регулярный элемент, $\varphi : {}_SSa \longrightarrow {}_SS$ – гомоморфизм ЧУ-полигонов такой, что $\varphi(a)a = a$. Пусть $e = \varphi(a)$. Тогда $e = \varphi(a) = \varphi(\varphi(a)a) = \varphi(a)\varphi(a) = e^2$ и $ea = \varphi(a)a = a$. Кроме того, если $sa \leqslant ta$, то $se = s\varphi(a) = \varphi(sa) \leqslant \varphi(ta) = t\varphi(a) = te$ для любых $s, t \in S$. Тогда отображение $\psi : {}_SSa \longrightarrow {}_SSe$ такое, что $\psi(sa) = se$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом ЧУ-полигонов.

Импликация 2)$\Rightarrow$3) очевидна.

3)$\Rightarrow$1). Следует из предложения 3.3. $\square$

Следствие 3.5. *Следующие условия для ЧУ-полигона* ${}_SA$ *эквивалентны:*

1) ЧУ-полигон ${}_SA$ *регулярен;*

2) для любого $a \in A$ *существуют идемпотент* $e \in S$ *и изоморфизм ЧУ-полигонов* $\psi : {}_SSa \longrightarrow {}_SSe$ *такие, что* $\psi(a) = e$*;*

3) для любого $a \in A$ *существует идемпотент* $e \in S$ *такой, что ЧУ-полигоны* ${}_SSa$ *и* ${}_SSe$ *изоморфны.*

3.2 Аксиоматизируемость класса регулярных ЧУ-полигонов

В данном параграфе приводится описание аксиоматизируемого класса регулярных ЧУ-полигонов.

Доказательство следующей теоремы является модификацией доказательства теоремы об аксиоматизируемости класса регулярных S-полигонов (см. [8]).

Теорема 3.6. *Класс $\mathcal{R}^<$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда*

1) полугруппа R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами;

2) для любых $n \geqslant 1$, $s_i, t_i \in S$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ множество $\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x \leqslant t_i x\}$ пусто или конечно-порождено как правый идеал полугруппы R.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть класс $\mathcal{R}^<$ аксиоматизируем. Предположим, что *1)* не выполняется. Это означает, что существует бесконечно убывающая цепь главных правых идеалов:

$$f_0 R \supset f_1 R \supset \ldots \supset f_n R \supset \ldots,$$

где $f_n \in R$, $f_n^2 = f_n$ $(n \geqslant 0)$. По предложению 3.2 верно

$$f_0 S \supset f_1 S \supset \ldots \supset f_n S \supset \ldots.$$

Для любых n, m, $0 \leqslant n \leqslant m$, из включения $f_n S \supseteq f_m S$ следует равенство $f_n f_m = f_m$. Пусть $\bar{f} = (f_n)_{n \in \omega} \in R^\omega$ и D - произвольный неглавный ультрафильтр на ω. Тогда в ${}_S R^\omega / D$ для любого $n \geqslant 0$ верно равенство $f_n \cdot \bar{f}/D = \bar{f}/D$. Из аксиоматизируемости класса $\mathcal{R}^<$ по теореме 1.1 имеем ${}_S R^\omega / D \in \mathcal{R}^<$. По предложению 3.4 существуют идемпотент $e \in R$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_S(S \cdot \bar{f}/D) \longrightarrow {}_S Se$ такие, что $\varphi(\bar{f}/D) = e$.

Тогда $e \cdot \bar{f}/D = \bar{f}/D$. Для любого $n \geqslant 0$ равенство $f_n \cdot \bar{f}/D = \bar{f}/D$ влечет равенство $f_n e = e$. Следовательно, существует $m \geqslant 0$ такой, что $f_m = ef_m \in eS \subseteq f_n S$ для любых $n \geqslant 1$, что противоречит условию $f_{m+1}S \subset f_m S$. Таким образом, *1)* доказан.

Предположим, что *2)* не выполняется. Тогда существуют $n \geqslant 1$, $s_i, t_i \in S$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, для которых множество $X = \{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x \leqslant t_i x\}$ не пусто и не конечно-порождено как правый идеал R. Значит, найдутся бесконечный ординал γ и $x_\tau \in X$ $(\tau < \gamma)$, такие что $X = \cup\{x_\tau R \mid \tau < \gamma\}$ и $x_\beta R \not\subseteq \cup\{x_\tau R \mid \tau < \beta\}$ для любого $\beta < \gamma$. Пусть $\bar{x} = (x_\tau)_{\tau<\gamma} \in R^\gamma$ и D – ультрафильтр на γ такой, что $|Y| = \gamma$ для $Y \in D$. Из аксиоматизируемости класса $\mathcal{R}^<$ по теореме 1.1 получаем ${}_S R^\gamma/D \in \mathcal{R}^<$. По предложению 3.4 существуют идемпотент $e \in R$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_S S\bar{x}/D \longrightarrow {}_S Se$ такие, что $\varphi(\bar{x}/D) = e$. Поскольку $x_\tau \in X$ $(\tau < \gamma)$, имеем $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i \bar{x}/D \leqslant t_i \bar{x}/D$ и $e \in X$. Следовательно, $eR \subseteq \cup\{x_\tau R \mid \tau < \gamma\}$, т.е. $eR \subseteq x_{\tau_0} R$ для некоторого $\tau_0 < \gamma$. Так как $e = ee$, то $\bar{x}/D = e \cdot \bar{x}/D$. В частности, $x_\tau \in eR$ для некоторого $\tau > \tau_0$ и $x_\tau R \subseteq x_{\tau_0} R$. Получили противоречие. Таким образом, *2)* доказан.

Достаточность. Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы. Предположим, $n \geqslant 1$, $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$, $\bar{t} = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in S^n$, $X_{\bar{s}\bar{t}} = \{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x \leqslant t_i x\}$. Покажем, что либо $X_{\bar{s}\bar{t}} = \emptyset$, либо $X_{\bar{s}\bar{t}} = \cup\{e_i R \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ для некоторых $k \geqslant 1$ и идемпотентов $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Предположим, что $X_{\bar{s}\bar{t}} \neq \emptyset$. По условию теоремы существуют $k \geqslant 1$, $r_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, для которых $X_{\bar{s}\bar{t}} = \cup\{r_i R \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Можно считать, что $r_i R \not\subseteq r_j R$ $(i \neq j)$. Зафиксируем i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Поскольку $r_i \in R$, по предложению 3.4 существуют идемпотент $e_i \in R$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_S Sr_i \longrightarrow {}_S Se_i$ такие, что $\varphi(r_i) = e_i$. Тогда $e_i r_i = r_i$. Поскольку $r_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$, имеем $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}} = \cup\{r_i R \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$, т.е. $e_i = r_j s$ для некоторых $j, 1 \leqslant j \leqslant k$, и $s \in R$. Следовательно, $r_i = e_i r_i = r_j s r_i \in r_j R$. В силу выбора элементов r_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ это означает, что $r_i = r_j$. Так как $r_i = e_i r_i$, то $r_i \in e_i R \subseteq e_i S$. Ввиду $e_i = r_i s$ имеем $e_i \in r_i S$. Следовательно, $r_i S = e_i S$. Согласно утверждению 3.2 $r_i R = e_i R$. Таким образом, $X_{\bar{s}\bar{t}} = \cup\{e_i R \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$, где $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$.

Определим множество формул $\Sigma_{\mathcal{R}^<}$ следующим образом: для любых $n \geqslant 1$, $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$, $\bar{t} = \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in S^n$

$$\neg \exists x \bigwedge_{i=1}^{n} s_i x \leqslant t_i x \in \Sigma_{\mathcal{R}^<}, \text{ если } {}_S R \models \neg \exists x (x \in X_{\bar{s}\bar{t}});$$

$$\forall x (\bigwedge_{i=1}^{n} s_i x \leqslant t_i x \longrightarrow \bigvee_{j=1}^{k} x = e_j x) \in \Sigma_{\mathcal{R}^<}, \text{ если } {}_S R \models \exists x (x \in X_{\bar{s}\bar{t}}),$$

где $X_{\bar{s}\bar{t}} = \{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x \leqslant t_i x\} = \cup\{e_j R \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$, $e_j^2 = e_j \in X_{\bar{s}\bar{t}}$. Покажем, что

$${}_S A \in \mathcal{R}^< \Longleftrightarrow {}_S A \models \Sigma_{\mathcal{R}^<}.$$

Пусть ${}_S A \in \mathcal{R}^<$. Предположим, что ${}_S A \models \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i a \leqslant t_i a$ для некоторого $a \in A$. По следствию 3.5 существуют идемпотент $f \in R$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_S Sa \longrightarrow {}_S Sf$ такие, что $\varphi(a) = f$. Тогда $f \in X_{\bar{s}\bar{t}}$. Следовательно, $X_{\bar{s}\bar{t}} \neq \emptyset$. Пусть $X_{\bar{s}\bar{t}} = \cup\{e_j R \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$, $e_j^2 = e_j \in X_{\bar{s}\bar{t}}$. Тогда ${}_S R \models \bigvee\limits_{j=1}^{k} e_j f = f$ и ${}_S A \models \bigvee\limits_{j=1}^{k} e_j a = a$.

Пусть ${}_S A \models \Sigma_{\mathcal{R}^<}$, $a \in A$. Докажем, что ЧУ-полигоны ${}_S Sa$ и ${}_S Se$ изоморфны для некоторого идемпотента e из R. Ясно что $a \leqslant a$. Поскольку ${}_S A \models \Sigma_{\mathcal{R}^<}$, имеем ${}_S R \models \exists x (x \leqslant x)$ и $a = fa$ для некоторого идемпотента $f \in R$. Пусть $\{f_\tau \mid \tau < \gamma\} = \{f \mid f^2 = f,\ fa = a,\ f \in R\}$. Индукцией по γ покажем, что существует $\gamma_0 < \gamma$ такой, что

$$f_{\gamma_0} S = \cap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}.$$

Пусть γ – предельный ординал, $\tau_0 < \gamma$. По предположению индукции существует $\beta_0 < \tau_0$, для которого $f_{\beta_0}S = \cap\{f_\tau S \mid \tau < \tau_0\}$. Если $f_{\beta_0}S \neq \cap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}$, то существуют $\beta_1, \tau_1,\ \beta_1 < \tau_1 < \gamma$, такие что

$$f_{\beta_0}S \supset f_{\beta_1}S = \cap\{f_\tau S \mid \tau < \tau_1\}$$

и т.д. Так как для любого $n \geqslant 0$ выполняется $f_{\beta_n}S \supset f_{\beta_{n+1}}S$, то в силу утверждения 3.2 (2) верно $f_{\beta_n}R \supset f_{\beta_{n+1}}R$. По условию теоремы убывающая цепь идеалов $f_{\beta_0}R \supset f_{\beta_1}R \supset \ldots \supset f_{\beta_n}R \supset \ldots$ обрывается. По утверждению 3.2 (2) обрывается также и убывающая цепь идеалов $f_{\beta_0}S \supset f_{\beta_1}S \supset \ldots \supset f_{\beta_n}S \supset \ldots$, т.е. $f_{\beta_k}S = \cap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}$ для некоторого $k \geqslant 0$.

Пусть γ – непредельный ординал и существует $\beta_0 < \gamma - 1$, такой что $f_{\beta_0}S = \cap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma - 1\}$. Тогда ${}_SA \models (a \leqslant f_{\beta_0}a) \wedge (f_{\beta_0}a \leqslant a) \wedge (a \leqslant f_{\gamma-1}a) \wedge (f_{\gamma-1}a \leqslant a)$. Поскольку ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{R}^<}$, имеем ${}_SR \models \exists x((x \leqslant f_{\beta_0}x) \wedge (f_{\beta_0}x \leqslant x) \wedge (x \leqslant f_{\gamma-1}x) \wedge (f_{\gamma-1}x \leqslant x))$ и существует $f \in R$ такой, что $a = fa,\ f = f_{\beta_0}f,\ f = f_{\gamma-1}f$. Следовательно,

$$f = f_{\gamma_0},\ \gamma_0 < \gamma,\ f_{\gamma_0}S \subseteq f_{\beta_0}S \cap f_{\gamma-1}S,\ f_{\gamma_0}S = \cap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}.$$

Положим $e = f_{\gamma_0}$. Тогда $ea = a$ и для любого идемпотента $g \in R$ из равенства $ga = a$ следует $eS \subseteq gS$, т.е. $e = ge$. Покажем, что отображение $\varphi : Sa \longrightarrow Se$ такое, что $\varphi(sa) = se$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом ЧУ-полигонов. Пусть $ra \leqslant ka,\ r, k \in S$. Поскольку ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{R}^<}$, то существует идемпотент $g \in R$ такой, что $rg \leqslant kg$ и $ga = a$. Тогда $ge = e$ и $re \leqslant ke$. Пусть $re \leqslant ke$, где $r, k \in S$. Поскольку $ea = a$, получаем $ra \leqslant ka$. Таким образом, ЧУ-полигоны ${}_SSa$ и ${}_SSe$ изоморфны, и ${}_SA \in \mathcal{R}^<$ ввиду произвольности выбора элемента a. $\square$

3.3 Полнота и модельная полнота класса регулярных ЧУ-полигонов

В данном параграфе доказывается, что не существует моноида, над которым аксиоматизируемый класс регулярных ЧУ-полигонов был бы полон или модельно полон.

Теорема 3.7. *Не существует ЧУ-моноида, над которым класс* $\mathcal{R}^<$ *аксиоматизируем и полон.*

Доказательство. Предположим, что аксиоматизируемый класс $\mathcal{R}^<$ полон. Пусть $e \in R$, $e = e^2$, $I = \{\langle i,j\rangle \mid i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}\}$, ${}_SSe_{ij}$ – копии ЧУ-полигона ${}_SSe$, $se_{ij} \in Se_{ij}$ – копии элемента $se \in Se$ в Se_{ij}. На множестве $\coprod_{\langle i,j\rangle \in I} {}_SSe_{ij}$ зададим отношение:

$$se_{ij} \leqslant te_{kl} \Longleftrightarrow se \leqslant te,\ i \leqslant k \text{ и } 2^{k-i}(j-1)+1 \leqslant l \leqslant 2^{k-i}j$$

для любых $se_{ij} \in Se_{ij}$, $se_{kl} \in Se_{kl}$, $\langle i,j\rangle, \langle k,l\rangle \in I$. Легко проверить, что данное отношение является частичным порядком. ЧУ-полигон $\coprod_{\langle i,j\rangle \in I} {}_SSe_{ij}$ с порядком $\leqslant$ обозначим через ${}_SA$. Через ${}_SB$ обозначим $\coprod_{\langle i,j\rangle \in I} {}_SSe_{ij}$, где элементы из разных копий ЧУ-полигона ${}_SSe$ несравнимы. По определению регулярного ЧУ-полигона ЧУ-полигоны ${}_SA$ и ${}_SB$ регулярны. Пусть

$$\Phi \rightleftharpoons \forall x(x = ex \to \exists y_1 \exists y_2 (y_1 = ey_1 \wedge y_2 = ey_2 \wedge x < y_1 \wedge x < y_2 \wedge$$

$$\wedge \neg \exists z (y_1 \leqslant z \wedge y_2 \leqslant z))).$$

Заметим, что ${}_SA \models \Phi$. Действительно, пусть $ese_{ij} \in A$. По определению порядка для элементов $ese_{i+1,2j-1}, ese_{i+1,2j}$ ЧУ-полигона ${}_SA$ справедливы неравенства $ese_{ij} < ese_{i+1,2j-1}$ и $ese_{ij} < ese_{i+1,2j}$. Предположим, что $ese_{i+1,2j-1} < te_{kl}$ и $ese_{i+1,2j} < te_{kl}$ для некоторого $te_{kl} \in {}_SA$. Тогда $ese \leqslant te$,

$i+1 \leqslant k,\ \ 2^{k-i-1}(2j-1-1)+1 \leqslant l \leqslant 2^{k-i-1}(2j-1)$ и $2^{k-i-1}(2j-1)+1 \leqslant l \leqslant 2^{k-i-1}(2j)$. Последние два неравенства не имеют общих решений. Таким образом, ${}_SA \models \Phi$. Покажем, что ${}_SB \not\models \Phi$. Предположим, что ${}_SB \models \Phi$. Тогда $e_{11} < ese_{ij}$, $e_{11} < ete_{kl}$ для некоторых $\langle i,j\rangle, \langle k,l\rangle \in I$ и $s,t \in S$, причем не существует в ${}_SB$ элемента, который был бы одновременно больше либо равен элементов ese_{ij}, ete_{kl}. Следовательно, по построению ${}_SB$, имеем $\langle i,j\rangle = \langle k,l\rangle = \langle 1,1\rangle$, $e < ese$ и $e < ete$. Умножим первое неравенство справа на t, а второе слева на s. Тогда $et \leqslant eset$ и $se \leqslant sete$, т.е. $ete \leqslant esete$ и $ese \leqslant esete$. Противоречие. Следовательно, не верно, что ${}_SA \equiv {}_SB$. Поэтому класс $\mathcal{R}^<$ не полон. $\square$

Из предыдущей теоремы и замкнутости класса $\mathcal{R}^<$ относительно копроизведений получаем

Следствие 3.8. *Не существует ЧУ-моноида, над которым класс $\mathcal{R}^<$ аксиоматизируем и модельно полон.*

Список литературы

[1] Богомолов В.С., Мустафин Т.Г. Описание коммутативных моноидов, над которыми все полигоны ω–стабильны // Алгебра и логика. 1989. Т.28. №4. С.371-381.

[2] Габриэль П. , Цисман М. Категории частных и теория гомологий, М.: Мир. 1971.

[3] Гоулд В., Михалев А.В., Палютин Е.А., Степанова А.А. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т.14. №1. С. 63-110.

[4] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М.: Наука. 1987.

[5] Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей, М.: Мир. 1977.

[6] Кильп М. К гомологической классификации моноидов // Сиб. мат. журн. 1972. Т.13. № 3. С.578-586.

[7] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир. 1972.

[8] Михалев А.В., Овчинникова Е.В., Палютин Е.А., Степанова А.А. Теоретико-модельные свойства регулярных S-полигонов// Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т.10. №4. С. 107-157.

[9] Мустафин Т.Г. О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и ее применение. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, 1988. – (Тр.АН СССР. Сиб.отд-е. Ин-т математики; Т.8), С.92-107.

[10] Мустафин Т.Г. К описанию моноидов, над которыми все полигоны имеют ω–стабильную теорию // Алгебра и логика. 1990. Т.29. №6. С.675-695.

[11] Нормак П. О нетеровых и конечно связанных полигонах // Уч. записки Тартуского университета. 1977. № 431. С.37-45.

[12] Овчинникова Е.В. Полные классы регулярных полигонов с конечным числом идемпотентов // Сиб. мат. журн. 1995. Т.36. № 2. С.381-384.

[13] Ряскин А.Н. Структура моделей полных теорий унаров: Автореферат дис. канд. физ. мат. наук: 01.01.06. - Н-ск. 1989.

[14] Скорняков Л.А. Характеризация категории полигонов // Мат. сб. 1969. Т.80. №4. С.492-502.

[15] Степанова А.А., Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S–полигонов // Алгебра и логика. 1991. Т.3. № 5. С.583–594.

[16] Степанова А.А. Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // Сиб. мат. журн. 1994. Т.35. №1. С.181-193.

[17] Степанова А.А. Моноиды со стабильными теориями регулярных полигонов //Алгебра и логика. 2001. Т.40. №4. С.430–457.

[18] Blyth S., Janowitz M.F. Residuation Theory. Pergamon: Oxford. 1972.

[19] Bulman-Fleming S. Flat and strongly flat S-systems // Commun. of Algebra. 1992. V.20. P.2553-2567.

[20] Bulman-Fleming S. Flatness properties of S-posets: an overview // International Conference on Semigroups, Acts and Categories, with Applications to Graphs, Estonian Mathematical Society, Tartu. 2008. P. 28–40.

[21] Bulman-Fleming S., Normak P. Monoids over which all flat cyclic right acts are strongly flat // Semigroup Forum. 1995. V.50. P.233-241.

[22] Bulman-Fleming S., Gould V. Axiomatisability of weakly flat, flat and projective acts // Communications in Algebra. 2002. V. 30. P. 5575-5593.

[23] Bulman-Fleming S., Laan V. Lazard's theorem for S -posets // Math. Nachr. 2005. V. 278. P. 1743-1755.

[24] Bulman-Fleming S., Gutermuth D., Gilmour A. Flatness properties of S-posets // Comm. Algebra. (в печати)

[25] Bulman-Fleming S., Mahmoudi M. The category of S-posets // Semigroup Forum. 2005. V.71. P. 443–461

[26] Bulman-Fleming S., Gilmour A., Gutermuth D. and Kilp M. Flatness properties of S-posets // Comm. Alg. 2006. V.34. P. 1291-1317.

[27] Fakhruddin S.M. Absolute flatness and amalgams in pomonoids // Semigroup Forum. 1986. V. 33. P. 15-22.

[28] Fakhruddin S.M. On the category of S-posets // Acta Sci. Math. (Szeged). 1988. V. 52. P. 85-92.

[29] Fountain J.B. Perfect semigroups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1976. V. 20. P. 87–93.

[30] Fountain J.B., Gould V. Stability of the theory of existentially closed S-acts over a right coherent monoid // Advances in algebra and combinatorics. 2008. P. 129-155.

[31] Golchin A. and Rezaei P., Subpullbacks and flatness properties of S-posets // Communications in Algebra. (в печати)

[32] Gould V. The characterization on monoids by properties of their S-systems // Semigroup forum. 1985. V.32. P.251-265.

[33] Gould V. Axiomatisability problems for S-systems // J. London Math. Soc. 1987. V. 35. P. 193–201.

[34] Gould V. Axiomatisability of free, projective and flat S-acts // Semigroup forum. (в печати)

[35] Gould V., Shaheen L. Axiomatisability problems for S-posets // Semigroup forum. (в печати)

[36] Gould V., Shaheen L. Perfection for pomonoids // Semigroup forum. (в печати)

[37] Isbell J.R. Perfect monoids // Semigroup forum. 1971. № 2. P.95-118.

[38] Ivanov A.A. Structure problems for model companions of varieties of polygons // Siberian Math. J. 1992. V. 33. № 2. P.194–201

[39] Kilp M., Knauer U. On free, projective and strongly flat acts // Ach. Math. 1986. V.47. P.17-23.

[40] Kilp M., Knauer U. Characterization of monoids by properties of regular acts // J. of Pure and Applied Alg. 1987. V.2. №35. P.193-201.

[41] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, Acts and Categories // Walter De Gruyter, Berlin New York. 2000.

[42] Kilp M., Laan V. On flatness properties of cyclic acts // Comm. Algebra. 2000. V.28. №6. P.2919-2926.

[43] Knauer U. Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids // Semigroup Forum. 1972. V.3. P.359-370.

[44] Knauer U., Mihalev A.V. Endomophism monoids of acts over monoids // Semigroup Forum. 1973. V.6. P.50-58.

[45] Knauer U., Petrich M. Characterization of monoids by torsion-free, flat, projective and free acts // Arch. Math. 1981. V.36. P.289-294.

[46] Mustafin T.G., Poizat B. Polygones // Math. Log. Quart. 1995. V.41. P.93-110.

[47] Shi X. Strongly flat and po-flat S-posets // Comm. Algebra. 2005. V. 33. P. 4515-4531.

[48] Shi X., Liu Z., Wang F., Bulman-Fleming S. Indecomposable, projective and flat S-posets // Comm. Algebra. 2005. V.33. P. 235-251.

[49] Stenstr $\ddot{o}$ m B. Flatness and localization over monoids // Math. Nachr. 1971. V.48. P. 315-334.

[50] Tajnia S. Projective covers in POS-S // Tarbiat Moallem University, 20th Seminar on Algebra, 2–3 Ordibhest, 1388. 2009. P. 210–212.

[51] Tran L.H. Characterization of monoid by regular acts // Period. Math. Hungar. 1985. V.16. P.273-279.

Список работ автора по теме исследования

[52] Первухин М.А. Аксиоматизируемость некоторых классов частично упорядоченных полигонов // Дальневосточная конф. студентов, аспирантов и молодых ученых по мат. моделированию. Тезисы докладов. Владивосток: Дальнаука. 2007. С. 3

[53] Первухин М.А. Аксиоматизируемость классов плоских частично упорядоченных полигонов // Дальнев. матем. школа - семинар им. ак. Е.В. Золотова. Владивосток, Изд-во Дальневосточный ун-т. 2007. С.12.

[54] Первухин М.А., Степанова А.А. Аксиоматизируемые и полные классы свободных частично упорядоченных полигонов // Материалы всероссийской конференции “Мальцевские чтения” / Институт математики СО РАН, Новосибирск. 2007.

[55] Первухин М.А. Аксиоматизируемость класса регулярных чу-полигонов // Материалы докладов XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов": Математика и механика / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев. [Электронный ресурс] - М.: Издательство МГУ; СП МЫСЛЬ. 2008. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) [Адрес ресурса в сети интернет: http://www.lomonosov-msu.ru/2008/]

[56] Первухин М.А. Неполнота класса регулярных частично упорядоченных полигонов //Российская школа-семинар “Синтаксис и семантика логических систем”. Тезисы докладов. Владивосток: Изд-во Дальнаука. 2008. с. 20.

[57] Первухин М.А. Аксиоматизируемость класса свободных частично упорядоченных полигонов // Материалы Дальневосточной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по теоретической и прикладной математике. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та. 2009. С. 19

[58] Первухин М.А. О регулярных частично упорядоченных полигонах // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9. вып. 4. С. 71-76

[59] Первухин М.А., Степанова А.А. Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов частично упорядоченных полигонов // Алгебра и логика. 2009. Т.48. №1. С. 90-121.

[60] Первухин М.А., Степанова А.А. Аксиоматизируемость класса свободных частично упорядоченных полигонов // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15. №1. С. 99-115. [Адрес ресурса в сети интернет: http://www.math.msu.su/ fpm/rus/k09/k091/k09107h.htm]