

Научная статья  
УДК 517.929  
DOI: <https://doi.org/10.24866/VVSU/2949-1258/2024-2/161-170>  
EDN: <https://elibrary.ru/VPHXYT>

## **Численное решение обратной задачи восстановления тепловых источников**

**Гренкин Глеб Владимирович**

Владивостокский государственный университет  
Владивосток. Россия

***Аннотация.** Рассматривается обратная задача нахождения неизвестных интенсивностей пространственно распределенных тепловых источников. Пространственное распределение каждого источника считается известным, а в качестве дополнительных данных задается средняя температура каждого источника. Процесс теплообмена считается установившимся, т.е. моделируемые поля не зависят от времени. Установившееся состояние теплового процесса моделируется системой двух дифференциальных уравнений эллиптического типа с краевыми условиями третьего рода, описывающей радиационно-кондуктивный теплообмен в ограниченной области пространства. Кондуктивный теплообмен подчиняется уравнению теплопроводности; для моделирования радиационного теплообмена используется диффузионное приближение уравнения переноса излучения. Предлагается итерационный метод, вычисляющий последовательные приближения для количества тепловой и радиационной энергии в источниках. Метод строит последовательность решений обратных задач для линейного уравнения теплопроводности. Сходимость алгоритма будет достигнута при выполнении следующего свойства: с ростом суммы тепловой и радиационной энергии во всех источниках прирост тепловой энергии в каждом источнике не превзойдет прироста общей энергии. Несмотря на то, что единственность решения обратной задачи в общем случае не доказана, вычислительные эксперименты не позволяют выявить случаи неединственности решения. Практическая значимость метода состоит в возможности реализации постепенного нагрева источников тепла до достижения заданных значений средней температуры в каждом из них так, чтобы в ходе нагревания источники не перегревались. С теоретической точки зрения предложенный алгоритм может являться отправной точкой для анализа единственности решения обратной задачи.*

***Ключевые слова:** радиационный теплообмен, диффузионное приближение, обратная задача, интегральное переопределение.*

***Для цитирования:** Гренкин Г.В. Численное решение обратной задачи восстановления тепловых источников // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета. 2024 Т. 16, № 2. С. 161–170. DOI: <https://doi.org/10.24866/VVSU/2949-1258/2024-2/161-170>. EDN: <https://elibrary.ru/VPHXYT>*

## Physical and mathematical sciences

Original article

**Numerical solution of an inverse problem of heat sources reconstruction****Gleb V. Grenkin**

Vladivostok State University

Vladivostok, Russia

**Abstract.** *The inverse problem of reconstruction of unknown intensities of spatially distributed heat sources is considered. The spatial distribution of each source is known, and the average temperature of each source is prescribed as additional data. The heat transfer process is considered to be stationary, that is, the simulated fields are independent of time. The steady state of the thermal process is modeled by a system of two elliptic differential equations with boundary conditions of the third kind, describing radiative-conductive heat transfer in a bounded domain. Conductive heat transfer obeys the equation of thermal conductivity, and the diffusion approximation of the radiation transfer equation is used to simulate radiative heat transfer. An iterative method is proposed that calculates successive approximations for the amount of thermal and radiative energy at the sources. The method constructs a sequence of inverse problems solutions for the linear equation of thermal conductivity. The convergence of the algorithm will be achieved by fulfilling the following property: with an increase in the sum of thermal and radiation energy at all sources, the increase in thermal energy at each source will not exceed the increase in total energy. Though the solution of the inverse problem has not been proven as a unique one, computational experiments do not allow us to identify cases of non-uniqueness of the solution. The practical significance of the method lies in the possibility to implement gradual heating of heat sources up to the prescribed average temperature values without overheating them. Theoretically, the proposed algorithm can serve as a starting point for analyzing the uniqueness of the inverse problem solution.*

**Keywords:** *radiative heat transfer, diffusion approximation, inverse problem, integral overdetermination.*

**For citation:** *Grenkin G.V. Numerical solution of an inverse problem of heat sources reconstruction // The Territory of New Opportunities. The Herald of Vladivostok State University. 2024. Vol. 16, № 2. P. 161–170. DOI: <https://doi.org/10.24866/VVSU/2949-1258/2024-2/161-170>. EDN: <https://elibrary.ru/VPHXYT>*

**Введение**

При расчете процесса сложного теплообмена, который состоит из нескольких режимов переноса тепла (например, теплопроводности и теплового излучения), может быть неизвестен ряд величин, определяющих этот процесс и входящих в уравнения теплообмена как коэффициенты. Тогда, имея дополнительную информацию о полях теплообмена, которые поддаются измерению либо оценке, приходят к обратным задачам восстановления неизвестных параметров.

В статье исследуется обратная задача идентификации интенсивностей источников тепла в стационарной диффузионной модели сложного теплообмена по дополнительной информации о температурном поле в области каждого источника. Другими словами, если известно, насколько нагрелся каждый источник, то необходимо определить, сколько всего энергии он выделил, учитывая пространственное распределение тепловой энергии и переход тепла в излучение. Знание интенсивностей источников, в свою очередь, нужно для расчета теплообмена во всей области.

В работе [1] изучена задача восстановления неизвестного источника в дифференциальном уравнении эллиптического типа. Поскольку такая задача является некорректной, для ее решения применен метод регуляризации. В статье [2]

для решения аналогичной задачи применен алгоритм, основанный на приближении системы эллиптических уравнений нейросетевой моделью. Отметим также работу [3], посвященную идентификации точечных источников в уравнении параболического типа.

Для стационарной диффузионной модели сложного теплообмена задача восстановления интенсивностей источников поставлена в исследовании [4], где установлено, что эта задача имеет, по крайней мере, одно решение, хотя единственность решения доказана лишь при условиях на коэффициенты уравнений. В этой постановке источники тепла известны с точностью до постоянных коэффициентов. Для нахождения данных коэффициентов задается дополнительное условие – интегральное переопределение, т.е. средние значения температуры в областях источников. Проблема здесь, по сравнению с аналогичной задачей для нестационарных уравнений [5], состоит в установлении единственности решения. В статье [6] для решения указанной проблемы предложен подход, в котором рассматривается суммарная энергия, состоящая из тепловой энергии и энергии излучения. Этот подход позволяет построить алгоритм, решающий на каждой итерации линейную обратную задачу. Отметим также работу [7], посвященную аналогичной задаче сопряжения для модели сложного теплообмена в многокомпонентной среде.

Целью настоящей работы является численное решение обратной задачи восстановления тепловых источников по данным средней температуры в каждом из них. Предложен итерационный метод, обеспечивающий последовательное нагревание области теплообмена за счет роста общей (тепловой и радиационной) энергии, сосредоточенной в источниках. Для обеспечения монотонной сходимости данного метода потребуется то, чтобы при всяком малом изменении интенсивностей источников, при котором во всех источниках общая энергия возрастает, радиационная энергия в каждом источнике также росла. Выполнение этого свойства гарантирует, что с ростом общей энергии в источниках рост тепловой энергии не превзойдет роста общей энергии. В таком случае можно постепенно увеличивать общую энергию в каждом источнике на величину разности между целевой и текущей тепловой энергией в источниках, и всякий раз эта разность будет положительной. Проверяя, что указанное свойство сохраняется в каждом очередном приближении, получим оценку области между начальным и конечным приближениями, которая предположительно не содержит решения обратной задачи.

С практической точки зрения, если рассматривать данный процесс как систему управления теплообменом в реальном времени, задача сводится к анализу возможности обеспечения стабильного управления. Это означает, что не будет достигнут перегрев источников. При этом для управления нелинейной системой воздействие линейной системы управления многократно повторяется.

Отметим также, что система уравнений сложного теплообмена относится к классу реакционно-диффузионных систем, моделирующих пространственное распределение двух взаимодействующих субстанций. Поэтому результаты исследования этой системы могут быть необходимы при решении обратных задач для моделей распространения кислорода в тканях мозга [8–10], модели

функционирования печени [11], а также для оптимизации медицинской процедуры лазерной абляции [12].

**Основная часть**

*Обратная задача*

Радиационно-кондуктивный теплообмен в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma$  описывается в диффузионном приближении следующей системой дифференциальных уравнений:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = \sum_{i=1}^m q_i f_i, \tag{1}$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = 0 \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3}$$

Здесь  $\theta = \theta(x)$  – установившееся поле нормализованной температуры;  $\varphi = \varphi(x)$  – поле нормализованной интенсивности излучения, усредненной по всем направлениям. Положительные постоянные параметры  $a, b, \alpha, \kappa_a$  характеризуют радиационно-термические свойства среды, граничные функции  $\beta = \beta(x), \gamma = \gamma(x)$  – отражающие свойства границы. Через  $\partial/\partial n$  обозначена производная в направлении внешней нормали.

Интенсивности источников тепла  $q_i$  неизвестны, и для их нахождения задаются средние значения температуры  $r_j$  в области, занимаемой каждым источником:

$$\int_{\Omega} f_j(x)\theta(x)dx = r_j, \quad j = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Здесь  $f_j \geq 0$  – заданные функции, выражающие объемные плотности пространственно распределенных источников.

Обратная задача идентификации источников состоит в нахождении коэффициентов  $q_1, \dots, q_m$ , при которых соответствующее решение задачи (1) – (3) удовлетворяет условию (4).

*Численный метод решения обратной задачи*

Представим краевые условия (3) в виде

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \tilde{\beta}\theta = \beta\theta_b - (\beta - \tilde{\beta})\theta, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \tilde{\gamma}\varphi = \gamma\theta_b^4 - (\gamma - \tilde{\gamma})\varphi,$$

где функции  $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$  выбираются так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\frac{\tilde{\beta}}{a} = \frac{\tilde{\gamma}}{\alpha}, \quad \beta \geq \tilde{\beta}, \quad \gamma \geq \tilde{\gamma}.$$

Введем величину, выражающую количество энергии:  $u = a\theta + b\alpha\varphi$ , которая подчиняется уравнению

$$-\Delta u = \sum_{i=1}^m q_i f_i$$

и краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\tilde{\beta}}{a}u = \beta\theta_b + b\gamma\theta_b^4 - (\beta - \tilde{\beta})\theta - b(\gamma - \tilde{\gamma})\varphi.$$

Алгоритм решения обратной задачи (1) – (4) будет заключаться в последовательном увеличении энергии, сосредоточенной в каждом источнике. В частном случае пропорциональных эллиптических операторов можно утверждать, что монотонная сходимость алгоритма будет обеспечена следующим свойством: с увеличением приближений для общей энергии во всех источниках количество радиационной энергии в каждом источнике также увеличивается. Доказательство этого свойства является открытым вопросом, хотя вычислительные эксперименты его подтверждают. В общем случае, когда эллиптические операторы не пропорциональны, решение обратной задачи сводится к последовательным приближениям, в ходе которых решается серия обратных задач для уравнений теплообмена с дополнительным граничным источником.

Итак, в данном методе выделяются пропорциональные части эллиптических операторов. Слагаемые в краевых условиях переносятся в правую часть и находятся последовательными приближениями.

Ниже через  $p_j$  обозначим приближение величины энергии в  $j$ -м источнике. Вначале полагается, что эта величина включает в себя только тепловую энергию, которая нам известна из условия (4), а дополнительные слагаемые в краевых условиях равны нулю. Далее на каждой итерации находим очередное приближение для интенсивностей источников  $q_i$ , соответствующее текущему приближению для энергии, сосредоточенной в источниках. Для найденных интенсивностей решается прямая задача с пропорциональными операторами, и затем величины  $p_j$  обновляются.

Сформулируем алгоритм решения обратной задачи ( $k$  – номер итерации):

Полагаем  $p_j^{(1)} = ar_j, j = 1, \dots, m, \theta^{(0)} = \varphi^{(0)} = 0$ .

Решаем вспомогательную обратную задачу

$$-\Delta u = \sum_{i=1}^m q_i f_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\tilde{\beta}}{a}u = \beta\theta_b + b\gamma\theta_b^4 - (\beta - \tilde{\beta})\theta^{(k-1)} - b(\gamma - \tilde{\gamma})\varphi^{(k-1)},$$

$$\int_{\Omega} f_j(x)u(x)dx = p_j^{(k)}, j = 1, \dots, m$$

находим коэффициенты  $q_i = q_i^{(k)}$ .

Находим  $\theta = \theta^{(k)}, \varphi = \varphi^{(k)}$ , где  $\theta, \varphi$  – решение уравнений (1), (2) с краевыми условиями

$$a\frac{\partial \theta}{\partial n} + \tilde{\beta}\theta = \beta\theta_b - (\beta - \tilde{\beta})\theta^{(k-1)}, \quad \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \tilde{\gamma}\varphi = \gamma\theta_b^4 - (\gamma - \tilde{\gamma})\varphi^{(k-1)}$$

при  $q_i = q_i^{(k)}$ .

Вычисляем  $p_j^{(k+1)} = p_j^{(k)} + a(r_j - \int_{\Omega} f_j(x)\theta^{(k)}(x)dx)$ .

Переходим к шагу 2, увеличив  $k$  на 1.

Условие остановки алгоритма:  $\max_j (p_j^{(k+1)} - p_j^{(k)}) < \varepsilon$ .

*Вычислительный эксперимент*

Проведенные вычислительные эксперименты для двух источников не выявили случая, когда обратная задача имеет более одного решения. В случае неединственности решения стандартный метод Ньютона найдет только одно из них, которое не обязательно окажется наиболее приемлемым. Поэтому нашей целью является построение метода, который найдет решение обратной задачи, обеспечивающее минимум тепловой и радиационной энергии в каждом источнике.

Проведем анализ сходимости алгоритма, опираясь на результат вычислительного эксперимента. В качестве модели используем уравнения в одномерной области (слое) толщиной  $L = 50$ . Коэффициенты примерно соответствуют физическим параметрам воздуха:  $a = 0,92$ ,  $b = 18,7$ ,  $\kappa_a = 0,01$ ,  $\alpha = 3,3$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 0,3$ ,  $\theta_b = 0,4$ . Определим два источника по формулам  $f_1(x) = f_{10,20}(x)$ ,  $f_2(x) = f_{30,40}(x)$ , где  $f_{l,r}(x) = 0,5(1 + \cos(2\pi(x - (l+r)/2)/(r-l)))$  при  $x \in [l, r]$  и  $f_{l,r}(x) = 0$ . Вычисления реализованы в пакете Octave методом конечных разностей.

На рисунке 1 представлены линии уровня функций  $R_1(q_1, q_2)$  (сплошными линиями) и  $R_2(q_1, q_2)$  (пунктирными линиями),  $R_j(q_1, q_2) = \int_{\Omega} f_j \theta[q_1, q_2] dx$ . Таким образом, задача состоит в нахождении точки пересечения двух заданных линий уровня: одной сплошной и одной пунктирной.

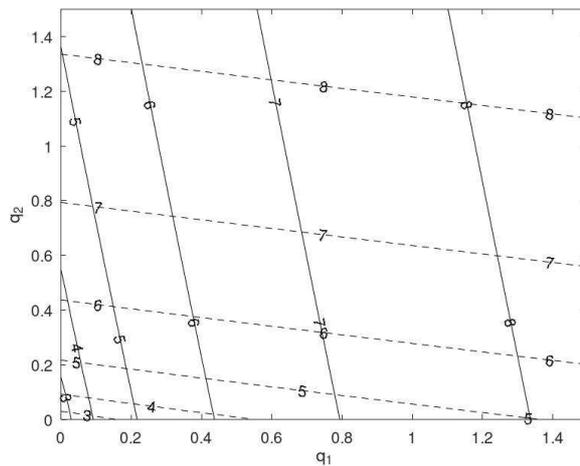


Рис. 1. Линии уровня функций  $R_j(q_1, q_2)$

Зададим значения средней температуры источников:  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = 3$ . Решение, найденное с помощью встроенного в Octave решателя fsolve, найдено за 6 итераций:  $q_1 = 0,09$ ,  $q_2 = 0,01$ .

Алгоритм, который решает на каждой итерации вспомогательную линейную обратную задачу, пришел к тому же ответу за 100 итераций. Для ускорения алгоритма можно ввести на 4-м шаге ускоряющий множитель и подбирать его

так, чтобы соблюдалась ограниченность последовательности приближений. Тем не менее при таком ускорении может нарушиться монотонность алгоритма по отношению к общей энергии в источниках  $p_j$ .

Сформулируем условие применимости алгоритма: при переходе к следующему приближению для интенсивностей источников рост тепловой энергии в источниках должен идти медленнее, чем рост общей энергии. В этом случае количество радиационной энергии, которое предсказывает алгоритм, не будет завышено. Тогда средняя температура в каждом источнике будет не больше заданной  $r_j$ .

Графики зависимости количества тепловой энергии (см. рис. 1) и общей энергии от интенсивностей источников подтверждают это допущение. Расстояние между линиями уровня функции  $aR_j$  превосходит расстояние между линиями уровня общей энергии, сосредоточенной в  $j$ -м источнике, а угол между линиями уровня тепловой энергии лежит внутри угла между линиями уровня общей энергии. Это значит, что с ростом общей энергии тепловая энергия растет слабее, и потому на 4-м шаге алгоритма сохранится монотонность и ограниченность последовательностей приближений  $p_j$ .

#### Обсуждение

Проанализируем вопрос сходимости предложенного алгоритма в случае пропорциональных операторов (т.е.  $\beta/a = \gamma/\alpha$ ) и двух источников. Сходимость будет вытекать из неравенства  $\int_{\Omega} f_j(x)\theta^{(k)}(x)dx \leq r_j$ , если оно верно на любом  $k$ -м шаге алгоритма. Это будет выполнено, когда уравнения сложного теплообмена подчиняются следующему свойству: при увеличении общей энергии во всех источниках количество радиационной энергии во всех источниках увеличивается.

Допустим, что в первом источнике общая энергия увеличилась, но радиационная энергия уменьшилась, и потому тепловой энергии в первом источнике стало на следующем шаге алгоритма больше, чем предсказал алгоритм. Если мы докажем, что при этом общая энергия во втором источнике обязана уменьшиться, то сходимость алгоритма будет обоснована.

Достаточным условием для обеспечения указанного свойства является положительная ориентация векторов градиента радиационной энергии в первом источнике и градиента общей энергии во втором источнике, где независимыми переменными являются интенсивности источников.

Определим в пространстве Соболева  $V = H^1(\Omega)$  линейный оператор  $Q: V' \rightarrow V$ , который при заданном поле  $\theta$  ставит в соответствие функции  $g$  компоненту  $z$  решения линеаризованной системы:

$$\begin{aligned} aAu + b\kappa_a(4|\theta|^3 u - z) &= g, \\ \alpha Az + \kappa_a(z - 4|\theta|^3 u) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь оператор  $A: V \rightarrow V'$  определяется формулой  $(Au, v) = (\nabla u, \nabla v) + \int_{\Gamma} \frac{\beta}{a} uv d\Gamma$ .

Рассмотрим функции  $R_j(q) = (f_j, \theta[q])$ ,  $D_j(q) = (f_j, \phi[q])$ ,  $S_j(q) = aR_j(q) + b\alpha D_j(q)$ .

Отметим, что  $\frac{\partial D_j}{\partial q_i} = (f_j, Qf_i)$ ,  $\frac{\partial S_j}{\partial q_i} = (f_j, A^{-1}f_i)$ .

Без ограничения общности можно считать, что  $(f_1, A^{-1}f_1) = (f_2, A^{-1}f_2) = 1$ . Определим функцию  $\tilde{f}_1 = f_1 - cf_2$ , где  $c = \frac{(f_1, A^{-1}f_2)}{(f_2, A^{-1}f_2)}$ , так что  $(f_2, A^{-1}\tilde{f}_1) = 0$ . Поскольку

$\begin{vmatrix} (f_1, Qf_1) & (f_1, Qf_2) \\ (f_2, A^{-1}f_1) & (f_2, A^{-1}f_2) \end{vmatrix} = (f_1, Q\tilde{f}_1) \cdot (f_2, A^{-1}f_2)$ , то из условия  $(f_1, Q\tilde{f}_1) > 0$  вытекает положительная ориентированность векторов  $\nabla D_1$  и  $\nabla S_2$ . Сформулируем это условие в следующем виде:

*Условие 1.*  $(f_1, Qf_1) > c(f_1, Qf_2)$ .

*Замечание 1.* Заметим, что в частном случае при  $c = 0$  данное неравенство выполняется, при  $c = 1$  оно переходит в равенство.

*Замечание 2.* Анализ задачи на условный экстремум для функции  $J(f_1, f_2) = (f_1, Qf_1) - (f_1, A^{-1}f_2)(f_1, Qf_2)$  с ограничениями  $(f_1, A^{-1}f_1) = 1$ ,  $(f_2, A^{-1}f_2) = 1$ ,  $(f_1, A^{-1}f_2) = c$  с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа приводит к решению

$$c = \frac{(f_2, Qf_1) + (f_1, Qf_2)}{(f_1, Qf_1) + (f_2, Qf_2)}.$$

*Следствие.* Условие 1 сводится к неравенству

$$(f_1, Qf_1)^2 + (f_1, Qf_1)(f_2, Qf_2) > (f_1, Qf_2)(f_2, Qf_1) + (f_1, Qf_2)^2.$$

Таким образом, помимо условия единственности решения обратной задачи, выражающего соотношение между коэффициентами уравнений [4], получено условие для плотностей источников, обеспечивающее сходимость алгоритма восстановления интенсивностей этих источников.

Физический смысл условия 1 состоит в том, что при малом нагревании второго источника и охлаждении первого источника в такой пропорции, что количество общей энергии, сосредоточенной в первом источнике, остается прежним, первый источник будет охлаждаться: количество тепла, сосредоточенное в этом источнике, станет меньше. Иначе говоря, при такой пропорции приращений интенсивностей источников второй источник не препятствует охлаждению первого. В этом случае, если линейная модель предсказывает охлаждение в среднем одного из источников при их совместном нагревании-охлаждении, то и модель сложного теплообмена не нарушит это свойство и даже усилит его за счет перехода части энергии в тепловое излучение.

Стоит отметить способ корректировки алгоритма, состоящий в модификации метода Ньютона при расщеплении матрицы линейной системы в виде разности двух положительно определенных матриц при решении системы уравнений относительно коэффициентов обратной задачи, а именно: к основному шагу («предиктору»), описанному выше, предлагается добавить вспомогательный шаг («корректор»), который получается при линеаризации реакционных слагаемых. Для пропорциональных операторов вспомогательный шаг сводится к повторению основного шага с коррекцией:

$$p_j^{(k+1)} = p_j^{(k)} + a(r_j - R_j(q^{(k)})) + b\alpha \sum_{i=1}^m (f_j, z_i) (\hat{q}_i^{(k+1)} - q_i^{(k)}),$$

где  $z_i$  – компонента решения линейризованной системы с правой частью;  $f_i$ ,  $\hat{q}_i^{(k+1)}$  – коэффициенты, найденные на шаге «предиктора».

### Заключение

Полученные результаты расширяют круг методов, которые могут использоваться для решения обратных задач восстановления интенсивностей тепловых источников по данным температуры источников с учетом теплообмена излучением. Поскольку нам неизвестно, является ли решение обратной задачи единственным, то мы не можем гарантировать сходимость стандартных методов решения нелинейных алгебраических систем применительно к данной задаче. При выполнении вышеупомянутых свойств можно добиться монотонности последовательностей приближений общей энергии, сосредоточенной в источниках, пределами которых являются значения общей энергии на решении обратной задачи. В связи с этим представляет интерес теоретический анализ построенного итерационного метода, что является актуальным не только для численного решения обратной задачи, но и для теоретического анализа ее свойств, в частности единственности решения.

### Список источников

1. Srati M., Oulmelk A., Afraites L. Optimization method for estimating the inverse source term in elliptic equation // The International Conference on New Trends in Applied Mathematics. 2022. P. 51–75.
2. Zhang H., Liu J. On the recovery of internal source for an elliptic system by neural network approximation // J. Inverse Ill Posed Probl. 2023. Vol. 31, № 5. P. 739–761.
3. Pyatkov S.G. On inverse problems with pointwise overdetermination for mathematical models of heat and mass transfer // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2022. Т. 15, № 3. С. 34–50.
4. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange / A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk [et al.] // J. Math. Anal. Appl. 2018. Vol. 460, № 2. P. 737–744.
5. Chebotarev A.Yu., Pinnau R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. Vol. 472, № 1. P. 314–327.
6. Гренкин Г.В. Единственность решения обратной задачи для модели сложного теплообмена // Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21, № 1. С. 98–104.
7. Чеботарев А.Ю. Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, № 2. С. 303–311.
8. An inverse problem for equations of cerebral oxygen transport / A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, V. Turova [et al.] // Appl. Math. Comput. 2021. Vol. 402. P. 126154.
9. Inverse problem for a linearized model of oxygen transport in brain / A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, V. Turova [et al.] // 2020 Days on Diffraction (DD). 2020. P. 44–49.
10. Non-stationary model of cerebral oxygen transport with unknown sources / A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, V. Turova [et al.] // Mathematics. 2021. Vol. 9, № 8. P. 910.

11. Mathematical model of blood and interstitial flow and lymph production in the liver / J.H. Siggers, K. Leungchavaphongse, C.H. Ho, R. Repetto // *Biomechanics and modeling in mechanobiology*. 2013. Vol. 13, № 2. P. 363–378.
12. Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation / A.Yu. Chebotarev, N.M. Park, P.R. Mesenev, A.E. Kovtanyuk // *Journal of Physics: Conference Series*. 2023. Vol. 2514, № 1. P. 012006.

### References

1. Srati M., Oulmelk A., Afraites L. Optimization method for estimating the inverse source term in elliptic equation. *The International Conference on New Trends in Applied Mathematics*. 2022: 51–75.
2. Zhang H., Liu J. On the recovery of internal source for an elliptic system by neural network approximation. *J. Inverse Ill Posed Probl.* 2023; 31 (5): 739–761.
3. Pyatkov S.G. On inverse problems with pointwise overdetermination for mathematical models of heat and mass transfer. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2022; 15 (3): 34–50.
4. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange / A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk [et al.]. *J. Math. Anal. Appl.* 2018; 460 (2): 737–744.
5. Chebotarev A.Yu., Pinnau R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer. *J. Math. Anal. Appl.* 2019; 472 (1): 314–327.
6. Grenkin G.V. Uniqueness of solution of an inverse problem for a complex heat transfer model. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2024; 21 (1): 98–104.
7. Chebotarev A.Yu. Inverse problem for equations of complex heat transfer with Fresnel matching conditions. *Comp. Math. Math. Phys.* 2021; 61 (2): 288–296.
8. An inverse problem for equations of cerebral oxygen transport / A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, V. Turova [et al.]. *Appl. Math. Comput.* 2021; (402): 126154.
9. Inverse problem for a linearized model of oxygen transport in brain / A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, V. Turova [et al.]. *2020 Days on Diffraction (DD)*. 2020: 44–49.
10. Non-stationary model of cerebral oxygen transport with unknown sources / A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, V. Turova [et al.]. *Mathematics*. 2021; 9 (8): 910.
11. Mathematical model of blood and interstitial flow and lymph production in the liver / J.H. Siggers, K. Leungchavaphongse, C.H. Ho, R. Repetto. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*. 2013; 13 (2): 363–378.
12. Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation / A.Yu. Chebotarev, N.M. Park, P.R. Mesenev, A.E. Kovtanyuk. *Journal of Physics: Conference Series*. 2023; 2514 (1): 012006.

### Информация об авторе:

**Гренкин Глеб Владимирович**, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математики и моделирования, ФГБОУ ВО «ВВГУ», г. Владивосток, [Gleb.Grenkin@vvsu.ru](mailto:Gleb.Grenkin@vvsu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-1307-3757>

DOI: <https://doi.org/10.24866/VVSU/2949-1258/2024-2/161-170>

EDN: <https://elibrary.ru/VPHXYT>

Дата поступления:  
09.01.2024

Одобрена после рецензирования:  
10.02.2024

Принята к публикации:  
05.04.2024