$$\mathcal{P}_\nu f(r) = \frac{-\sqrt{\pi} r^{-\nu-1/2}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)} \int_r^\infty P^{\mathrm{o}}_{\nu-1/2}\left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{df(\rho)}{d\rho} d\rho,$$

а обратный к нему на соответствующих пространствах оператор преобразования S_ν определяется например, по формуле

$$S_\nu f(r) = \frac{-2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dr} \int_r^\infty P^{\mathrm{o}}_{\nu-1/2}\left(\frac{r}{\rho}\right) f(\rho)\rho^{\nu+1/2} d\rho,$$

где $P^{\mathrm{o}}_{\nu-1/2}$ – функция Лежандра первого рода.

Введем множество $T^\infty_\Pi(\Omega)$ функций f из $C^\infty_\Pi(\overline{\Omega} \setminus O)$, для которых справедливо разложение $f = f(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{2} f_{kl}(r) Y^l_k(\varphi)$, где коэффициенты Фурье $f_{kl}(r) = \int_0^\Phi f(r,\varphi) Y^l_k(\varphi) d\varphi$, при этом предполагается, что натуральное число K свое для каждой функции f и что функции $r^{-\lambda_k}\chi_R(r) f_{kl}(r)$ принадлежат линеалу $\overset{\mathrm{o}}{C}{}^\infty_\nu(0,2R_{\mathrm{o}})$. Здесь $Y^1_k = \sqrt{2/\Phi}\sin(\lambda_k\varphi)$ и $Y^2_k = \sqrt{2/\Phi}\cos(\lambda_k\varphi)$, где $\lambda_k = 2\pi k/\Phi$ при $k>0$ и $Y^1_0 = 1/\sqrt{\Phi}$.

На $T^\infty_\Pi(\Omega)$ определим при фиксированном целом $s \ge 0$ и всех $R \in (0, R_{\mathrm{o}})$, систему норм

$$\|f\|^2_{s,R} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} \left\| r^{-\lambda_k}\chi_R f_{kl} \right\|^2_{\overset{\mathrm{o}}{H}{}^s_\nu(0,2R)} + \left\| (1-\chi_R) f \right\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta(\Omega)}}. \tag{7}$$

Пространство $\overset{\mathrm{o}}{H}{}^s_\nu(0,R)$ для целых $s \ge 0$ определяется как обобщенное замыкание множества $\overset{\mathrm{o}}{C}{}^\infty_\nu(0,R)$ по норме

$$\|f\|_{\overset{\mathrm{o}}{H}{}^s_\nu(0,R)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)} \left\| D^s(S_\nu f) \right\|_{L_2(0,R)}, \tag{8}$$

где $L_2(0,R)$ – лебегово пространство, $D^s = \partial^s / \partial r^s$.

Справедливо вложение $T^\infty_\Pi(\Omega) \subset H^s_{loc}(\Omega)$, и для любой функции f из $T^\infty_\Pi(\Omega)$ имеет место оценка $\|f\|_{s,R} \ge p_{s,R}(f)$. Таким образом, это вложение будет и непрерывным.

Для функций $f \in T^\infty_\Pi(\Omega)$ определим σ-след в точке O как предел

$$\sigma f|_O = \lim_{r\to 0} \sigma f(r,\varphi), \tag{9}$$

понимаемый в классическом поточечном смысле. Здесь

$$\sigma f(r,\varphi) = \frac{f_{\mathrm{o}}(r)}{\ln r} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} r^{\lambda_k} f_{kl}(r) Y^l_k(\varphi).$$

Отметим, что σ представляет собой интегральный оператор, действующий по угловым переменным, а сам σ-след в точке O можно представить в связи с этим в виде

$$\sigma f|_O = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\Phi} \int_0^\Phi f(r,\varphi') \left(\frac{2r^{2\pi/\Phi}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi}(\varphi-\varphi')\right) - 2r^{4\pi/\Phi}}{1 - 2r^{2\pi/\Phi}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi}(\varphi-\varphi')\right) + r^{4\pi/\Phi}} + \frac{1}{\ln r} \right) d\varphi'.$$

Таким образом, σ-след по угловым переменным является нелокальным объектом.

Основное функциональное пространство $M^s_\Pi(\Omega)$ определим как обобщенное замыкание в H^s_{loc} пространства $T^\infty_\Pi(\Omega)$ по топологии, определяемой системой норм (7) по $0 < R < R_{\mathrm{o}}$. Эта