ALEX_SHE

УДК 517.95

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ*)

Г. В. Алексеев, М. А. Шепелов

Исследуются коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарного уравнения конвекции-диффузии, рассматриваемого в ограниченной области при смешанных краевых условиях на границе области. Роль управлений играют вектор скорости движения среды и функции, входящие в граничные условия для температуры. Доказывается разрешимость экстремальных задач как для произвольного слабо полунепрерывного снизу функционала качества, так и для конкретных функционалов качества. На основе анализа системы оптимальности устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость оптимальных решений относительно малых возмущений. как функционала качества, так и одной из функций, входящих в исходную краевую задачу.

Ключевые слова: уравнение конвекции-диффузии, температура, вектор скорости, мультипликативное управление, коэффициентные обратные задачи, существование, единственность, устойчивость.

Известно, что с помощью оптимизационного метода изучение обратных задач можно свести к исследованию соответствующих экстремальных задач при определенном выборе минимизируемого функционала качества. На этом пути возникают обратные экстремальные задачи, для исследования которых можно применять разработанные методы условной минимизации. Описание данного подхода для моделей тепломассопереноса дано в [1–3] и ряде других работ (например, [4–16]. Отметим среди них статьи [4–9], посвященные исследованию обратных экстремальных задач для линейных моделей и исследованию обратных экстремальных задач для нелинейных стационарных моделей тепломассопереноса [10–16]. В [17, 18] близкий подход применяется при изучении обратных задач динамики атмосферы и океана; в [19, 20] аналогичный подход применяется при исследовании обратных задач для моделей тепловой конвекции сильно вязких жидкостей применительно к проблеме изучения тепловых процессов в мантии Земли.

Основной целью работы является анализ единственности и устойчивости решений обратных экстремальных задач для линейной модели теплопереноса в виде стационарного уравнения конвекции-диффузии, рассматриваемого в ограниченной области Ω пространства при смешанных граничных условиях на границе Γ. В работе доказывается разрешимость рассматриваемой обратной экстремальной задачи и выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума. Далее, на основе ее анализа устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений конкретных экстремальных задач.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00219-а, 11-01-98508-р-восток-а), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 12-III-А-01М-002, 12-II-СУ-03-001б 12-I-П17-03).

1. Постановка исходной краевой задачи. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N. Рассмотрим в Ω задачу нахождения температуры T жидкой среды, занимающей область Ω, из соотношений

$$\lambda \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \text{ в } \Omega, \tag{1.1}$$

$$T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T \right) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \tag{1.2}$$

Здесь $\lambda = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент температуропроводности, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x})$ — вектор скорости, $f(\mathbf{x})$ — плотность объемных источников, $\psi(\mathbf{x})$, $\alpha(\mathbf{x})$ и $\chi(\mathbf{x})$ — заданные на участках Γ_D и Γ_N функции.

При анализе краевой и экстремальной задач будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо границу Γ или участок Γ_0 границы Γ с положительной мерой. Через $\|\cdot\|_s$, $|\cdot|_s$ и $(\cdot,\cdot)_s$ соответственно обозначим норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(\Omega)$. Через $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{1,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $(\cdot,\cdot)_{1,Q}$ — нормы и скалярные произведения соответственно в пространствах $L^2(Q)$ и $H^1(Q)$. При $Q = \Omega$ индекс Ω будем опускать, полагая $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{1,\Omega} = \|\cdot\|_1$. Положим $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} = \|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}$, $\|\chi\|_{\Gamma_N} = \|\chi\|_{L^2(\Gamma_N)}$. Отношение двойственности между пространством X и двойственным к нему X^* обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ либо просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Положим $H^1_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0\}$, $Z = \big\{\mathbf{u} \in H^1_{\mathrm{div}}(\Omega) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} \geq 0\big\}$, $L^2_+(\Gamma_N) = \{\alpha \in L^2(\Gamma_N) : \alpha \geq 0\}$. Предположим, что выполняются условия:

(i) $\Gamma \in C^{0,1}$, $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{D}_N$, Γ_D — множество положительной меры, $\alpha \in L^2_+(\Gamma_N)$; (ii) $f \in L^2(\Omega)$; (iii) $\mathbf{u} \in Z$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$.

Хорошо известно, что при выполнении первого условия в (i) существует непрерывный сюръективный оператор следа $\gamma|_{\Gamma_D} : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_D)$ на участок Γ_D границы Γ. Обозначим через $(\gamma|_{\Gamma_D})^{-1}_r : H^{1/2}(\Gamma_D) \to H^1(\Omega)$ непрерывный правый обратный оператор к $\gamma|_{\Gamma_D}$, с которым выполняется соотношение $\gamma|_{\Gamma_D} \circ (\gamma|_{\Gamma_D})^{-1}_r \psi = \psi$ для всех $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$. В силу теоремы о следах выполняется неравенство $\big\|(\gamma|_{\Gamma_D})^{-1}_r \psi\big\|_1 \leq C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$ для всех $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, где константа C_Γ зависит от Γ, но не зависит от ψ.

Введем основное для дальнейшего анализа пространство $\mathcal{T} = \{\theta \in H^1(\Omega) : \gamma|_{\Gamma_D}\theta = 0\}$. Известно, что $\mathcal{T}$ — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_\mathcal{T} = \|\cdot\|_1$, эквивалентной полунорме $|\cdot|_1$ в силу неравенства Фридрикса — Пуанкаре $|\theta|_1^2 \geq \delta_1 \|\theta\|_1^2$ для $\theta \in \mathcal{T}$, $\delta_1 = \mathrm{const} > 0$. Через $\mathcal{T}^*$ обозначим пространство, двойственное к $\mathcal{T}$ относительно пространства $L^2(\Omega)$. Будем использовать следующие формулы Грина:

$$(\Delta T, \theta) = -(\nabla T, \nabla \theta) + \left\langle \frac{\partial T}{\partial n}, \theta \right\rangle_\Gamma, \quad T \in H^1(\Delta, \Omega), \quad \theta \in H^1(\Omega), \tag{1.3}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta) = -(\mathbf{u}\cdot\nabla\theta, T) + (u_n T, \theta)_\Gamma,\ u_n \equiv \mathbf{u}\cdot\mathbf{n},\ \mathbf{u} \in H^1_{\mathrm{div}}(\Omega),\ T, \theta \in H^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Здесь и ниже $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ обозначает отношение двойственности между $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H^1(\Delta, \Omega) = \{T \in H^1(\Omega),\ \Delta T \in L^2(\Omega)\}$ (см., [3, с. 128]). Введем билинейные формы $\tilde{a}_\mathbf{u}, a_\mathbf{u} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ с помощью формул

$$a_\mathbf{u}(T, \theta) = \lambda(\nabla T, \nabla\theta) + \lambda(\alpha T, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta). \tag{1.5}$$

Легко проверить (см. например, [3]), что при выполнении условий в (i), (iii) на α и $\mathbf{u}$ введенные в (2) формы непрерывны, причем справедливы оценки

$$\begin{gathered} |\tilde{a}_\mathbf{u}(T, \theta)| \leq \tilde{\gamma}_1 \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \|T\|_1 \|\theta\|_{L^4(\Omega)} \leq \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|T\|_1 \|\theta\|_1, \\ \mathbf{u} \in H^1(\Omega), \quad (T, \theta) \in H^1(\Omega)^2, \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$|(\chi,\theta)_{\Gamma_N}| \le \|\chi\|_{\Gamma_N}\|\theta\|_{\Gamma_N} \le \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}\|\theta\|_1, \quad \theta\in\mathcal{T}, \tag{1.7}$$

$$|(\alpha T,\theta)_{\Gamma_N}| \le \|\alpha\|_{\Gamma_N}\|T\|_{L^4(\Gamma_N)}\|\theta\|_{L^4(\Gamma_N)} \le \gamma_0\|\alpha\|_{\Gamma_N}\|T\|_1\|\theta\|_1,\ (T,\theta)\in H^1(\Omega)^2, \tag{1.8}$$

$$a_{\mathbf{u}}(T,T) = \lambda(\nabla T,\nabla T)+\lambda(\alpha T,T)_{\Gamma_N}+(u_nT,T)_{\Gamma_N}/2 \ge \lambda_*\|T\|_1^2, \\ \mathbf{u}\in Z, \quad T\in\mathcal{T}, \quad \lambda_*=\delta_1\lambda. \tag{1.9}$$

Здесь $\tilde\gamma_1$, γ_1, γ_2 и γ_0 — константы, зависящие от Ω. Из (1.6)–(1.9) вытекает, что для любой функции $\mathbf{u}\in Z$ форма $a_{\mathbf{u}}(\cdot,\cdot)$ $\mathcal{T}$-коэрцитивна с константой $\lambda_*\equiv\delta_1\lambda$ и непрерывна на $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$, причем для ее нормы $\|a_{\mathbf{u}}\|=\|a_{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega)\times H^1(\Omega),\mathbb{R})}$ справедлива оценка

$$\|a_{\mathbf{u}}\| \le \widetilde{C}_{\mathbf{u}} = (1+\gamma_1\|\mathbf{u}\|_1+\gamma_0\|\alpha\|_{\Gamma_N}). \tag{1.10}$$

Умножим уравнение (1.1) на функцию $\eta\in\mathcal{T}$ и проинтегрируем по Ω. Применяя формулы Грина (1.3), (1.4), получим с учетом условия $\eta=0$ на Γ_D:

$$\lambda(\nabla T,\nabla\eta)-\lambda\left\langle\frac{\partial T}{\partial n},\eta\right\rangle_{\Gamma_N}+(\mathbf{u}\cdot\nabla T,\eta)=(f,\eta), \quad \eta\in\mathcal{T}. \tag{1.11}$$

Используя второе граничное условие в (1.2), перепишем (1.11) вместе с первым граничным условием в (1.2) в виде

$$a_{\mathbf{u}}(T,\eta)\equiv\lambda(\nabla T,\nabla\eta)+\lambda(\alpha T,\eta)_{\Gamma_N}+(\mathbf{u}\cdot\nabla T,\eta) \\ =\langle l,\eta\rangle\equiv(f,\eta)+(\chi,\eta)_{\Gamma_N}, \quad \eta\in\mathcal{T}, \quad T|_{\Gamma_D}=\psi. \tag{1.12}$$

Слабым решением задачи (1.1), (1.2) назовем функцию $T\in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую соотношениям (1.12). Ясно, что $l\in\mathcal{T}^*$, причем с учетом (1.7) выполняется оценка

$$\|l\|_{\mathcal{T}^*}\le\|f\|+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}. \tag{1.13}$$

Рассмотрим случай, когда в (1.12) $\psi=0$. Введем пару сопряженных друг другу операторов $\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\colon\mathcal{T}\to\mathcal{T}^*$ и $\mathcal{A}^*_{\mathbf{u}}\colon\mathcal{T}\to\mathcal{T}^*$ с помощью соотношения

$$\langle\mathcal{A}_{\mathbf{u}}T,\theta\rangle=a_{\mathbf{u}}(T,\theta)=\langle\mathcal{A}^*_{\mathbf{u}}\theta,T\rangle, \quad T\in\mathcal{T},\ \theta\in\mathcal{T}. \tag{1.14}$$

Задача (1.12) при $\psi=0$ эквивалентна решению операторного уравнения

$$\mathcal{A}_{\mathbf{u}}T=l. \tag{1.15}$$

Поскольку в силу (1.9), (1.10) билинейная форма $a_{\mathbf{u}}$ непрерывна и коэрцитивна на $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$ с константой λ_*, а $l\in\mathcal{T}^*$, то в силу теоремы Лакса — Мильграма решение $T\in\mathcal{T}$ (1.15) существует, единственно и для него выполняется оценка

$$\|T\|_1\le C_*\|l\|_{\mathcal{T}^*}, \quad C_*=\lambda_*^{-1}\equiv(\delta_1\lambda)^{-1}. \tag{1.16}$$

Из свойств сопряженных операторов вытекает, что аналогичный результат справедлив для уравнения

$$\mathcal{A}^*_{\mathbf{u}}\theta=f^*, \quad f^*\in\mathcal{T}^*. \tag{1.17}$$

Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть при выполнении условия* (i) $\mathbf{u}\in Z$. *Тогда*:

1) *каждый из операторов* $\mathcal{A}_{\mathbf{u}}$ *и* $\mathcal{A}^*_{\mathbf{u}}\colon\mathcal{T}\to\mathcal{T}^*$, *определенных в* (1.14), *осуществляет изоморфизм пространства* $\mathcal{T}$ *на* $\mathcal{T}^*$, *причем* $\|\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\|=\|\mathcal{A}^*_{\mathbf{u}}\|$;

2) *для любого элемента* $l\in\mathcal{T}^*$ *решение* $T\in\mathcal{T}$ *уравнения* (1.15) *существует, единственно и для него выполняется оценка* (1.16);

3) *для любого элемента* $f^*\in\mathcal{T}^*$ *решение* $\theta\in\mathcal{T}$ *уравнения* (1.17) *существует, единственно и для него выполняется оценка*

$$\|\theta\|_1\le C_*\|f^*\|_{\mathcal{T}^*} \tag{1.18}$$

Пусть теперь $\psi \neq 0$. Используя оператор $(\gamma|_{\Gamma_D})_r^{-1}$, введем функцию $T_0 = (\gamma|_{\Gamma_D})_r^{-1}\psi \in H^1(\Omega)$, с которой справедлива оценка $\|T_0\|_1 \leq C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$. Будем искать решение T задачи (1.12), т. е. слабое решение задачи (1.1), (1.2), в виде $T = T_0 + \widetilde{T}$, где $\widetilde{T} \in \mathcal{T}$ — новая неизвестная функция. Из (1.12) следует, что $\widetilde{T}$ является решением задачи

$$a_{\mathbf{u}}(\widetilde{T}, \eta) = \langle \tilde{l}, \eta \rangle \equiv \langle l, \eta \rangle - a_{\mathbf{u}}(T_0, \eta), \quad \eta \in \mathcal{T}. \tag{1.19}$$

Ясно, что $\tilde{l} \in \mathcal{T}^*$, причем в силу (1.10), (1.13) имеем

$$|\langle \tilde{l}, \eta \rangle| \leq (\|f\| + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} + \widetilde{C}_{\mathbf{u}} C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}) \|\eta\|_1, \quad \eta \in \mathcal{T}. \tag{1.20}$$

Из леммы 1 тогда следует, что решение $\widetilde{T} \in \mathcal{T}$ задачи (1.19) существует, единственно и для него с учетом (1.20) выполняется оценка $\|\widetilde{T}\|_1 \leq C_*(\|f\| + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} + \widetilde{C}_{\mathbf{u}} C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D})$. Отсюда, в свою очередь, следует, что для решения T задачи (1.12) выполняется оценка

$$\|T\|_1 \leq C_{\mathbf{u}}(\|f\| + \|\chi\|_{\Gamma_N} + \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}). \tag{1.21}$$

Здесь $C_{\mathbf{u}}$ — константа, определенная формулой

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{u}} &= C_* \max(1, \gamma_2, (\lambda_* + \widetilde{C}_{\mathbf{u}}) C_\Gamma) \\ &= C_* \max(1, \gamma_2, (\lambda_* + 1 + \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1 + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} + \gamma_0 \|\alpha\|_{\Gamma_N}) C_\Gamma). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть при выполнении условия* (i) $\mathbf{u} \in Z$. *Тогда для любой тройки функций* $(f, \psi, \chi) \in L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_D) \times L^2(\Gamma_N)$ *задача* (1.12) *имеет единственное решение* $T \in H^1(\Omega)$ *и справедлива оценка* (1.21) *с константой* $C_{\mathbf{u}}$, *определенной в* (1.22).

Более информативной, чем теорема 1, является теорема об изоморфизме оператора, отвечающего (1.12). Он представляет собой операторную пару

$$(A_{\mathbf{u}}, \gamma|_{\Gamma_D}) \colon X \to Y, \quad X \equiv H^1(\Omega), \quad Y \equiv \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D), \tag{1.23}$$

где оператор $A_{\mathbf{u}} \colon H^1(\Omega) \to \mathcal{T}^*$ определен соотношением

$$\langle A_{\mathbf{u}} T, \theta \rangle = a_{\mathbf{u}}(T, \theta), \quad T \in H^1(\Omega), \quad \theta \in \mathcal{T}. \tag{1.24}$$

Из билинейности и непрерывности $a_{\mathbf{u}}$ и теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть при выполнении условия* (i) $\mathbf{u} \in Z$. *Тогда оператор* (1.23), *где* $A_{\mathbf{u}}$ *определен в* (1.24), *осуществляет изоморфизм пространства* X *на* Y.

Замечание 1. Ниже мы рассмотрим случай, когда вектор скорости $\mathbf{u}$ изменяется в некотором ограниченном множестве $K_1 \subset Z$. Ясно, что для любой функции $\mathbf{u} \in K_1$, наряду с оценками (1.10) и (1.21), справедливы более грубые оценки вида

$$\begin{gathered} \|a_{\mathbf{u}}\| \leq C_{K_1} = 1 + \gamma_1 \sup_{\mathbf{u} \in K_1} \|\mathbf{u}\|_1 + \gamma_0 \|\alpha\|_{\Gamma_N}, \\ \|T\|_1 \leq C_1(\|f\| + \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \|\chi\|_{\Gamma_N}), \quad C_1 = \sup_{\mathbf{u} \in K_1} C_{\mathbf{u}}, \end{gathered} \tag{1.25}$$

не зависящие от выбора конкретной функции $\mathbf{u} \in K_1$.

2. Постановка и разрешимость обратной экстремальной задачи. Как указано выше, нашей основной целью является исследование единственности и устойчивости решений обратных экстремальных задач для рассматриваемой модели теплопереноса. Эти задачи заключаются в минимизации определенных функционалов качества, зависящих от состояния (температуры T) и неизвестных функций (управлений), удовлетворяющих уравнениям состояния, имеющих вид слабой формулировки (1.12) задачи (1.1), (1.2). В качестве функционала качества мы выберем один из следующих:

$$I_1(T) = \|T - T_d\|_Q^2 = \int\limits_Q |T - T_d|^2\,dx \equiv \int\limits_\Omega r(T - \widetilde{T}_d)^2\,dx,\quad I_2(T) = \|T - T_d\|_{1,Q}^2. \tag{2.1}$$

Здесь $Q \subset \Omega$ — некоторая подобласть области Ω, функция T_d моделирует заданное поле температур в Q, $r = \chi_Q$ — характеристическая функция множества Q, $\widetilde{T}_d \in L^2(\Omega)$ — функция, равная T_d в Q и нулю вне Q.

В качестве управлений выберем функции $\mathbf{u}$, ψ и χ. Функции ψ и χ имеют смысл граничных управлений, тогда как скорость $\mathbf{u}$ играют роль распределенного, причем мультипликативного, управления. Как уже указывалось в [4], посвященной численному исследованию задачи восстановления вектора $\mathbf{u}$ в рамках модели (1.1), (1.2) (при $\Gamma_N = \emptyset$), мультипликативность управления $\mathbf{u}$ существенно усложняет разработку и исследование численнного алгоритма, предназначенного для решения соответствующей экстремальной задачи. Ниже покажем, что наличие мультипликативного управления $\mathbf{u}$ в экстремальной задаче существенно осложняет и исследование устойчивости ее решений.

Пусть $I\colon X \to \mathbb{R}$ — произвольный слабо полунепрерывный снизу функционал. Положим $J(T,u) = (1/2)\big(\mu_0 I(T) + \mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2 + \mu_2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \mu_3\|\chi\|_{\Gamma_N}^2\big)$.

Будем предполагать, что управления $\mathbf{u}$, ψ и χ могут изменяться в некоторых множествах K_1, K_2 и K_3, удовлетворяющих условиям:

(j) $K_1 \subset Z$, $K_2 \subset H^{1/2}(\Gamma_D)$, $K_3 \subset L^2(\Gamma_N)$ — непустые выпуклые замкнутые множества.

Полагая $K{=}K_1 \times K_2 \times K_3$, $u = (\mathbf{u}, \psi, \chi)$, введем оператор $F{=}(F_1, F_2)\colon H^1(\Omega) \times K \times L^2(\Omega) \to Y \equiv \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, действующий по формулам

$$\begin{aligned}\langle F_1(T,\mathbf{u},\chi,f),\eta\rangle &= \langle A_{\mathbf{u}}T,\eta\rangle - (f,\eta) - (\chi,\eta)|_{\Gamma_n}\\ &\equiv a_{\mathbf{u}}(T,\eta) - (f,\eta) - (\chi,\eta)|_{\Gamma_n},\quad \eta\in\mathcal{T},\quad F_2(T,\psi) = T|_{\Gamma_D} - \psi.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\begin{gathered} J(T,u) \equiv (1/2)\big(\mu_0 I(T) + \mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2 + \mu_2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \mu_3\|\chi\|_{\Gamma_N}^2\big) \to \inf,\\ F(T,u,f) = 0,\quad (T,u)\in H^1(\Omega)\times K.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь неотрицательные параметры μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 служат для регулирования относительной важности каждого из слагаемых в (2.3). Другая цель введения параметров μ_l состоит в обеспечении единственности и устойчивости решений конкретных задач управления (см. ниже). Введем множество $Z_{\rm ad}(f) = \{(T,\mathbf{u}) \in X\times K : F(T,u,f) = 0,\ J(T,u) < \infty\}$ допустимых пар $(T,\mathbf{u})$ для задачи (2.3). Предположим в дополнение к (j), что справедливо условие:

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \ge 0$, $\mu_2 \ge 0$, $\mu_3 \ge 0$; K_1, K_2, K_3 — ограниченные множества либо $\mu_l > 0$, $l = 0,1,2,3$, и функционал I ограничен снизу.

Теорема 3. *Пусть $I\colon X\to\mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал качества и выполняются условия (i), (ii), (j), (jj), причем множество $Z_{\rm ad}(f)$ не пусто. Тогда задача* (2.3) *имеет по крайней мере одно решение $(T,u)\in H^1(\Omega)\times K$.*

Доказательство. Обозначим через $(T_m, u_m) \in Z_{\rm ad}$, $u_m = (\mathbf{u}_m, \psi_m, \chi_m)$, $m \in \mathbb{N}$, минимизирующую последовательность для J, для которой

$\lim\limits_{m\to\infty} J(T_m, u_m) = \inf_{(T,u)\in Z_{\rm ad}} J(T,u) \equiv J^*$. В силу условий (j), (jj) для всех $m \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_m\|_1 \le c_1, \quad \|\psi_m\|_{1/2,\Gamma_D} \le c_2, \quad \|\chi_m\|_{\Gamma_N} \le c_3. \tag{2.4}$$

Здесь и ниже $c_1, c_2, c_3, \ldots$ — некоторые константы, не зависящие от m. Из (2.4) и теоремы 1 вытекает, что $\|T_m\|_1 \le c_4$. Из этой оценки и (2.4) вытекает, что существуют слабые пределы $\mathbf{u}^* \in K_1 \subset Z$, $\psi^* \in K_2 \subset H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi^* \in K_3 \subset L^2(\Gamma_N)$, $T^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\mathbf{u}_m\}$, $\{\psi_m\}$, $\{\chi_m\}$, $\{T_m\}$. С учетом этого и компактности вложений $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, $\gamma|_{\Gamma_D} H^1(\Omega) \subset L^2(\Gamma_D)$, $Z \subset L^4(\Omega)$ можно считать, что $T_m \to T^*$ сильно в $L^4(\Omega)$, $T_m|_{\Gamma_D} \to T^*|_{\Gamma_D}$ сильно в $L^2(\Gamma_D)$, $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}^*$ слабо в Z, $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}^*$ сильно в $L^4(\Omega)$ при $m\to\infty$. Так как $T_m|_{\Gamma_D} = \psi_m$, то из свойств оператора следа $\gamma|_{\Gamma_D}$ вытекает, что $T^*|_{\Gamma_D} = \psi^*$ и, следовательно, $F_2(T^*, \psi^*) = 0$.

Покажем, что $F_1(T^*, \mathbf{u}^*, \chi^*, f) = 0$ в $\mathcal{T}^*$, т. е. что

$$\lambda(\nabla T^*, \nabla\eta) + \lambda(\alpha^* T^*, \eta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}^*\cdot\nabla T^*, \eta) - (f,\eta) - (\chi^*, \eta)_{\Gamma_N} = 0, \quad \eta \in \mathcal{T}. \tag{2.5}$$

Для этого заметим, что T_m, $\mathbf{u}_m$ и χ_m при каждом $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяют тождеству

$$(\lambda\nabla T_m, \nabla\eta) + \lambda(\alpha T_m, \eta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}_m\cdot\nabla T_m, \eta) - (f_m, \eta) - (\chi_m, \eta)_{\Gamma_N} = 0, \quad \eta \in \mathcal{T}. \tag{2.6}$$

Ясно, что все линейные слагаемые в левой части (2.6) переходят при $m\to\infty$ в соответствующие линейные слагаемые в (2.5), тогда как сходимость нелинейного слагаемого $(\mathbf{u}_m\cdot\nabla T_m, \eta)$, к слагаемому $(\mathbf{u}^*\cdot\nabla T^*, \eta)$ при $m\to\infty$ вытекает в силу условий $\mathbf{u}^* \in L^4(\Omega)$, $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}^*$ сильно в $L^4(\Omega)$ и $\nabla T_m \to \nabla T^*$ слабо в $L^2(\Omega)$ из соотношения $|(\mathbf{u}_m\cdot\nabla T_m, \eta) - (\mathbf{u}^*\cdot\nabla T^*, \eta)| \le |(\mathbf{u}^*\cdot\nabla(T_m - T^*), \eta)| + |(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}^*)\cdot\nabla T_m, \eta)| \to 0$ при $m\to\infty$. Поэтому, переходя в (2.6) к пределу при $m\to\infty$, получаем, что $F_1(T^*, \mathbf{u}^*, \chi^*, f^*) = 0$, а из слабой полунепрерывности снизу функционала J на $X\times K$ следует, что $J^* = J(T^*, \mathbf{u}^*)$. Теорема доказана.

Подчеркнем, что утверждения теоремы 3 остаются справедливыми для функционалов I_1 и I_2, поскольку они неотрицательны и слабо полунепрерывны снизу.

3. Необходимые условия экстремума. Свойства системы оптимальности. Выведем в этом разделе систему оптимальности для задачи (2.3). Для этого воспользуемся экстремальным принципом в экстремальных задачах [21]. Отметим прежде, что производная Фреше для функционалов I_1 и I_2, введенных в (2.2), существует в любой точке $\widehat{T} \in X$, принадлежит пространству $X^* = H^1(\Omega)^*$ и определяется формулой

$$\langle (I_1)'_T, \tau\rangle = 2(\hat{T} - T_d, \tau)_Q, \quad \langle (I_2)'_T, \tau\rangle = 2(\hat{T} - T_d, \tau)_{1,Q}, \quad \tau \in X. \tag{3.1}$$

Обозначим через $Y^* = \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ пространство, двойственное к $Y = \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$. В соответствии с общей теорией экстремальных задач [21] введем множитель Лагранжа $y^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, где элемент $\theta \in \mathcal{T}$ имеет смысл «сопряженной» температуры, а лагранжиан $\mathcal{L}\colon H^1(\Omega)\times K\times L^2(\Omega)\times Y^* \to \mathbb{R}$ формулой

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(T,u,f,y^*) \equiv J(T,u) + \langle y^*, F(T,u,f)\rangle_{Y^*\times Y} \equiv (1/2)\big(\mu_0 I(T) + \mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2 \\ + \mu_2\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \mu_3\|\chi\|^2_{\Gamma_N}\big) + \langle F_1(T,\mathbf{u},\chi,f), \theta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(T,\psi)\rangle_{\Gamma_D}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из линейности оператора F по $\mathbf{u}$, ψ и χ и из выпуклости множества K вытекает, что множество $F(T,K,f) \equiv \{y = F(T,u,f) \in Y,\ u \in K\}$ является выпуклым подмножеством в Y для любой пары функций $T \in X$ и $f \in$

$L^2(\Omega)$. Кроме того, производная Фреше $F'_T(\widehat{T},\hat{u},f)$ в каждой точке $(\widehat{T},\hat{u},f)\in H^1(\Omega)\times K\times L^2(\Omega)$, где $\hat{u}=(\hat{\mathbf{u}},\hat{\psi},\hat{\chi})$, определяется соотношением $F'_T(\widehat{T},\hat{u},f)=(F'_{1T}(\widehat{T},\hat{\mathbf{u}},\hat{\chi},\hat{f}),F'_{2T}(\widehat{T},\psi))=(\hat{A},\gamma|_{\Gamma_D})$. Здесь оператор $\hat{A}\equiv A_{\hat{\mathbf{u}}}$ определен формулой (1.24) при $\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}$. Обозначим через $F'_T(\widehat{T},\hat{u},f)^*\colon Y^*\to X^*$ сопряженный к оператору $F'_T(\widehat{T},\hat{u},f)\colon X\to Y$ оператор. Так как оператор $(\hat{A}_1,\gamma|_{\Gamma_D})$ является изоморфизмом в силу теоремы 2, то из [21, с. 79] вытекает

Теорема 4. *Пусть при выполнении условий теоремы* 3 *пара* $(\widehat{T},\hat{u})\in H^1(\Omega)\times K$, *где* $\hat{u}=(\hat{\mathbf{u}},\widehat{\psi},\widehat{\chi})$, *является элементом, на котором достигается локальный минимум в задаче* (2.3), *и пусть функционал* $I(\cdot)\colon X\to\mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по* T *в точке* $\widehat{T}$. *Тогда существует единственный множитель Лагранжа* $y^*=(\theta,\zeta)\in\mathcal{T}\times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ *такой, что справедливо уравнение Эйлера — Лагранжа* $\mathcal{L}'_T(\widehat{T},\hat{u},f,y^*)\equiv F'_T(\widehat{T},\hat{u},f)^*y^*+(\mu_0/2)I'_T(\widehat{T})=0$ *в* X^*, *эквивалентное тождеству*

$$\lambda(\nabla\tau,\nabla\theta)+\lambda(\alpha\tau,\theta)_{\Gamma_N}+(\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\tau,\theta)+\langle\zeta,\tau\rangle_{\Gamma_D}=-(\mu_0/2)\big\langle I'_T(\widehat{T}),\tau\big\rangle,\quad \tau\in X,\tag{3.3}$$

и выполняется принцип минимума $\mathcal{L}(\widehat{T},\hat{u},f,y^*)\le\mathcal{L}(\widehat{T},u,f,y^*)$ *для любых* $u\in K$, *эквивалентный тройке вариационных неравенств*

$$\big\langle\mathcal{L}'_{\mathbf{u}}(\widehat{T},\hat{u},f,y^*),\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}}\big\rangle=\mu_1(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}})_1+((\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}})\cdot\nabla\widehat{T},\theta)\ge0,\ \mathbf{u}\in K_1,\tag{3.4}$$

$$\big\langle\mathcal{L}'_{\psi}(\widehat{T},\hat{u},f,y^*),\psi-\widehat{\psi}\big\rangle=\mu_2(\widehat{\psi},\psi-\widehat{\psi})_{1/2,\Gamma_D}-\langle\zeta,\psi-\widehat{\psi}\rangle_{\Gamma_D}\ge0,\ \psi\in K_2,\tag{3.5}$$

$$\big\langle\mathcal{L}'_{\chi}(\widehat{T},\hat{u},f,y^*),\chi-\widehat{\chi}\big\rangle=\mu_3(\widehat{\chi},\chi-\widehat{\chi})_{\Gamma_N}-(\chi-\widehat{\chi},\theta)_{\Gamma_N}\ge0,\ \chi\in K_3.\tag{3.6}$$

Задачи (1.12) и (3.3) вместе с вариационными неравенствами (3.4)–(3.6) образуют систему оптимальности, описывающую необходимые условия экстремума для задачи (2.3). Установим теперь одно важное свойство системы оптимальности, с помощью которого ниже мы выведем достаточные условия на данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений ряда конкретных экстремальных задач. Предположим, что функция f, входящая в уравнение состояния $F(T,u,f)=0$, может изменяться в некотором ограниченном множестве $F_{\rm ad}\subset L^2(\Omega)$. Обозначим через $(T_1,u_1)=(T_1,\mathbf{u}_1,\psi_1,\chi_1)\in X\times K$ произвольное решение задачи (2.3) для заданной функции $f=f_1\in F_{\rm ad}$. Через $(T_2,u_2)=(T_2,\mathbf{u}_2,\psi_2,\chi_2)\in X\times K$ обозначим решение задачи

$$\begin{gathered}\tilde{J}(T,u)=(1/2)\big(\mu_0\tilde{I}(T)+\mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2+\mu_2\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D}+\mu_3\|\chi\|_{\Gamma_N}\big)\to\inf,\\ F(T,u,f_2)=0,\quad (T,u)\in X\times K.\end{gathered}\tag{3.7}$$

Она получается из (2.3) заменой функционала I близким функционалом $\tilde{I}$ и заменой функции f_1 близкой функцией $\tilde{f}=f_2\in F_{\rm ad}$. В силу теоремы 1 и замечания 1 справедливы следующие оценки для T_i:

$$\|T_i\|_1\le M_T\equiv C_1\sup_{\psi\in K_2,\chi\in K_3,f\in F_{ad}}(\|f\|+\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}+\|\chi\|_{\Gamma_N}),\ i=1,2.\tag{3.8}$$

Здесь C_1 — константа, определенная в (1.25). Ясно, что $M_T<\infty$ в случае, когда множества K_1, K_2, K_3 и $F_{\rm ad}$ ограничены.

Обозначим через $y_i^*=(\theta_i,\zeta_i)\in Y^*$ множители Лагранжа, отвечающие решениям (T_i,u_i), $i=1,2$. В силу теоремы 4 они удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned}\lambda(\nabla\tau,\nabla\theta_i)+\lambda(\alpha\tau,\theta_i)_{\Gamma_N}+(\mathbf{u}_i\cdot\nabla\tau,\theta_i)+\langle\zeta_i,\tau\rangle_{\Gamma_D}&\\ =-(\mu_0/2)\langle I'_{iT}(T_i),\tau\rangle,\quad \tau\in X.&\end{aligned}\tag{3.9}$$

Здесь мы ввели переобозначения $I_1 = I$, $I_2 = \tilde{I}$. Положим

$$\begin{gathered} T = T_1 - T_2, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad \psi = \psi_1 - \psi_2, \quad \chi = \chi_1 - \chi_2, \\ f = f_1 - f_2, \quad \theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \zeta = \zeta_1 - \zeta_2. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Вычтем соотношения (1.12), записанные для $(T_2, \mathbf{u}_2, \psi_2, \chi_2)$, из этих же соотношений, записанных для $(T_1, \mathbf{u}_1, \psi_1, \chi_1)$. Получим с учетом обозначений (3.10):

$$\begin{gathered} \lambda(\nabla T, \nabla \eta) + \lambda(\alpha T, \eta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T, \eta) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla T_2, \eta) + (f, \eta) + (\chi, \eta)_{\Gamma_N}, \\ \eta \in \mathcal{T}, \quad T|_{\Gamma_D} = \psi. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Из теоремы 1, примененной к (3.11) относительно разности $T = T_1 - T_2$, и (3.8) вытекает с учетом замечания 1, что справедлива следующая оценка для T:

$$\begin{aligned} \|T\|_1 &\le C_1(\gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|T_2\|_1 + \|f\| + \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \|\chi\|_{\Gamma_N}) \\ &\le C_1(\gamma_1 M_T \|\mathbf{u}\|_1 + \|f\| + \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \|\chi\|_{\Gamma_N}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Положим $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_2$ в неравенстве (3.4), записанном при $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1$, $\widehat{T} = T_1$, $\theta = \theta_1$; и $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1$ в (3.4), записанном при $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_2$, $\widehat{T} = T_2$, $\theta = \theta_2$. Получим

$$\mu_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)_1 + ((\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla T_1, \theta_1) \ge 0, \ \mu_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_1 + ((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla T_2, \theta_2) \ge 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к соотношению

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla T_1, \theta_1) - (\mathbf{u} \cdot \nabla T_2, \theta_2) \le -\mu_1 \|\mathbf{u}\|_1^2. \tag{3.13}$$

По аналогичной схеме выводятся следующие два неравенства:

$$-\langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D} \le -\mu_2 \|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D}, \quad -(\chi, \theta)_{\Gamma_N} \le -\mu_3 \|\chi\|^2_{\Gamma_N}. \tag{3.14}$$

Вычтем теперь тождество (3.9) при $i = 2$ из (3.9) при $i = 1$. Полагая $\tau = T$ и учитывая, что $T|_{\Gamma_D} = \psi$, получим

$$\begin{aligned} \lambda(\nabla T, \nabla \theta) + \lambda(\alpha T, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_2) + \langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D} \\ = -(\mu_0/2) \langle I'_T(T_1) - \tilde{I}'_T(T_2), T \rangle. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Положим $\eta = \theta$ в тождестве в (3.11). Будем иметь

$$\lambda(\nabla T, \nabla \theta) + \lambda(\alpha T, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T_2, \theta) = (f, \theta) + (\chi, \theta)_{\Gamma_N}. \tag{3.16}$$

Вычтем (3.16) из (3.15) и сложим с (3.13) и (3.14). Учитывая, что

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla T_2, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T_1, \theta_1) - (\mathbf{u} \cdot \nabla T_2, \theta_2) = (\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_1 + \theta_2), \tag{3.17}$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \mu_1 \|\mathbf{u}\|_1^2 + \mu_2 \|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \mu_3 \|\chi\|^2_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta_1 + \theta_2) \\ + (\mu_0/2) \big\langle I'_T(T_1) - \tilde{I}'_T(T_2), T \big\rangle \le -(f, \theta). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 5. *Пусть в дополнение к условиям* (i), (ii) *и* (j) $K_1 \subset Z$, $K_2 \subset H^{1/2}(\Gamma_D)$, $K_3 \subset L^2(\Gamma_N)$ *и* $F_{\rm ad} \subset L^2(\Omega)$ *— ограниченные множества, и пусть пары* $(T_1, u_1) \in X \times K$ *и* $(T_2, u_2) \in X \times K$ *являются решениями соответственно задач* (2.3) *при* $f = f_1 \in F_{\rm ad}$ *и* (3.7) *при* $f = f_2 \in F_{\rm ad}$. *Пусть* $(\theta_i, \zeta_i) \in Y^*$ *— множители Лагранжа, отвечающие решениям* (T_i, u_i), *и пусть функционалы* I *и* $\tilde{I}$ *непрерывно дифференцируемы относительно состояния* T. *Тогда для разностей* T, $\mathbf{u}$, f, ψ *и* θ, *определенных в* (3.10), *выполняется неравенство* (3.18) *и справедлива оценка* (3.12).

Замечание 2. Отметим, что двухпараметрическая экстремальная задача, отвечающая ситуации, когда $u = (\mathbf{u}, \psi)$ либо $u = (\psi, \chi)$, может рассматриваться как частный случай общей трехпараметрической задачи (2.3), отвечающий ситуации, когда множество K_3 (либо K_1) состоит из одного элемента: $K_3 = \{\chi\}$ (либо $K_1 = \{\mathbf{u}\}$). Для двухпараметрической экстремальной задачи неравенство (3.18) изменяется. Простой анализ показывает, что оно принимает вид

$$\mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2+\mu_2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2+(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta_1+\theta_2)+(\mu_0/2)\langle I_T'(T_1)-\tilde{I}_T'(T_2), T\rangle \le -(f,\theta) \quad (3.19)$$

в случае, когда управлением является пара функций $(\mathbf{u}, \psi)$, и вид

$$\mu_2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \mu_3\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + (\mu_0/2)\langle I_T'(T_1) - \tilde{I}_T'(T_2), T\rangle \le -(f,\theta) \quad (3.20)$$

в случае, когда управлением является пара (ψ, χ).

4. Единственность и устойчивость решений экстремальных задач. Начнем этот раздел с анализа следующей экстремальной задачи, отвечающей функционалу качества $I_1(T) = \|T - T_d\|_Q^2$:

$$\begin{gathered} J(T,u) = (1/2)\big(\mu_0 I_1(T) + \mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2 + \mu_2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \mu_3\|\chi\|_{\Gamma_N}^2\big) \to \inf, \\ F(T,u,f) = 0, \quad (T,u) \in X \times K. \end{gathered} \quad (4.1)$$

Обозначим через $(T_1, u_1) = (T_1, \mathbf{u}_1, \psi_1, \chi_1)$ решение задачи (4.1), отвечающее заданным функциям $T_d = T_d^{(1)} \in L^2(Q)$, $f = f_1 \in F_{\rm ad}$. Через $(T_2, u_2) = (T_2, \mathbf{u}_2, \psi_2, \chi_2)$ обозначим решение задачи (4.1), отвечающее возмущенным функциям $\tilde{T}_d = T_d^{(2)} \in L^2(Q)$ и $\tilde{f} = f_2 \in F_{\rm ad}$. Полагая $T_d = T_d^{(1)} - T_d^{(2)}$ в дополнение к (3.10), имеем в силу (3.1), что

$$\begin{gathered} \langle I_{iT}'(T_i), \tau\rangle = 2\big(T_i - T_d^{(i)}, \tau\big)_Q, \\ \langle I_{1T}'(T_1) - \tilde{I}_{1T}'(T_2), T\rangle = 2\big(\|T\|_Q^2 - (T_d, T)_Q\big), \quad i = 1,2. \end{gathered} \quad (4.2)$$

В силу (4.2) сужение на $\mathcal{T}$ тождества (3.9) для пары $(\theta_i, \zeta_i) \in Y^*$, отвечающей (T_i, u_i), и неравенство (3.18) для разностей T, $\mathbf{u}$, ψ, χ, θ, введенных в (3.10), принимают вид

$$\lambda(\nabla\tau, \nabla\theta_i) + \lambda(\alpha\tau, \theta_i)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}_i\cdot\nabla\tau, \theta_i) = -\mu_0\big(T_i - T_d^{(i)}, \tau\big)_Q, \ \tau \in \mathcal{T}, \ i = 1,2, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta_1+\theta_2) + \mu_0\big(\|T\|_Q^2 - (T_d, T)_Q\big) \\ &\qquad \le -(f,\theta) - \mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2 - \mu_2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 - \mu_3\|\chi\|_{\Gamma_N}^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Задача (4.3) эквивалентна следующему уравнению для θ_i: $\mathcal{A}_{\mathbf{u}_i}^*\theta_i = \mu_0 f_i^* \in \mathcal{T}^*$, где $\langle f_i^*, \tau\rangle = -\big(T_i - T_d^{(i)}, \tau\big)_Q$, $i = 1,2$. Здесь $\mathcal{A}_{\mathbf{u}_i}^*$ — оператор, введенный в п. 1. Полагая

$$M_T^0 = M_T + \max\big(\|T_d^{(1)}\|_Q, \|T_d^{(2)}\|_Q\big), \quad (4.5)$$

где M_T определено в (3.9), имеем

$$\begin{aligned} |\langle f_i^*, \tau\rangle| = \big|(T_i - T_d^{(i)}, \tau)_Q\big| &\le \big(\|T_i\|_1 + \max\big(\|T_d^{(1)}\|_Q, \|T_d^{(2)}\|_Q\big)\big)\|\tau\|_1 \\ &\le M_T^0\|\tau\|_1, \quad \tau \in X. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из леммы 1 вытекает, что для решения θ_i задачи (4.3) справедлива оценка

$$\|\theta_i\|_1 \le C_*\mu_0\|f_i^*\|_{\mathcal{T}}^* \le C_*\mu_0 M_T^0, \quad i = 1,2, \quad C_* \equiv (\delta_1\lambda_0)^{-1}. \quad (4.7)$$

Учитывая, что $\theta = \theta_1 - \theta_2$, из (4.7) получаем, что

$$|(f,\theta)| \le 2C_*\mu_0 M_T^0\|f\|. \quad (4.8)$$

Ниже при проведении ряда выкладок будем использовать два неравенства:

$$2ab \le \varepsilon a^2 + (1/\varepsilon)b^2, \quad a^2 + b^2 \le (a+b)^2, \quad a \ge 0,\ b \ge 0,\ \varepsilon > 0. \tag{4.9}$$

Используя (1.5), (3.12), (4.7) и первое неравенство в (4.9) при $\varepsilon = 1$, $a = \gamma_1 M_T \|\mathbf{u}\|_1$ и $b = \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$ (либо при $b = \|\chi\|_{\Gamma_N}$ или $b = \|f\|$), имеем

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta_1+\theta_2)| &\le \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|T\|_1 \|\theta_1+\theta_2\|_1 \\ &\le 2\gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1 C_1 (\gamma_1 M_T \|\mathbf{u}\|_1 + \|f\| + \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \|\chi\|_{\Gamma_N}) C_* \mu_0 M_T^0 \\ &\le \mu_0 C_1 C_* M_T^0 M_T^{-1} \big(5\gamma_1^2 M_T^2 \|\mathbf{u}\|_1^2 + \|f\|^2 + \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \|\chi\|_{\Gamma_N}^2\big). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Пусть исходные данные задачи или параметры μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 таковы, что

$$\begin{gathered} \mu_1(1-\epsilon) > 5\mu_0 \gamma_1^2 C_1 C_* M_T^0 M_T, \quad \mu_2(1-\epsilon) > \mu_0 C_1 C_* M_T^0 M_T^{-1}, \\ \mu_3(1-\epsilon) > \mu_0 C_1 C_* M_T^0 M_T^{-1}, \end{gathered} \tag{4.11}$$

где $\epsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое число. Учитывая (4.11), из (4.10) выводим

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta_1+\theta_2)| \le (1-\epsilon)\big(\mu_1 \|\mathbf{u}\|_1^2 + \mu_2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \mu_3 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2\big) \\ + \mu_0 C_1 C_* M_T^0 M_T^{-1} \|f\|^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Используя (4.8) и (4.12), из неравенства (4.4) получаем, что

$$\begin{aligned} \mu_0\big(\|T\|_Q^2 - (T_d, T)_Q\big) &\le -(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta_1+\theta_2) - (f,\theta) - \mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2 - \mu_2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 - \mu_3\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \\ &\le -\epsilon\mu_1 \|\mathbf{u}\|_1^2 - \epsilon\mu_2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 - \epsilon\mu_3 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \mu_0(\varphi(\|f\|))^2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Здесь непрерывная функция $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ определяется формулой

$$\varphi(\|f\|) = \big(2C_* M_T^0 \|f\| + C_1 C_* M_T^0 M_T^{-1} \|f\|^2\big)^{1/2}. \tag{4.14}$$

Из (4.13) следует, что

$$\mu_0 \|T\|_Q^2 \le \mu_0 \|T\|_Q \|T_d\|_Q - \epsilon\mu_1 \|\mathbf{u}\|_1^2 - \epsilon\mu_2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 - \epsilon\mu_3 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + (\varphi(\|f\|))^2. \tag{4.15}$$

Отбрасывая три слагаемых в правой части (4.15), получаем

$$\|T\|_Q^2 \le \|T\|_Q \|T_d\|_Q + (\varphi(\|f\|))^2, \tag{4.16}$$

которое представляет собой квадратичное неравенство относительно $\|T\|_Q$. Решив его, приходим с учетом второго неравенства в (4.9) к оценке для $\|T\|_Q$:

$$\|T\|_Q \le \|T_d\|_Q + \varphi(\|f\|). \tag{4.17}$$

Поскольку $T = T_1 - T_2$, $T_d = T_d^{(1)} - T_d^{(2)}$, $f = f_1 - f_2$, то (4.17) эквивалентно

$$\|T_1 - T_2\|_Q \le \big\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\big\|_Q + \varphi(\|f_1 - f_2\|). \tag{4.18}$$

В частном случае, когда $Q = \Omega$, оценка (4.18) имеет смысл оценки устойчивости в $L^2(\Omega)$ норме компоненты $\widehat{T}$ решения $(\widehat{T}, \hat{\mathbf{u}})$ задачи (4.1) относительно малых возмущений функций $T_d \in L^2(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. При $f_1 = f_2$ оценка (4.18) переходит в простую оценку $\|T_1 - T_2\|_Q \le \big\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\big\|_Q$.

Обратимся еще раз к (4.15). Используя (4.17), и неравенство $\|T\|_Q\|T_d\|_Q \leq \|T\|_Q^2 + (1/4)\|T_d\|_Q^2$, вытекающее из (4.9) при $\varepsilon = 2$, $a = \|T\|_Q$, $b = \|T_d\|_Q$, из (4.15) выводим, что

$$\begin{aligned} \epsilon\mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2 + \epsilon\mu_2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \epsilon\mu_3\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 &\leq -\mu_0\|T\|_Q^2 + \mu_0\|T\|_Q\|T_d\|_Q + (\varphi(\|f\|))^2 \\ &\leq (\mu_0/4)\|T_d\|_Q^2 + \mu_0(\varphi(\|f\|))^2 \leq \mu_0((1/2)\|T_d\|_Q + \varphi(\|f\|))^2. \quad (4.19) \end{aligned}$$

Из (4.19) вытекают оценки $\|\mathbf{u}\|_1 \leq \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_1}\Delta$, $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} \leq \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_2}\Delta$, $\|\chi\|_{\Gamma_N} \leq \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_3}\Delta$, которые с учетом (3.10) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 \leq \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_1}\Delta,\ \|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2,\Gamma_D} \\ \leq \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_2}\Delta,\ \|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} \leq \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_3}\Delta. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Здесь величина Δ определяется формулой

$$\Delta = (1/2)\big\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\big\|_Q + \varphi(\|f_1 - f_2\|). \quad (4.21)$$

Из (4.20) и (3.12) вытекает следующая оценка для разности $T_1 - T_2$:

$$\|T_1 - T_2\|_1 \leq C_1(\gamma_1 M_T\sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_1} + \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_2} + \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_3})\Delta + C_1\|f_1 - f_2\|. \quad (4.22)$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 7. *Пусть при выполнении условий* (i), (ii) *и* (j) K_1, K_2, K_3 *и* $F_{\mathrm{ad}} \subset L^2(\Omega)$ *— ограниченные множества, и пусть четверка* $(T_i, \mathbf{u}_i, \psi_i, \chi_i) \in H^1(\Omega) \times K_1 \times K_2 \times K_3$ *является решением задачи* (4.1), *отвечающим заданным функциям* $T_d^{(i)} \in L^2(Q)$ *и* $f_i \in F_{\mathrm{ad}}$, *где* $Q \subset \Omega$ *— произвольное открытое множество. Предположим, что* $\mu_0 > 0$ *и выполняются условия* (4.11). *Тогда справедливы оценки* (4.18), (4.20), (4.22), *где* Δ *определяется формулой* (4.21), *в которой функция* φ *дается формулой* (4.14).

В силу теоремы 7 достаточное условие устойчивости решения экстремальной задачи (4.1) относительно малых возмущений функций T_d и f, входящих в постановку задачи (4.1), имеет вид соотношений (4.11) между параметрами μ_1, μ_2, μ_3 и μ_0, входящими в ее формулировку. Незначительно модифицируя доказательство теоремы 7, можно показать, что первые два условия в (4.11) вместе с условием $\mu_0 > 0$ являются достаточными условиями устойчивости и для двухпараметрической задачи управления, отвечающей ситуации, когда $I = I_1$, а управлением является пара $(\mathbf{u}, \psi) \in K_1 \times K_2$.

Однако в случае двухпараметрической задачи управления

$$\begin{gathered} J(T, \psi, \chi) = (1/2)\big(\mu_0\|T - T_d\|_Q^2 + \mu_2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \mu_3\|\chi\|_{\Gamma_N}^2\big) \to \inf, \\ F(T, \mathbf{u}, \psi, \chi, f) = 0, \quad (T, \psi, \chi) \in X \times K_2 \times K_3, \end{gathered} \quad (4.23)$$

в которой роль управления играет пара $u = (\psi, \chi) \in K_2 \times K_3$, устойчивость имеет место при выполнении лишь условий положительности параметров μ_2 и μ_3. Действительно, обозначим через (T_i, u_i) решение задачи (4.23), отвечающее заданным функциям $\mathbf{u} \in Z$ и $T_d = T_d^{(i)} \subset L^2(Q)$, $f = f_i \subset L^2(\Omega)$. Через (θ_i, ζ_i) обозначим соответствующий множитель Лагранжа. Поскольку для экстремальной задачи (4.23) $\mathbf{u} \in Z$ является заданной функцией, то задачи для разностей $T = T_1 - T_2$ и $\theta = \theta_1 - \theta_2$ принимают вид

$$\lambda(\nabla T, \eta) + \lambda(\alpha T, \eta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, \eta) = (f, \eta) + (\chi, \eta)_{\Gamma_N},\ \eta \in \mathcal{T},\ T|_{\Gamma_D} = \psi, \quad (4.24)$$

$$\lambda(\nabla\tau, \nabla\theta) + \lambda(\alpha\tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, \theta) = -\mu_0(T - T_d, \tau)_Q, \quad \tau \in X, \quad (4.25)$$

где $T_d = T_d^{(1)} - T_d^{(2)}$, тогда как неравенство (3.20) для T, f, ψ и ζ принимает вид
$$\mu_2\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \mu_3\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \mu_0\big(\|T\|^2_Q - (T_d, T)_Q\big) \le -(f,\theta). \tag{4.26}$$
Из (4.24) и (4.25) выводим оценки для T, θ и (f,θ). Они имеют вид
$$\|T\|_1 \le C_{\mathbf{u}}(\|f\| + \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \|\chi\|_{\Gamma_N}), \tag{4.27}$$
$$\|\theta\|_1 \le \mu_0 C_*(\|T\|_Q + \|T_d\|_Q), \quad |(f,\theta)| \le \mu_0 C_*(\|T\|_Q + \|T_d\|_Q)\|f\|. \tag{4.28}$$
В (4.27) $C_{\mathbf{u}}$ — константа, введенная в (1.22). Учитывая (4.28), из (4.26) выводим, что
$$\begin{aligned}\mu_2\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \mu_3\|\chi\|^2_{\Gamma_N} &\le |(f,\theta)| - \mu_0\|T\|^2_Q + \mu_0\|T\|_Q\|T_d\|_Q\\ &\le C_*\mu_0\|T\|_Q\|f\| + C_*\mu_0\|T_d\|_Q\|f\| - \mu_0\|T\|^2_Q + \mu_0\|T\|_Q\|T_d\|_Q. \end{aligned}\tag{4.29}$$
Используя первое неравенство в (4.9) при $\varepsilon = 1$, имеем
$$2C_*\|T\|_Q\|f\| \le \|T\|^2_Q + C_*^2\|f\|^2, \quad 2\|T\|_Q\|T_d\|_Q \le \|T\|^2_Q + \|T_d\|^2_Q. \tag{4.30}$$
Учитывая (4.30), из (4.29) выводим, что
$$\begin{aligned}2\mu_2\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + 2\mu_3\|\chi\|^2_{\Gamma_N} &\le \mu_0 C_*^2\|f\|^2 + \mu_0\|T_d\|^2_Q + 2C_*\mu_0\|T_d\|_Q\|f\|\\ &\le \mu_0(\|T_d\|_Q + C_*\|f\|)^2. \end{aligned}\tag{4.31}$$
Из (4.31) приходим с учетом (3.10) к следующим оценкам для $\psi_1 - \psi_2$ и $\chi_1 - \chi_2$:
$$\|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2,\Gamma_D} \le \sqrt{\mu_0/2\mu_2}\big(\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\|_Q + C_*\|f_1 - f_2\|\big), \tag{4.32}$$
$$\|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} \le \sqrt{\mu_0/2\mu_3}\big(\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\|_Q + C_*\|f_1 - f_2\|\big). \tag{4.33}$$
Из (4.32), (4.33) и (4.27), в свою очередь, вытекает следующая оценка для разности T:
$$\begin{aligned}\|T_1 - T_2\|_1 \le C_{\mathbf{u}}(\sqrt{\mu_0/2\mu_2} + \sqrt{\mu_0/2\mu_3})\big(\|T_d^{(2)} - T_d^{(1)}\|_Q\\ + C_*\|f_1 - f_2\|\big) + C_{\mathbf{u}}\|f_1 - f_2\|. \end{aligned}\tag{4.34}$$

Тем самым доказана

Теорема 8. *Пусть в дополнение к условиям* (i), (ii) *и* (j) *для* K_2, K_3, $\mathbf{u} \in Z$ *— заданная функция,* K_2, K_3 *и* $\mathcal{F}_{\mathrm{ad}} \subset L^2(\Omega)$ *— ограниченные множества, и пусть тройка* $(T_i, \psi_i, \chi_i) \in L^2(\Omega) \times K_2 \times K_3$ *является решением задачи* (4.23), *отвечающим заданным функциям* $T_d^{(i)} \in L^2(Q)$ *и* $f_i \in F_{\mathrm{ad}}$, *где* $Q \subset \Omega$ *— произвольное открытое множество. Предположим, что* $\mu_0 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$. *Тогда справедливы оценки устойчивости* (4.32)–(4.34), *где константа* C_* *определена в* (1.16).

Отметим, что единственность решения задачи (4.23) является следствием оценок (4.32)–(4.34), справедливых при $\mu_2 > 0$ и $\mu_3 > 0$. Подчеркнем, что единственность решения имеет место и в случае, когда $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$, но выполняется условие, что $Q = \Omega$. Действительно, предположим что $T_d^{(1)} = T_d^{(2)}$ и $f_1 = f_2$, т. е. $f = 0$ и $T_d = 0$. Тогда из (4.29) следует, что $T = 0$ в Ω, а из (4.24) выводим, рассуждая, как в [3, с. 155], что $\psi = 0$, $f = 0$ и $\chi = 0$. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 9. *Пусть при выполнении условий* (i), (ii) *и* (j) *для* K_2, K_3, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\mu_3 \geq 0$ *и* $Q = \Omega$. *Тогда решение* $(\widehat{T}, \widehat{\psi}, \widehat{\chi}) \in K_1 \times K_2 \times K_3$ *задачи* (4.23) *единственно.*

В заключение рассмотрим трехпараметрическую экстремальную задачу

$$\begin{gathered} J(T,u) = (1/2)\big(\mu_0 I_2(T) + \mu_1 \|\mathbf{u}\|_1^2 + \mu_2 \|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \mu_3 \|\chi\|^2_{\Gamma_N}\big) \to \inf, \\ F(T,u,f) = 0, \quad (T,u) \in X \times K, \end{gathered} \tag{4.35}$$

отвечающую функционалу $I_2(T) = \|T - T_d\|^2_{1,Q}$. Незначительно модернизируя приведенное доказательство теоремы 7, можно доказать следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть при выполнении условий* (i), (ii) *и* (j) K_1, K_2, K_3 *и* $\mathcal{F}_{\mathrm{ad}} \subset L^2(\Omega)$ — *ограниченные множества, и пусть четверка* $(T_i, \mathbf{u}_i, \psi_i, \chi_i) \in L^2(\Omega) \times K_1 \times K_2 \times K_3$ *является решением задачи* (4.35), *отвечающим заданным функциям* $T_d^{(i)} \in H^1(Q)$ *и* $f_i \in F_{\mathrm{ad}}$, $i = 1, 2$, *где* $Q \subset \Omega$ — *произвольное открытое множество. Предположим, что* $\mu_0 > 0$ *и выполняются условия* (4.11), *где* $M_T^0 = M_T + \max\big(\|T_d^{(1)}\|_{1,Q}, \|T_d^{(2)}\|_{1,Q}\big)$, *а* M_T *определено в* (3.8). *Тогда выполняются оценки устойчивости* (4.20), (4.22), *где* $\Delta = (1/2)\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\|_{1,Q} + \varphi(\|f_1 - f_2\|)$, *и оценка* $\|T_1 - T_2\|_{1,Q} \leq \|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\|_{1,Q} + \varphi(\|f_1 - f_2\|)$, *в которой функция* φ *определяется формулой* (4.14).

Подчеркнем, что устойчивость решений экстремальных задач (4.1), (4.23) и (4.35) была доказана выше (как для $Q \subset \Omega$, так и для $Q = \Omega$) при условии, что каждый из параметров μ_1, μ_2 и μ_3 положителен. Это означает, что слагаемые $(\mu_1/2)\|\mathbf{u}\|_1^2$, $(\mu_2/2)\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D}$ и $(\mu_3/2)\|\chi\|^2_{\Gamma_N}$ в выражениях минимизируемого функционала J в (4.1), (4.23) и (4.35) вносят регуляризирующий эффект. Однако если устойчивость решения квадратичной задачи управления (4.23) установлена при любых положительных значениях параметров регуляризации $\mu_2 > 0$ и $\mu_3 > 0$, то устойчивость решений коэффициентных (т. е. неквадратичных) обратных экстремальных задач (4.1) и (4.35) доказана лишь в случае, когда параметры μ_1, μ_2, μ_3 для задачи (4.1) (либо μ_1 и μ_2 для задачи (4.35)) удовлетворяют (4.11) (либо первым двум условиям (4.13)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988.
2. *Самарский А. А., Вабишевич П. Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.
4. *Ito K., Kunisch K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Problems. 1997. N 14. P. 995–1013.
5. *Agoshkov V. I., Minuk F. P., Rusakov A. S., Zalesny V. B.* Study and solution of identification problems for ninstationary 2D- and 3D-convection-diffusion equation // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. V. 20, N 1. P. 19–43.
6. *Алексеев Г. В., Калинина Е. А.* Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 11, №1. С. 3–16.
7. *Соболева О. В.* Обратные экстремальные задачи для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Дальневост. мат. журн. 2010. Т. 10, № 2. С. 170–184.
8. *Вахитов И. С.* Обратная задача идентификации неизвестного коэффициента в уравнении диффузии-реакции // Дальневост. мат. журн. 2010. Т. 10, № 2. С. 93–105.

9. *Pyatkov S. G.* On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 18, N 8. P. 917–934.

10. *Alekseev G. V., Tereshko D. A.* On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. V. 6. N 6. P. 521–562.

11. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Стационарные задачи оптимального управления для уравнений гидродинамики вязкой теплопроводности жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 2. С. 24–44.

12. *Lee H.-C., Imanuvilov O. Yu.* Analysis of optimal control problems for the 2-D stationary Boussinesq equations // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 242. P. 191–211.

13. *Lee H. C.* Optimal control problems for the two dimensional Rayleigh-Benard type convection by a gradient method // Japan. J. Industr. Appl. Math. 2009. V. 26, N 1. P. 93–121.

14. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Прикл. механика и техн. физика. 2010. Т. 51, № 4. С. 72–84.

15. *Алексеев Г. В., Хлуднев А. М.* Устойчивость решений экстремальных задач граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 5–18.

16. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1645–1664.

17. *Пененко В. В.* Вариационные методы усвоения данных и обратные задачи для изучения атмосферы, океана и окружающей среды // Сиб. журн. вычисл. математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 421–434.

18. *Агошков В. И., Ипатова В. М.* Разрешимость задачи усвоения данных наблюдений в трехмерной модели динамики океана // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1064–1075.

19. *Короткий А. И., Ковтунов Д. А.* Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. ИММ. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.

20. *Короткий А. И., Ковтунов Д. А.* Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Тр. ИММ. 2010. Т. 16, № 1. С. 76–101.

21. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука. 1974.

Статья поступила 6 августа 2012 г.

Алексеев Геннадий Валентинович
Институт прикладной математики ДВО РАН
ул. Радио, 7, 690041 г. Владивосток
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
ул. Гоголя, 41, 690014 г. Владивосток
Шепелов Михаил Алексеевич
Дальневосточный федеральный университет
ул. Суханова, 8, 690060 г. Владивосток
Институт прикладной математики ДВО РАН
ул. Радио, 7, 690041 г. Владивосток
E-mail: alekseev@iam.dvo.ru; root@iam.dvo.ru