

## 1.2. Применение вариационного принципа для получения универсальной статистики, характеризующей ценность частотного ресурса для морской радиосвязи

В условиях конкуренции меру ценности рабочей частоты (РЧ) предлагается определить через количество обращений к ней потребителей частотного ресурса. На вербальном уровне это означает, что ценность эксплуатации некоторой частоты тем выше, чем дольше она эксплуатируется данным ПО. С другой стороны - эта эксплуатационная ценность будет зависеть и от числа обращения разных ПО к данной частоте. Таким образом, ценность рабочих частот, объединяя в себе характеристики абонентской емкости системы, интенсивности эксплуатации РЧ и дефицита частотного ресурса, может быть использована в качестве интегральной оценки электромагнитной совместимости (ЭМС) в т.ч. и радиокорреспондентов морской подвижной радиосвязи.

Введенная ценность РЧ является относительной, то есть зависит от самих ПО. Другими словами: фиксированная РЧ обладает различной ценностью для разных ПО.

При возрастании числа ПО можно говорить не о числе обращений к РЧ, а о вероятности этого события и вероятность эта будет условной: чем больше ценность РЧ для этих  $\{PO\}$ , тем больше  $P(\omega_i/PO)$  - вероятность обращения множества  $\{PO\}$  к  $\omega_i$  - фиксированной РЧ.

Теперь сосредоточим внимание на формализации понятия количество ценности РЧ при эксплуатации дефицитного частотного ресурса. Рассмотрим характеристики ценности, в качестве которых задаются два распределения:

Одно из них – это  $\left\{P\left(\omega_i/PO\right)\right\}$  - распределение вероятностей обращения какого-то фиксированного множества  $\{PO\}$  к  $\{\omega_i\}$ , где  $\omega_i \in \mathcal{A}_i \subseteq \Delta\Omega \subset R^{\mathcal{O}}$ . Другое -  $\left\{t\left(\omega_i/PO\right)\right\}$  - распределение времени эксплуатации  $\omega_i$ -частот виртуальной гребенки РЧ соответствующим множеством пользователей.

Последовательность  $\{\omega_i\}$ , которая образует гребенку РЧ, не является равномерной в  $R(\omega_i)$ -частотном пространстве. Также весьма существенно, что для каждой  $\omega_i$  значения распределений вероятности и времени заданы системой  $\delta$ -функций со своей амплитудой.

По своему физическому смыслу это плотностные распределения с  $\delta$ -топологией Шварца [11]. Как уже отмечалось, чем чаще к выделенной  $\omega_i$  обращаются ПО, тем эта РЧ ценнее; и, чем продолжительнее время эксплуатации РЧ соответствующими ПО, тем эта частота также ценнее. Если фиксировать ансамбль ПО или рассматривать его в асимптотике, то выделенная  $\omega_i^*$ , которая находится в процессе эксплуатации, обладает собственной ценностью. Предложенному формализму можно дать геометрическую интерпретацию (рис.1):

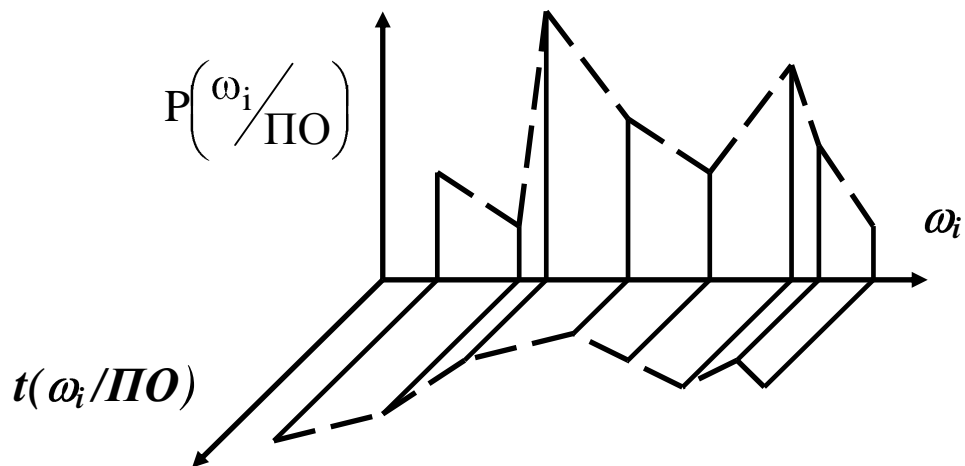


Рис.1. Полигоны частотно-временного и частотно-вероятностного распределений эксплуатации частотного ресурса

На рис.1 показаны  $\delta$ -образные полигоны обоих распределений Шварца. Распределения неотрицательны и заданы на гребенке РЧ  $\{\omega_i\} \subseteq \Delta\Omega \subset R^+$ . В остальном оба эти распределения достаточно произвольны, но именно в них будет отражаться динамика электромагнитной обстановки.

Из рис.1 видно, что геометрическую схему можно рассматривать как задание вероятностных мер над частотно-временной плоскостью. Частотно-временная плоскость широко используется в радиотехнике и теории связи: на  $(\omega;t)$ -плоскости задается база сигнала, когда рассматриваются узкополосные и широкополосные сигналы [12];  $(\omega;t)$ -плоскость используется при построении структурно сложных сигналов [13]. Но в данном случае над  $(\omega;t)$ -плоскостью задается вероятностная мера:  $P\left(\frac{\omega_i}{ПО}; \frac{t(\omega_i)}{ПО}\right)$ , которая позволяет построить теоретико-вероятностное частотно-временное пространство  $R(P_{\omega;t}; \omega_i; t(\omega_i))$ , где по ординате откладывается двумерная функция распределения вероятности, мера, а аргументы принадлежат  $(\omega;t)$ -плоскости.

Используя рис.1 построим функционал ценности эксплуатации частотного ресурса независимыми пользователями следующим образом:

$$C\left(\frac{\Delta\Omega}{ПО}\right) = \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_{\omega_i} P\left(\frac{\omega_i}{ПО}\right) \times t\left(\frac{\omega_i}{ПО}\right); \quad (1),$$

где:  $P\left(\frac{\omega_i}{ПО}\right); t\left(\frac{\omega_i}{ПО}\right)$  - функции Шварца, введенные выше;

$\{\omega_i\} \subseteq \Delta\Omega \subset R^+$  - гребенка РЧ, по которой производится суммирование на  $\Delta\Omega$ -поддиапазоне.

Выражение (1) фактически является «объемом» некоторого вероятностно-временного тела, заданного на гребенке РЧ. Истинным объемом эта мера не является, поскольку по шкале частот нельзя переходить к пределу и, следовательно, нет возможности записать интеграл в смысле Римана. И даже более того, в сугубо прикладном смысле выражение (1) нельзя объявить объемом, так как гребенка РЧ не является равноотстоящей в общем случае.

По размерности функционала ценности (1) можно заключить, что это некоторое среднее время эксплуатации гребенки РЧ  $\{\omega_i\}$  ансамблем ПО.

С точки зрения формальной - это неотрицательный, нелинейный мультипликативный функционал, который имеет смысл меры.

Последний очень важный момент можно усилить, если использовать некоторые базовые положения функционального анализа. Имеется в виду переход от интеграла

Римана к интегралам в смысле Лебега [11], тем более, что в случае функций Шварца, интеграл Лебега является более естественным понятием. Поэтому количественную меру ценности эксплуатации  $R(\omega_i)$  данным  $\{ПО\}$  можно записать следующим образом:

$$C(\Delta\Omega/ПО) = \int_{\Delta\Omega} p(\omega/ПО) \cdot t(\omega/ПО) d\mu(\omega) \quad (2),$$

где: сам интеграл понимается в смысле Лебега, а  $\mu(\omega)$  - Лебеговская частотная мера на  $R(\omega)$ .

Выражение (2) задает объем вероятностно-временного тела, который сопоставлен виртуальным возможностям фиксированных ПО эксплуатировать  $\{\omega_i\}$  - дежурную гребенку РЧ.

От выражения (2) набирается вариация ценности:

$$\begin{aligned} \delta C(\Delta\Omega/ПО) &= \int_{\Delta\Omega} \delta p(\omega/ПО) \cdot t(\omega/ПО) + p(\omega/ПО) \cdot \delta t(\omega/ПО) d\mu(\omega) = \\ &= \delta C_p(\omega/ПО) + \delta C_t(\omega/ПО) = \delta_t C(\omega/ПО) + \delta_p(\omega/ПО). \end{aligned} \quad (3).$$

Первое слагаемое, образованно  $t$ -вариацией временного распределения Шварца, происходит при заданном вероятностном распределении. Второе слагаемое в общей вариации ценности основано на  $P$ -вариациях вероятностного полигона, при фиксированном временном распределении Шварца.

На данном этапе анализа ценности частного ресурса не рассматриваются конкретные радиотехнические, радиофизические факторы, приводящие к изменению ценности РЧ. Пока, на системном уровне, важно указать, что выделяются два независимых канала воздействия на ценность частотного ресурса, отражающих динамику электромагнитной обстановки, складывающейся в ходе эксплуатации ограниченного множества РЧ.

Функционал (2), характеризующий количество ценности всего выделенного системе частотного ресурса, имеет смысл среднего времени эксплуатации выделенного  $\{\omega_i\}$ -ресурса абонентами системы. Это означает, что временной фактор в отличие от вероятностного следует признать главенствующим в динамике электромагнитной обстановки (ЭМО).

Таким образом, пространство  $R(P_{\omega,t}; \omega_i; t(\omega_i))$ , в условиях ограниченного частотного ресурса, предлагается рассматривать как пространство конкурентной борьбы, которое задано двумя функциями Шварца, адекватно описывающих ЭМО.

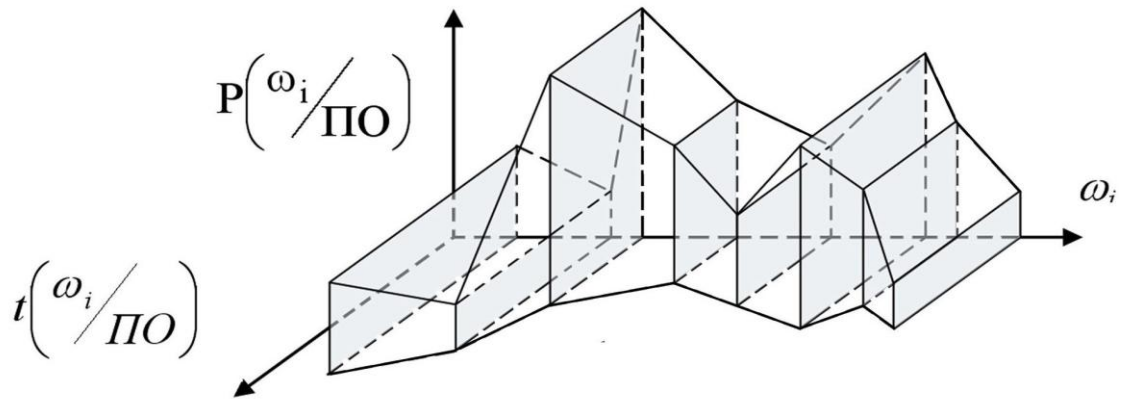
Введенная в рассмотрение ценность эксплуатации ПО частотного ресурса не является сохраняющейся величиной при изменении ЭМО. Это позволяет различать предельное (максимально возможное) и текущее значение ценности частотного ресурса (ценность априорную и апостериорную,  $C_{apr}$  и  $C_{aps}$  соответственно).

Основу текущей ценности ( $C_{aps}$ ) составляют аналитические распределения, восстановленные по эмпирическим данным, полученным в результате функционирования РЭС с момента начала их функционирования (с момента начала радиоэлектронного наблюдения - РЭН) до текущего момента, и соответствует всему времени эволюции  $C\{\Delta\Omega/ПО\}$ .

В качестве предельной выступает ценность ресурса на этапе планирования применения РЭС, т.е.  $C_{apr}$ , получена либо для генеральной совокупности, либо для фиксированного ансамбля абонентов, эксплуатирующих РЧ неограниченно долго, но в любом случае - с учётом основных параметров, характеризующих способ группового использования частотного ресурса абонентами системы.

С этих позиций распределения, представленные на рис.1, следует рассматривать как результат компромисса, достигнутого при эксплуатации РЧ системой, объединяющей

типовые РЭС. Аналогично следует рассматривать и пространство  $R(P_{\omega;t}; \omega_i; t(\omega_i))$ , представленное на рис.2:



**Рис.2. Объем частотного вероятностно-временного тела – количественная мера ценности частотного ресурса радиоэлектронной системы**

Рациональных способов группового использования РЧ может быть несколько, но, учитывая, что временные факторы играют решающую роль в формировании  $R(P_{\omega;t}; \omega_i; t(\omega_i))$ , выделим те из них, влияние которых наиболее существенно в ЭМО, формируемой перспективными РЭС:

- равная для всех сигналов ширина занимаемого спектра, определяемая стандартной длительностью -  $\tau_0$  (в технологии CDMA, например);
- стандартное (постоянное)  $\Delta\tau$  - время нахождения ПО на отдельной  $\omega_i$  (при псевдослучайной перестройке РЧ).

Оба перечисленных фактора могут быть дополнены периодической, с периодом  $\tau^*$ , или рандомизованной (тогда -  $\tau_{cp}$ ) сменой пакетов субчастот (участков занимаемого спектра).

В качестве ансамбля с.в., в этой ситуации, с учетом того, что наиболее существенные факторы, определяющие ЭМО, постоянны, выступают временные отрезки в  $(\omega;t)$ -плоскости, характеризующие эксплуатацию отдельной РЧ.

Но тогда вместо  $\left\{t\left(\frac{\omega_i}{ПО}\right)\right\}$  следует рассматривать  $\left\{\tau\left(\frac{\omega_i}{ПО}\right)\right\}$ , где  $\tau$  - время, а правильнее - временной интервал (в отличие от  $t$  – текущего значения времени) между двумя появлениями ПО на одной частоте.

При формировании  $R(P_{\omega;t}; \omega_i; t(\omega_i))$  возможны несколько сценариев [8].

**Сценарий I:** Гребенка  $\{\omega_i\}$  эксплуатируется неограниченно долго.

Для диагностики  $\tau\left(\frac{\omega_i}{ПО}\right) \equiv p_I(\tau)$  - типа оптимальной статистики маргинального распределения, которое характеризует время эксплуатации РЧ, – необходимо задать Лагранжиан  $L(p(\tau); \tau)$ , который является суммой временных возможностей ПО противостоять помехам и затратных, штрафных действий идущих от других ПО в виде эмиссии помех на данной РЧ:

$$L(p(\tau); \tau) \supseteq h(p(\tau)) \supseteq \pi(\tau), \quad (4)$$

где:  $h(p(\tau)) \supseteq -\ln p(\tau)$ , (5) - парциальная энтропия ценности, характеризует по шкале времени потенциальные возможности ПО уклониться от помех;

$\pi(\tau) = \alpha \times \tau^2$ , (6) – штрафная функция, «потери» ПО, эксплуатирующего РЧ: чем продолжительней он эксплуатирует отдельную РЧ, тем больше штрафуются, т.е. подвергается воздействию помех. Поскольку источником помех является вся совокупность  $\{\text{ПО}\}$  неограниченно долго, то мгновенная мощность их мешающих

излучений имеет «взрывной» характер и аппроксимируется степенной зависимостью от времени  $\tau$ . Затем проводится операция усреднения лагранжиана по  $p(\tau)$  и строится действие ПО  $\Leftrightarrow \{\text{ПО}\}$ :

$$S[p(\tau)] = \int L(\tau; p(\tau)) d\tau = - \int [p(\tau) \ln p(\tau) - (\alpha \tau^2) p(\tau) - \beta p(\tau)] d\tau, \quad (7)$$

где:  $\alpha; \beta$  - множители Лагранжа; последнее слагаемое учитывает условие полноты для плотности вероятности  $p(\tau)$ .

Объявляется вариационный принцип от (7), в котором варьируется  $p(\tau)$ :

$$\delta_{p(\tau)} S[p(\tau)] = \int \frac{\delta L(\tau; p(\tau))}{\delta p(\tau)} \delta p(\tau) d\tau = 0, \quad (8)$$

где:  $\frac{\delta L(\tau; p(\tau))}{\delta p(\tau)}$  - вариационная производная от функции Лагранжа по

распределению времени эксплуатации РЧ, которую далее приравняем = 0:

$$\frac{\delta L(\tau; p(\tau))}{\delta p(\tau)} = 1 - \ln p(\tau) - \alpha \tau^2 - \beta = 0 \quad \text{откуда:}$$

$$\ln p(\tau) = \alpha \tau^2 + 1 - \beta \Rightarrow p(\tau) = \exp(\alpha \tau^2 + 1 - \beta). \quad (9)$$

Из условия нормировки:  $\tau_{cp} = e^{1-\beta}/2\alpha$  и окончательно:

$$p(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right) \quad (10),$$

где  $\sigma_\tau$  - среднеквадратическое отклонение случайной величины - с.в. (времени между двумя присвоениями РЧ) от среднего интервала.

На интерпретации полученного результата следует остановиться особо.

Как следует из (10) промежутки, через которые возобновляются излучения на отдельных РЧ, должны быть рандомизированы. Происходит это в условиях независимости и равнозначности вклада каждого РЭС в формирование общей ЭМО при загрузке электромагнитной энергией отдельных РЧ. Это означает, что ни одна из РЧ частотного ресурса не имеет никаких преимуществ перед другими, т.е. все РЧ в среднем имеют одинаковое число присвоений в процессе функционирования системы. Следствием этого является равные в среднем суммарные отрезки эксплуатации каждой РЧ. Это значит, что при фиксированном объеме частот и неограниченном времени их дежурства условием ЭМС типовых РЭС являются равномерные полигоны частотно-временного и частотно-вероятностного распределений эксплуатации частотного ресурса в пространстве конкурентной борьбы.

Формирование  $R(P_{\omega_i}; \omega_i; t(\omega_i))$  по **сценарию II**: пакеты субчастот (участки занимаемого спектра) периодически обновляются, период -  $\tau^*$ .

В этой ситуации, в общем бесконечный частотный ресурс имеет ограниченный объем в течение фиксированного  $\tau^*$ . Для диагностики  $\tau\left(\frac{\omega_i}{\text{ПО}}\right) \equiv p_2(\tau)$  установим ограничение: на одной РЧ число излучений  $k = 0 \text{ V } 1 \text{ V } 2, (k \leq 2)$ .

Вновь задаётся Лагранжиан и повторяются выкладки (4) - (5). Но теперь выражение (6) – штрафная функция в рамках сценария II задается иначе:  $\pi(\tau) = \alpha \tau$ .

Источником помех по-прежнему является вся совокупность  $\{\text{ПО}\}$ , но действие их на РЧ директивно ограничено численностью ( $k \leq 2$ ) и периодической сменой пакета субчастот  $\{\omega_i\}$ . Поэтому мгновенная мощность их мешающих излучений пропорциональна  $\tau$  и аппроксимируется линейной зависимостью от времени. Затем, так же как в первом сценарии проводится операция усреднения лагранжиана по  $p(\tau)$  и

строится действие ПО  $\Leftrightarrow \{\text{ПО}\}$ , находится вариационная производная и приравняется к нулю:

$$\frac{\delta L(\varphi(\tau); \tau)}{\delta p(\tau)} = 1 - \ln p(\tau) - \alpha\tau - \beta = 0 \quad (11).$$

Решением уравнения (11) является:  $p(\tau) = A \exp(-\alpha\tau)$ ,

где  $A = \int [\exp(-\alpha\tau)]^{-1}$  - статистический интеграл.

При линейной функции штрафов оптимальным распределением с.в. - временных интервалов между двумя появлениями ПО на одной частоте - будет экспоненциальное.

Графически ценность частотного ресурса в такой предельно минимальной (с точки зрения априорной ценности) ситуации будет выглядеть, как представлено на рис.3. В данном случае ( $k \leq 2$ ) особенность  $R(P_{\omega_i}; \omega_i; t(\omega_i))$  заключается в том, что распределение вероятностей  $\left\{ P\left(\frac{\omega_i}{\text{ПО}}\right) \right\}$  - вырождается и не имеет проекции на вероятностно-частотную плоскость.

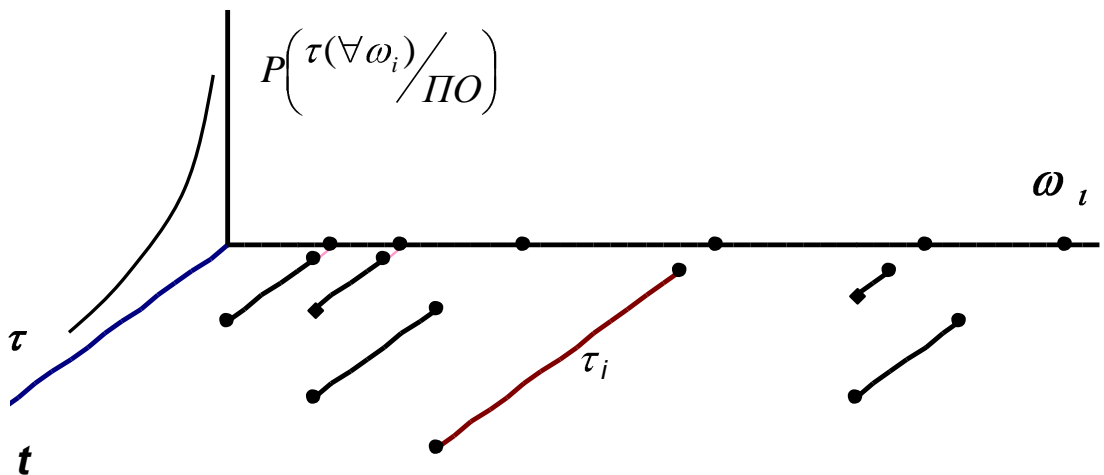


Рис.3. Ценность частотного ресурса радиоэлектронной системы в условиях не более чем двукратного присвоения РЧ для эксплуатации

**Сценарий III:** Теперь допустим, что количество ПО, обратившихся к отдельной РЧ за время  $\tau^*$  м.б. любым, в т.ч. неограниченным. Энергия мешающих воздействий при этом (как и в сценарии II) будет линейно зависеть от  $\tau$ , поскольку все присвоения РЧ будут «сосредоточены» между первым и последним обращением ПО к данной частоте и не будут «выходить» за временные границы  $\tau^*$  - периодической смены  $\{\omega_i\}$ .

Не смотря на то, что из априорного распределения  $\left\{ P\left(\frac{\omega_i}{\text{ПО}}\right) \right\}$  будет сформирован «полновесный» равномерный полигон частотно-вероятностного распределения ценности частотного ресурса, случайная величина - временной интервал между первым и последним появлениями ПО на одной частоте – так же как и в сценарии II будет иметь экспоненциальное распределение. То есть, итог формирования априорной ценности частотного ресурса по сценарию III частично повторяет вывод, полученный в ходе реализации сценария II.

Проведенное обсуждение категории ценности РЧ электромагнитного спектра и её связь с динамикой ЭМО позволяет сделать следующие выводы:

1. Категория ценности рабочих частот электромагнитного спектра обладает количественной мерой в виде мультипликативного функционала. Функционал составлен из времени эксплуатации РЧ и вероятности привлечения её к эксплуатации. Этот

функционал характеризует возможность типовых радиоэлектронных средств достигнуть ЭМС при независимой, но совместной эксплуатации общих РЧ из частотного ресурса, закрепленного за системой.

2. Категория ценности частотного ресурса в формализованной версии позволила через частотно-временные и частотно-вероятностные распределения описать эволюцию ценности РЧ и провести аналогию между ценностью РЧ и ЭМС типовых РЭС.

3. Введено в рассмотрение пространство конкурентной борьбы за обладание ценными рабочими частотами.

4. Установлено, что структура проекций априорных распределений ценности частотного ресурса на плоскости, ограничивающие пространство конкурентной борьбы, будет зависеть от параметров временной стратегии группового использования РЧ, интенсивности привлечения частотного ресурса к эксплуатации, численности РЭС, - всех тех параметров, которые формируют ЭМО.

Таким образом, предложенный функционал, описывая эволюцию ценности, может выступать характеристикой ЭМС в динамике ЭМО, формируемой типовыми РЭС, функционирующих при дефиците рабочих частот электромагнитного спектра.

Литература.

1. Бухвинер В.Е. Оценка качества радиосвязи.-М.: Связь,1974.-224с.
2. Головин О.В. Декаметровая радиосвязь.-М.: Радио и связь, 1990.-240с.
3. Бонгард М.М. О понятии «полезная информация» // Проблемы кибернетики. Вып.9. 1963.-С.71-103.
4. Стратонович Р.Л. Теория информации. -М.: Сов.радио, 1975.-424с.
5. Современная радиоэлектронная борьба. Вопросы методологии. Под ред. Радзиевского. -М.: Радиотехника, 2006.-428с.
6. Владимиров В.И., Шляхин В.М., Лихачёв В.П. Антагонистический конфликт радиоэлектронных систем. Методы и математические модели. -М.: Радиотехника, 2004.-380с.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т.1: Пер. с англ. -М.: Мир, 1984.-528с.
8. Статистическая теория ценности в задачах радиоразведки и безопасности связи /В.Н.Гряник, Л.М.Перерва, В.В.Юдин. -М.: Горячая линия-Телеком, 2005.-202с.
9. Гряник В.Н., Перерва Л.М., Юдин В.В. Прагматика борьбы систем за ценный остродефицитный ресурс. // XII Всероссийский семинар «Нейроинформатика и ее приложения». -Красноярск, 2004.-С.186-187.
10. Орошук И.М. Основные направления применения имитационных помех в системах радиосвязи. Классификация способов имитонападения.//НТК: Безопасность информационных технологий. Пенза, 2001.Т.2.-С.25-28.
11. Шварц Л. Анализ. В 2-х томах.Т.2:-М.: Мир, 1972.-528с.
12. Френкс Л. Теория сигналов. -М.: Сов.радио, 1974.-344с.
13. Варакин Л.Е. Теория систем сигналов. -М.: Сов.радио, 1978.-304с.