

На правах рукописи

Штука Виктор Игоревич

**Лучевой метод в исследованиях одномерных
цилиндрических ударных волн в несжимаемой
упругой и упруговязкопластической средах**

01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук



Комсомольск-на-Амуре – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, зав. лабораторией механики необратимого деформирования ФГБУН Института автоматики и процессов управления ДВО РАН (г. Владивосток)

Ковтанюк Лариса Валентиновна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет» (г. Воронеж)

Шитикова Марина Вячеславовна

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории химических и фазовых превращений в материалах ФГБУН Института машиноведения и металлургии ДВО РАН (г. Комсомольск-на-Амуре)

Потянихин Дмитрий Андреевич

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» (г. Воронеж)

Защита состоится « 08 » февраля 2018 г. в 11:30 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.092.07, созданного на базе ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр-т Ленина, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет» и на сайте <http://www.knastu.ru>.

Автореферат разослан «__» _____ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент



Григорьева А.Л.

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Импульсное или ударное воздействие на материалы издавна используется в технологической практике изготовления и упрочнения изделий (высокоскоростная штамповка, пробивание отверстий, ковка и пр.). Скоротечность происходящих при этом переходных процессов деформирования приводит к тому, что о характере их протекания остаётся судить разве что по достигнутому результату. Использование средств математического моделирования для данной цели встречает свои трудности, главной из которых оказывается принципиально нелинейное явление возникновения и распространения поверхностей разрывов деформаций (ударных волн). Являясь неотъемлемым атрибутом строящихся решений краевых задач динамики деформирования, такие поверхности разрывов в зависимости от характера производимого ударного воздействия и предварительных деформаций в материале в своём продвижении могут менять задающие их параметры (скорость движения, интенсивность разрывов, поляризацию и др.). В отличие от газовой динамики, где в силу изначальной нелинейности теории явления возникновения и распространения ударных волн более всего изучены, в деформируемых средах наряду с деформациями изменения объёма присутствуют ещё и деформации изменения формы. Только при линеаризации систем уравнений процессы распространения объёмных деформаций и деформаций изменения формы разделяются, а учёт нелинейностей приводит к их взаимозависимости и поэтому разрывы на ударных волнах оказываются, как правило, комбинированными. При этом деформации изменения формы в своём распространении по деформируемой среде в общем случае порождают не одну (поперечную, как в линейном приближении), а две поверхности разрывов. И если закономерности распространения объёмных деформаций во многом совпадают с такими же в газовой динамике, являясь более известными, то, следовательно, распространение деформаций изменения формы связано с новыми, неизвестными эффектами.

С целью сосредоточить внимание именно на последних, исключая взаимовлияние деформаций изменения формы и объёма, деформируемую среду полагают несжимаемой. Данное упрощающее предположение используется в настоящей работе. Также с целью упрощения математического аппарата ограничимся только одномерными цилиндрическими ударными волнами, которые в отличие от плоского случая, практически не изучались. При этом проведём необходимое обобщение в методе построения приближённых решений задач ударного деформирования, называемого лучевым методом, и укажем способ использования построенных таким способом прифронтных лучевых разложений для целей выделения разрывов в алгоритмах численных расчётов.

Степень разработанности темы исследований. Условия возникновения поверхностей разрывов при распространении граничных возмущений по деформируемым телам неизменно вызывают интерес исследователей. Вследствие

принципиальной нелинейности данного явления первоначально рассматривались простейшие задачи преимущественно в рамках нелинейной теории упругости (Галин Г.Я., Рахматулин Х.А., Шапиро Г.С., Davison L., Signorini A., Truesdell C.). Особенности образования и закономерности распространения ударных волн, именно как поверхностей разрывов деформаций, предметно изучаются с семидесятых годов прошлого столетия (Багдоев А.Г., Буренин А.А., Гринфельд М.А., Куликовский А.Г., Локшин А.А., Свешникова Е.И., Сагомоян А.Я., Филатов Г.Ф., Чернышов А.Д., Bland D., Voa-The Chu, Chadwick P., Collins W.D., Ting T.C.T., Wesolowski Z.). Позднее были проведены многочисленные обобщения и уточнения первоначальных результатов (Баженов В.Г., Баскаков В.А., Буренин А.А., Быковцев Г.И., Гаврилов С.Н., Ерофеев В.И., Канель Г.И., Кукуджанов В.А., Куликовский А.Г., Локшин А.А., Петров Ю.В., Садовский В.М., Чигарев А.В., Чугайнова А.П., Энгельбрехт Ю.А., Destrade M., Kakar R., Menikoff R., Saccomandi G., Stronge W.J., Yigit A.S.). Однако до настоящего времени о видах ударных волн и параметрах, задающих закономерности их распространения, с достаточной степенью определённости имеем сведения только для изотропной и однородной упругой среды и только в случае одномерных плоских волн. В диссертации часть таких результатов обобщается на случай цилиндрических ударных волн в несжимаемой упругой и упруговязкопластической средах.

Приближённые методы расчётов ударного деформирования базируются чаще всего на методе возмущений (Буренин А.А., Локшин А.А., Рагозина В.Е., Энгельбрехт Ю.А., Hopf E., Whitham G.D. и др.). Различные варианты метода с необходимостью требуют предположений о малости интенсивностей разрывов. Данное ограничение снимается при использовании лучевого метода построения прифронтных разложений решений за поверхностями разрывов. Данный метод построения приближённых решений задач динамики деформируемых сред первоначально предлагался (Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д., Achenbach J.D., Reddy D.R.) для построения приближённых решений за поверхностями разрывов ускорений (слабыми волнами) либо при отсутствии нелинейных эффектов (скорости движения волн постоянны). Ударные волны (поверхности разрывов скоростей) требовали коренной модификации метода, что было предложено позднее (Буренин А.А., Россихин Ю.А.). Таким способом были получены приближённые решения ряда краевых задач нелинейной динамической теории упругости с ударными волнами (Герасименко Е.А., Завертан А.В., Иванова Ю.Е., Локтев А.А., Шитикова М.В.).

Отдельно следует отметить предложение (Буренин А.А., Зиновьев П.В.) использовать прифронтные лучевые разложения для целей выделения разрывов в задачах ударного деформирования. В отличие от газовой динамики, где такая проблема успешно решена (Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Холодов А.С., Moretti G. и др.) в динамике деформируемых тел иными способами решить задачу не удаётся. Ряд задач динамики деформирования с включением асимптотического разложения решения в численную схему расчётов разрешили

Е.А. Герасименко и А.В. Завертан. В диссертации обсуждаются особенности такого подхода для случая близко располагающихся движущихся поверхностей разрывов.

Цель исследования, таким образом, состоит в развитии метода лучевых разложений за поверхностями разрывов деформаций применительно к изучению цилиндрических ударных волн, распространяющихся в предварительно продеформированных несжимаемых упругой и упруговязкопластической средах.

Обозначенная цель формирует следующие задачи исследования:

- Исходя из условий разрешимости системы уравнений в разрывах, являющейся следствием динамических и кинематических условий совместности таких разрывов, установить свойства возникающих цилиндрических ударных волн в несжимаемых упругой и упруговязкопластической средах, указать зависимости скоростей движения возможных ударных волн от предварительных деформаций и изменяющихся интенсивностей разрывов;

- Разработать процедуры построения лучевых прифронтных разложений за возникающими цилиндрическими поверхностями разрывов, указать особенности их изменения при переходе сквозь последующие, близко отстоящие поверхности разрывов;

- Опираясь на краевые условия ударного нагружения, получить замкнутые приближённые решения задач в условиях малости послеударных времён;

- Разработать алгоритмы и численные схемы расчётов, способные на каждом временном шаге расчётов за счёт включения в разностные схемы прифронтных лучевых разложений указывать положение цилиндрических поверхностей разрыва и вычислять интенсивности разрывов на них;

- Установить особенности в разрабатываемых методиках расчётов, вносимые учётом тепловых и реологических свойств деформируемых сред.

Основные положения, выносимые на защиту. В качестве основных положений, выносимых на защиту, отметим:

- Установление теоретического факта о том, что при распространении краевого ударного возмущения по одномерно предварительно продеформированному цилиндрическому слою несжимаемой упругой (упруговязкопластической) среды в ней возникают две ударные волны: волна нагрузки и волна круговой поляризации. Описание свойств таких цилиндрических поверхностей разрывов деформаций и интенсивностей разрывов;

- Развитие метода построения лучевых прифронтных разложений за цилиндрической плоскополяризованной ударной волной нагрузки и за волной круговой поляризации;

- Приближённое решение задачи для случая, когда послеударное время можно считать малым;

- Алгоритмический приём выделения разрывов, основанный на включении прифронтной лучевой асимптотики за цилиндрической поверхностью

разрывов круговой поляризации в конечно-разностную схему расчётов в области, исключая зону, примыкающую к пакету из двух цилиндрических ударных волн;

- Обобщение как метода приближённого решения, так и численного метода на случай, учитывающий вязкопластические свойства среды и случай неизотермического деформирования.

Научная новизна результатов обеспечивается тем, что:

- Показано, что известные результаты для плоских одномерных ударных волн о существовании плоскополяризованных волн нагрузки и круговой поляризации могут быть обобщены на случай одномерных цилиндрических ударных волн;

- Впервые вычислены скорости движения цилиндрических одномерных ударных волн в зависимости от предварительных деформаций и изменяющихся интенсивностей разрывов. Указаны закономерности затухания этих цилиндрических поверхностей разрывов;

- Проведено обобщение лучевого метода построения приближённых решений на случай близко расположенных цилиндрических ударных волн нагрузки и круговой поляризации;

- Предложен алгоритм расчётов цилиндрических ударных волн в несжимаемых средах (упругой и упруговязкопластической) с выделением на каждом временном шаге расчётов положений поверхностей разрывов и расчётом изменяющихся интенсивностей разрывов на этих поверхностях;

- Впервые получены решения динамических одномерных задач (приближённые аналитические и численные) об ударном нагружении несжимаемого упругого и упруговязкопластического цилиндрических слоёв;

- Указаны особенности, вносимые отказом от изотермичности процесса деформирования, на предлагаемые алгоритмы расчётов с выделением разрывов.

Теоретическая значимость результатов диссертации связана со сведениями, полученными в работе о возникновении и закономерностях распространения по несжимаемым средам определённых поверхностей разрывов, которые могут обеспечить корректные постановки краевых задач ударного деформирования и воспользоваться, где это совершенно необходимо, предложенными численными способами расчётов с выделением разрывов без обращения к приближённым приёмам сквозного счёта. Это позволит на модельных примерах дать оценку результатов расчётов с введением искусственной вязкости в прифронтных областях и послужить совершенствованию методов сквозного счёта в целом.

Практическое значение диссертации обусловлено возможностью использования её результатов при решении ряда задач высокоскоростного соударения, при расчётной оптимизации широко используемых технологических операций высокоскоростной штамповки, пробивания технологических отверстий в панелях, поверхностного упрочнения изделий ударом и пр., благодаря применению расширенной методики построения приближённых решений за волнами сильных

разрывов, а также численной реализации алгоритма выделения движущихся поверхностей разрывов, что является важной составляющей методологического аппарата, используемого для достижения поставленных целей.

Достоверность результатов диссертационной работы достигается за счёт использования классических подходов механики твёрдых деформируемых сред в постановках задач, корректным использованием теории условий совместности разрывов на движущихся поверхностях в деформируемых телах, классических приёмов в построении неявных конечно-разностных схем расчётов, сравнением с известными, в том числе с классическими, результатами линейных теорий.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. X Всероссийская конференция по механике деформируемого твёрдого тела, 18 – 22 сентября 2017 г., СГТУ, г. Самара, Россия;
2. II Дальневосточная школа-семинар «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций», 11 – 15 сентября 2017 г., ИМиМ ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия;
3. Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, 11 – 30 апреля 2017 г., ДВФУ, г. Владивосток, Россия;
4. IX Всероссийская конференция по механике деформируемого твёрдого тела, 12 – 15 сентября 2016 г., ВГУ, г. Воронеж, Россия;
5. Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», 12 – 15 сентября 2016 г., ВГУ, г. Воронеж, Россия;
6. Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, 15 – 30 апреля 2015 г., г. Владивосток, Россия;
7. II Дальневосточная молодежная школа-семинар по математическому моделированию в механике, 1 – 5 октября 2014 г., Владивосток, Россия;
8. VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твёрдого тела, 16 – 21 июля 2014 г., ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия;
9. Международной конференции «Успехи механики сплошных сред», 28 сентября – 4 октября 2014 г., ДВФУ, г. Владивосток, Россия;
10. Academic Conference in English of School of Natural Sciences Students, 14 – 15 March 2014, Vladivostok, Russia.

Диссертация в целом докладывалась и обсуждалась на научном семинаре в ИМиМ ДВО РАН (г. Комсомольск-на-Амуре) и объединённом научном семинаре отдела механики сплошных сред в ИАПУ ДВО РАН (г. Владивосток).

Публикации. По теме диссертации было опубликовано 15 работ, пять из которых изданы в ведущих рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК. Список публикаций представлен в конце автореферата.

Личный вклад автора. Все основные результаты, составившие диссертацию, получены автором лично. Соавторы научных публикаций А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк и Г.М. Севастьянов участвовали в постановке задач и обсуждении результатов, а все вычисления были проведены автором.

Структура и объём работы. Диссертация включает в себя введение, 4 главы основного текста, заключение и список литературы из 202 наименований. Работа изложена на 131 странице, содержит 27 рисунков.

Основное содержание работы

Во введении на основе краткого обзора литературных источников формулируется цель и определяются задачи исследования, результаты которого составили содержание диссертации.

Вследствие того, что динамика деформирования содержит в себе широкий спектр интенсивно проводимых исследовательских работ, литературный обзор приходится ограничить только публикациями, наиболее близко примыкающими к теме диссертации. Поэтому без должного внимания оказались работы, достойные отдельного обзора, но посвященные распространению деформаций по стержням, пластинам и оболочкам, поверхностным волнам и волнам на границах раздела сред, задачам акустики в деформируемых твёрдых средах, включая нелинейный раздел последней и др. Таким образом преимущественно обсуждаются особенности распространения возмущений, в частности ударных волн, по объёмным деформируемым телам. Отмечен значительный вклад в изучение нелинейных эффектов деформирования отечественных авторов Бабича С.Ю., Баскакова В.А., Бураго Н.Г., Буренина А.А., Быковцева Г.И., Волчкова Ю.М., Гринфельда М.А., Гузя А.Н., Ерофеева В.И., Коротких Ю.Г., Кукуджанова В.А., Куликовского А.Г., Локшина А.А., Нигула У.К., Садовского В.М., Свешниковой Е.И., Чернышова А.Д., Энгельбрехта Ю.К. Определяющее значение в развитии лучевого метода при изучении волн деформаций в неоднородных средах имеют результаты работ именно отечественных авторов Алексеева А.С., Бабича В.М., Булдырева В.С.,

Заславского Г.М., Молоткова И.А., Поленова В.С., Чигарева А.В., в построениях прифронтовых лучевых разложений решений публикации Буренина А.А., Быковцева Г.И., Вервейко Н.Д., Герасименко Е.А., Завертана А.В., Локтева А.А., Подильчука Ю.Н., Рагозиной В.Е., Россихина Ю.А., Рубцова Ю.К., Шаталова А.Г., Шитиковой М.В. Отмечается безусловный вклад ряда иностранных авторов.

Первая глава диссертации является вводной. В ней формулируются основные соотношения динамики несжимаемой среды а также положения метода лучевых рядов, с помощью которого строятся приближённые решения за поверхностями разрывов и соответствующей модификации, применяемой к задачам с ударными волнами.

Движение среды задаётся способом Эйлера, в качестве тензора деформаций выбирается тензор Альманси. В прямоугольной системе декартовых координат x_i кинематика больших деформаций определяется зависимостями

$$\begin{aligned}
 v_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, & u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
 \alpha_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{km} e_{mj}, \\
 \frac{D e_{ij}}{D t} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} (\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik}) e_{kj} + \frac{1}{2} e_{ik} (\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj}), \\
 \frac{D p_{ij}}{D t} &= \gamma_{ij} - p_{ik} \gamma_{kj} - \gamma_{ik} p_{kj}, & \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u_i , v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек деформируемой среды, α_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси, p_{ij} и $s_{ij} = e_{ij} - e_{ik} e_{kj} / 2$ следует называть компонентами необратимой и обратимой деформации. Дифференциальные зависимости в (1) можно принять в качестве определений для этих составляющих полных деформаций, если объективные производные задать в виде

$$\frac{D n_{ij}}{D t} = \frac{d n_{ij}}{d t} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \quad r_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}, \quad r_{ij} = -r_{ji}. \tag{2}$$

Определение объективной производной в (2) записано для компонент n_{ij} произвольного тензора. Нелинейная часть z_{ij} тензора вращений r_{ij} здесь не записана из-за своей громоздкости; в работе она приведена. Геометрическая корректность кинематических соотношений (1) и (2) обоснована в монографии¹ А.А. Буренина и Л.В. Ковтанюк. Компоненты γ_{ij} тензора источника необратимых деформаций здесь и в диссертации отождествляются с тензором скоростей пластических ε_{ij}^p деформаций, то есть $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$ и следовательно реологическими эффектами при упругом деформировании и при разгрузке будем пренебрегать. Принимаем также упрощающую гипотезу о независимости термодинамических потенциалов (внутренняя энергия, свободная энергия) от необратимых деформаций p_{ij} . Тогда следствием закона сохранения энергии оказывается следующее обобщение формулы Мурнагана и уравнения баланса энтропии s

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}) \text{ при } p_{ij} \neq 0, \\ \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}) \text{ при } p_{ij} = 0, \\ \rho T \frac{ds}{dt} + q_{k,k} &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p.\end{aligned}\tag{3}$$

В (3) σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, W – упругий потенциал, p – добавочное всестороннее давление, ρ , T – плотность среды и температура, s – плотность распределения энтропии, q_k – компоненты вектора потока тепла. Аналог формулы Мурнагана записан здесь для случая используемой далее несжимаемой среды. В качестве условия пластичности используется следующее обобщение условия Губера–Мизеса

$$\begin{aligned}f(\tau_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) &= (\tau_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^p)(\tau_{ji} - \eta \varepsilon_{ji}^p) - 8k^2/3 = 0, \\ \tau_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad \varepsilon_{ij}^p = \psi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \psi > 0.\end{aligned}\tag{4}$$

¹ Буренин, А.А. Ковтанюк, Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. – Владивосток : Дальнаука, 2013. – 312 с.

Здесь k, η – постоянные материала, предел текучести и коэффициент вязкости соответственно. Условие (4) конкретизирует пластический потенциал. Для замыкания системы уравнений (1), (3), (4) следует добавить уравнение движения

$$\sigma_{i,j,j} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \right), \quad (5)$$

и выбрать в (3) зависимость упругого потенциала от обратимых деформаций и температуры T . Далее будет использоваться следующее приближение для такой зависимости

$$W(A_1, A_2, T) = -2\mu A_1 + b A_1^2 - \mu A_2 - a A_1^3 - (\mu - b) A_1 A_2 + \nu T \left(1 - \ln \frac{T}{T_0} \right) - \chi T A_1 + \dots, \quad (6)$$

$$A_1 = \alpha_{kk}, \quad A_2 = \alpha_{ij} \alpha_{ji}.$$

Постоянный параметр μ в (6) отождествляется чаще всего с модулем сдвига; a, b – упругие модели более высокого порядка; постоянные ν и χ являются температурными модулями. При рассмотрении изотермического процесса деформирования два последних выписанных слагаемых в (6) опускаются.

Одним из элементов решения динамических задач оказываются поверхности разрывов, движущиеся по среде согласно некоторому закону $x_i = x_i(y^1, y^2, t)$, где y^β ($\beta = 1, 2$) поверхностные координаты. Разрыв $[f] = f^+ - f^-$ на такой поверхности не может быть произвольным; он и его производные необходимо ограничены геометрическими и кинематическими условиями совместности

$$[f_{,i}] = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] n_i + a^{\alpha\beta} [f]_{,\beta} x_{i,\alpha}, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] = \frac{\delta[f]}{\delta t} - G \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right], \quad \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] = [f_{,k}] n_k, \quad (7)$$

$$a_{\beta\gamma} = x_{i,\beta} x_{i,\gamma}, \quad \tau^{\alpha\beta} \tau_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad x_{i,\beta} = \partial x_i / \partial y^\beta.$$

На поверхностях разрывов деформаций (ударных волнах) имеются ограничения на разрывы, следующие из законов сохранения, называемые динамическими условиями совместности

$$\begin{aligned}
[\rho(v_j n_j - G)] &= 0, \\
[\sigma_{ij}] n_j &= \rho(v_k^+ n_k - G)[v_i], \\
\rho(v_k^+ n_k - G) \left([e] + \frac{[v_k][v_k]}{2} \right) + [q_k] n_k &= \sigma_{ij}^+ [v_i] n_j.
\end{aligned} \tag{8}$$

В условиях совместности разрывов (7) и (8) обозначено: G , n_i – скорость движения поверхности разрывов и компоненты единичной нормали к ней; $a_{\alpha\gamma}$ – компоненты поверхностного метрического тензора; e – плотность распределения внутренней энергии. При условии несжимаемости среды соотношения (7) и (8) упрощаются, в частности тождественно выполняется первое условие из (8), которое характеризует непрерывность плотности на поверхностях разрывов. Полезным оказывается ограничение на разрывы, следующее из второго закона термодинамики, поскольку даже в упругой среде движение ударной волны является необратимым процессом. Посредством анализа динамических условий совместности удаётся сделать заключение о числе ударных волн, их скоростях, а также их интенсивностях как для упругой, так и для упруговязкопластической сред в том числе и для неизотермического процесса.

Вторая глава диссертации посвящена особенностям использования лучевого метода для изучения одномерных цилиндрических ударных волн в несжимаемой упругой среде. В этом случае используемое адиабатическое приближение для упругой среды позволяет исключить температурные слагаемые в (6). Предположение о несжимаемости среды и одномерности её движения заставляет искать решение для компонент перемещений u_r , u_φ , и u_z в цилиндрической системе координат r , φ , z в классе функций

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t), \tag{9}$$

где функция $\psi(r, t)$ определяет центральный угол поворота точки относительно оси симметрии – крутку (рисунок 1), а $u(r, t)$ – её смещение в аксиальном направлении.

Динамическое условие совместности разрывов, следующее из закона изменения импульса (второе равенство в (8)), приводит к соотношениям

$$[\sigma_{rr}] = 0, \quad [\sigma_{r\varphi}] = -\rho G [v_\varphi], \quad [\sigma_{rz}] = -\rho G [v_z]. \tag{10}$$

Первое равенство в (10) служит для вычисления добавочного всестороннего давления $[p]$; два последних задают возможные разрывы и позволяют вычислить скорости возможных поверхностей разрывов в зависимости от предварительного напряжённо-деформированного состояния и интенсивностей разрывов. С использованием определяющих зависимостей (1), (3), (4), (5), (6) и условий совместности разрывов Адамара (7) на ударных волнах в случае одномерного движения (9) эти равенства приводятся к виду

$$\begin{aligned}
[r\psi_{,r}]h + r\psi_{,r}(h - [h]) &= G^2 [r\psi_{,r}], \quad [u_{,r}]h + u_{,r}(h - [h]) = G^2 [u_{,r}], \\
h &= c^2(1 + g_1 m^2 + \dots), \quad [h] = g_1 c^2 [m]((2m - [m]) + \dots), \\
m &= r^2 \psi_{,r}^2 + u_{,r}^2, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad g_1 = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{a-b}{\mu}\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\psi_{,r}^+ = \psi_{,r}$ и $u_{,r}^+ = u_{,r}$, то есть в (11) и в дальнейшем знак «плюс» у величин, вычисляемых непосредственно перед поверхностью разрывов будем опускать. Условие разрешимости системы уравнений в разрывах (11) имеет конечную форму, которую можно получить умножением первого из соотношений (11) на $[u_{,r}]$, второго на $[r\psi_{,r}]$ и вычитанием одного из другого

$$[h](r\psi_{,r}[u_{,r}] - [r\psi_{,r}]u_{,r}) = 0 \tag{12}$$

Соотношение (12) является необходимым условием существования цилиндрических ударных волн в упругих средах. Согласно (12) возможно существование поверхностей сильных разрывов двух типов:

1. Когда условие (12) выполняется за счёт обращения в нуль выражения в круглых скобках, а именно

$$\frac{u_{,r}}{[u_{,r}]} = \frac{r\psi_{,r}}{[r\psi_{,r}]} \tag{13}$$

То есть разрывы градиентов (интенсивности) пропорциональны предварительным деформациям, а волна является плоскополяризованной. Таким образом при $\psi_{,r} = 0$ соответствующий разрыв тоже равен нулю $[\psi_{,r}] = 0$, следовательно и за поверхностью разрывов $\psi_{,r} = 0$. Термодинамическое условие совместности (аналог теоремы Цемпелена для совершенного газа) в дополнении к вышеизложенному делает невозможным существование ударных волн, уменьшающих предварительный сдвиг ($u_{,r}[u_{,r}] \leq 0$). Скорость такой волны (нагрузки) Σ_1 определяется из (11) выражением

$$G_1 = \left(h - [h] + \frac{u_{,r}}{[u_{,r}]} [h] \right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

2. При обращении в нуль первого множителя $[h] = 0$ (что эквивалентно $[m] = 0$) в условии (12) существует другая ударная волна Σ_2 , на которой не происходит изменения предварительного сдвига, а изменяется его направление, почему она и называется волной круговой поляризации. Её скорость полностью определяется

величиной предварительных деформаций

$$G_2 = h^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Не составляет труда показать, что $G_1 > G_2$. Такой вывод справедлив лишь для несжимаемой среды, поскольку порядок следования ударных волн в сжимаемой среде (первой всегда следует квазипродольная волна) определяется исключительно из решения соответствующей краевой задачи. Наличие предварительных деформаций является существенным фактором при сравнении с решавшимися ранее задачами, когда за счёт принятия положения о пребывании среды в свободном состоянии существовала лишь одна ударная волна.

На основании данных о возможных типах и скоростях ударных волн, рассматривается следующая динамическая задача: изотропная несжимаемая упругая среда заполняет пространство между двумя жёсткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями: внутренней (своего рода валом) радиусом r_0 и внешней (обоймой) – R . В окрестности стенок $r = r_0$ и $r = R$ выполняются условия прилипания. Предварительную деформацию считаем антиплоской, то есть до начала ударного нагружения ($t < 0$) вектор перемещений в цилиндрической системе координат имеет одну отличную от нуля компоненту $u(r) \neq 0$. Таким образом, полагаем, что поле перемещений до момента начала нагружения получено в условиях, когда внешний цилиндр остаётся неподвижным, а внутренний – перемещается вдоль оси z (рисунок 2). Определение предварительного состояния производится путём решения соответствующей статической задачи. Последующее ударное воздействие полагается скручивающим и вызванным поворотом вала при неподвижной обойме.

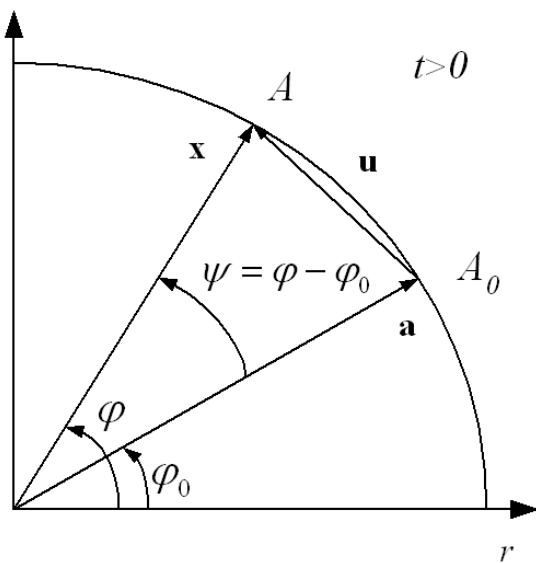


Рис. 1. Кинематика точек слоя

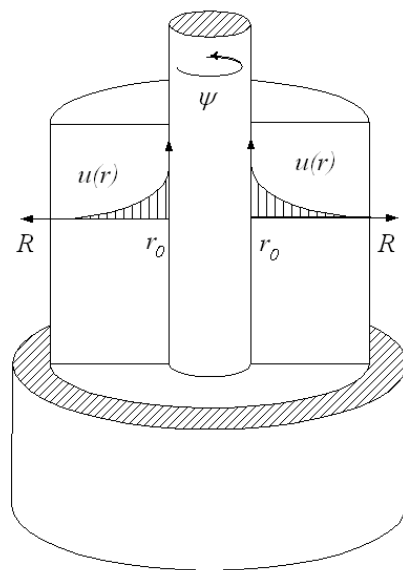


Рис. 2. Состояние упругого слоя

Граничные условия в такой постановке имеют вид

$$u(r_0, t) = u_0, \quad u(R, t) = 0,$$

$$\psi(r_0, t) = \psi_1 t + \psi_2 t^2 / 2, \quad \psi(R, t) = 0. \quad (16)$$

Здесь ψ_1, ψ_2 – коэффициенты, определяющие скорость и ускорение закручивающего воздействия, u_0 – смещение внутреннего цилиндра относительно внешнего, что свидетельствует о наличии предварительной антиплоской деформации.

При этом компоненты уравнения движения (5) представляют собой гиперболическую систему дифференциальных уравнений относительно функций $p(r, t), \psi(r, t), u(r, t)$

$$\begin{aligned} p_{,r} + r^{-1} \left(\mu r^2 \psi_{,r}^2 - \frac{\mu - b}{2} u_{,r}^2 \right) + m_{,r} \left(\frac{\mu + b}{2} + 2\mu g_1 m \right) + \dots &= \rho r \psi_{,t}^2, \\ (\psi_{,rr} + 3r^{-1} \psi_{,r}) (1 + g_1 m^2) + 2g_1 m_{,r} m \psi_{,r} + \dots &= c^{-2} \psi_{,tt}, \\ (u_{,rr} + r^{-1} u_{,r}) (1 + g_1 m^2) + 2g_1 m_{,r} m u_{,r} + \dots &= c^{-2} u_{,tt}, \end{aligned} \quad (17)$$

Добавочное давление полностью определено кинематикой, а представление искомых функций за поверхностями сильных разрывов осуществляется посредством прифронтных разложений в виде рядов, устроенных по типу ряда Тейлора

$$\begin{aligned} u(r, t) &= u(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(t-t_1)^j}{j!} - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{(t-t_2)^j}{j!}, \quad \kappa_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_1}, \quad \omega_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \\ \psi(r, t) &= -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{(t-t_1)^j}{j!} - \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{(t-t_2)^j}{j!}, \quad \lambda_j = \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{t=t_1}, \quad \eta_j = \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad t_\gamma = \int_0^r \frac{d\xi}{G_\gamma(\xi)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для нулевого шага лучевого метода уравнения, следующие из системы соотношений (17), записанные на ударных волнах с использованием кинематических и геометрических условий совместности (7), а также разложений (18), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} &= \kappa_1 \left(-\frac{1}{2} \frac{c}{r} + 10 g_1 \frac{u^3}{c} (\kappa_2 - c^2 u'') \right) + \frac{1}{2} \kappa_2 + \dots, \\ \frac{\delta \eta_1}{\delta t} &= \eta_1 \left(-\frac{3}{2} \frac{c}{r} - \frac{1}{2} \frac{\tau_2}{c} \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} + 2 g_1 \frac{u^3}{c} (\kappa_2 - c^2 u'') \right) + \dots \end{aligned}$$

$$+ g_1 u'^2 \kappa_1 \left(3\eta_1 \left(\frac{u'}{r} + 2 \left(\frac{\kappa_2}{c^2} - u'' \right) \right) + 2 \frac{\eta_2 u''}{c} \right) + \dots, \quad (19)$$

$$\omega_2 = - \frac{r^2 \eta_1 \eta_2}{c u'} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\kappa_1}{c u'} (1 - g_1 u'^4) \right) + \dots.$$

Если поверхности разрывов представляют собой слабые волны или деформируемая среда является физически линейной, то соотношения метода представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения. Однако зависимость скоростей ударных волн от интенсивности граничного воздействия позволяет получить лишь рекуррентные соотношения на разрывы, в которых обязательно будут присутствовать разрывы старших порядков, как $\kappa_2(t)$ и $\eta_2(t)$ в (19). Данное обстоятельство определяет использование дополнительных разложений скачков функций на ударных волнах

$$\kappa_j = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{jk} \frac{t_1^k}{k!}, \quad \kappa_{jk} = \left. \frac{\delta^k \kappa_j}{\delta t^k} \right|_{t_1=0}, \quad \eta_j = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{jk} \frac{t_2^k}{k!}, \quad \eta_{jk} = \left. \frac{\delta^k \eta_j}{\delta t^k} \right|_{t_2=0}, \quad (20)$$

которое переводит систему дифференциальных уравнений (19) с неизвестными функциональными параметрами в систему нелинейных алгебраических соотношений относительно $\kappa_{10}, \kappa_{11}, \kappa_{20}, \eta_{10}, \eta_{11}, \eta_{20}$, решая которую совместно с краевыми условиями (16) удаётся определить коэффициенты искомого разложения, и соответственно напряжённо-деформированное состояние слоя за движущимися поверхностями сильных разрывов.

Приближённое решение для искомого функций при этом выглядят так

$$\begin{aligned} \psi(r, t) = & \left(\psi_1 - (8c^3 r \psi_1 + 4c^2 g_1(u')^3 (22cr\psi_1 u' - r^2 \psi_2 u' + 4cr^2 \psi_1 u'')) + \right. \\ & 100c^2 g_1^3(u')^{11} (-r^2 \psi_2 u' + 2cr\psi_1(u' + 2ru'')) + 40c^2 g_1^2(u')^7 (-r^2 \psi_2 u' + \\ & \left. cr\psi_1(7u' + 4ru'')) \right) \frac{t_2}{8r^2 c (1+5g_1(u')^4)^2 (1+g_1(u')^4)} \times (t - t_2) + \psi_2 \frac{(t-t_2)^2}{2} + \dots, \\ u(r, t) = & u(r) - \left(-\frac{r^2 \psi_1^2}{2cu'} + (8c^2 r^2 \psi_1^2 u' + 4g_1(u')^3 (3cr^3 \psi_1 \psi_2(u')^2 + \right. \\ & c^2 u' (28r^2 \psi_1^2 u' - 2r^3 \psi_1^2 u'')) + 4g_1^2(u')^7 (10cr^3 \psi_1 \psi_2(u')^2 + 2c^2 u' (53r^2 \psi_1^2 u' + \\ & \left. + 10r^3 \psi_1^2 u'')) + 20c g_1^3(u')^{11} (-5r^3 \psi_1 \psi_2(u')^2 + \right. \\ & \left. + cu' (16r^2 \psi_1^2 u' + 30r^3 \psi_1^2 u'')) \right) \frac{t_1}{8r c^2 (u')^2 (1+5g_1(u')^4)^2 (1+g_1(u')^4)} (t - t_1) - \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & - (6cr^2 \psi_1^2 + 2g_1(u')^3 (30cr^2 \psi_1^2 u' + 6r^3 \psi_1 \psi_2 u' - 24cr^3 \psi_1^2 u'')) + \\ & g_1^2(u')^7 (54cr^2 \psi_1^2 u' - 20r^3 \psi_1 \psi_2 u' + 80cr^3 \psi_1^2 u'')) \frac{(t-t_1)^2}{40r c g_1(u')^5 (1+g_1(u')^4)} - \left(\frac{r^2 \psi_1^2}{2cu'} + \right. \\ & \left. \frac{r^4 \psi_1^4}{8c^3 (u')^3} - \left(r^3 \psi_1^3 \left(8c^3 r \psi_1 + 4c^2 g_1(u')^3 (22cr\psi_1 u' - r^2 \psi_2 u' + 4cr^2 \psi_1 u'') \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 100c^2 g_1^3(u')^{11}(-r^2\psi_2 u' + 2cr\psi_1(u' + 2ru'')) + 40c^2 g_1^2(u')^7(-r^2\psi_2 u' + \\
& cr\psi_1(7u' + 4ru'')) \Big) \times \frac{t_2}{16r c^4(u')^3(1+5g_1(u')^4)^2(1+g_1(u')^4)} - (r\psi_1(8c^3 r\psi_1 + \\
& 4c^2 g_1(u')^3(22cr\psi_1 u' - r^2\psi_2 u' + 4cr^2\psi_1 u'')) + 100c^2 g_1^3(u')^{11}(-r^2\psi_2 u' + \\
& 2cr\psi_1(u' + 2ru'')) + 40c^2 g_1^2(u')^7(-r^2\psi_2 u' + cr\psi_1(7u' + \\
& 4ru'')) \Big) \frac{t_2}{8r c^2 u'(1+5g_1(u')^4)^2(1+g_1(u')^4)} \Big) (t - t_2) + \\
& +(6cr\psi_1 + 12g_1(u')^3(5cr\psi_1 u' + r^2\psi_2 u' - 4cr^2\psi_1 u'')) + g_1^2(u')^7(54cr\psi_1 u' - \\
& 20r^2\psi_2 u' + 80cr^2\psi_1 u'') \frac{\psi_1(t-t_2)^2}{40c g_1(u')^5(1+g_1(u')^4)} + \dots.
\end{aligned}$$

Времена достижения ударными волнами соответствующей точки пространства подчиняются зависимостям

$$\begin{aligned}
t_1(r) &= \frac{r - r_0}{c(1 + g_1(5u'^4 + 10u'^3 c^{-1} \kappa_{10} + 10u'^2 c^{-2} \kappa_{10}^2 + 5u' c^{-3} \kappa_{10}^3 + c^{-4} \kappa_{10}^4))/2)} - \\
& - \frac{g_1 \kappa_{11}(10u'^3 c^{-1} + 20u'^2 c^{-2} \kappa_{10} + 15u' c^{-3} \kappa_{10}^2 + 4c^{-4} \kappa_{10}^3)(r - r_0)^2}{4c^2(1 + g_1(5u'^4 + 10u'^3 c^{-1} \kappa_{10} + 10u'^2 c^{-2} \kappa_{10}^2 + 5u' c^{-3} \kappa_{10}^3 + c^{-4} \kappa_{10}^4))/2)^3} + \dots, \\
t_2(r) &= \frac{r - r_0}{c(1 + g_1(u'^4 + 4u'^3 c^{-1} \kappa_{10} + 6u'^2 c^{-2} \kappa_{10}^2 + 4u' c^{-3} \kappa_{10}^3 + c^{-4} \kappa_{10}^4))/2)} - \\
& - \frac{g_1 \kappa_{11}(4u'^3 c^{-1} + 12u'^2 c^{-2} \kappa_{10} + 12u' c^{-3} \kappa_{10}^2 + 4c^{-4} \kappa_{10}^3)(r - r_0)^2}{4c^2(1 + g_1(u'^4 + 4u'^3 c^{-1} \kappa_{10} + 6u'^2 c^{-2} \kappa_{10}^2 + 4u' c^{-3} \kappa_{10}^3 + c^{-4} \kappa_{10}^4))/2)^3} + \dots.
\end{aligned} \tag{22}$$

Представления составляющих перемещения (21) используются для инициализации неявной расчётной схемы с центральными разностями, сконструированной по следующему образцу: область за ударными волнами разбивается регулярной сеткой с шагом Δr по пространственной переменной и Δt по временной, а частные производные в дифференциальных уравнениях (17) заменяются соответствующими конечными разностями. Начиная с определённого момента (q -й итерации), когда за поверхностями разрывов становится возможным запись вторых производных искомым функций по времени, в расчёт входит дискретизированное уравнение движения (17), а также необходимые для представления решения за ударными волнами ряды (18) и разложения (20) с неизвестными коэффициентами $\eta_{l,j}$, $\eta_{2,j}$, $\omega_{1,j}$, $\omega_{2,j}$. Они определяются посредством минимизации невязки системы уравнений текущего шага с использованием метода наименьших квадратов. Эти уточнённые данные позволяют определять положение поверхностей разрывов на следующем шаге, а также значения функций в ближайших к волновому пакету точках, используя лучевые ряды и дополнительные разложения. Таким образом, удалось преодолеть изначальное ограничение, наложенное на малость послеударного времени для приближённого решения, и использовать лучевые разложения в численной схеме расчётов.

На рисунках 3 и 4 представлены эпюры для центрального угла закручивания и эволюция скачка скорости закручивания на волне круговой поляризации, полученные благодаря применению специальной численной схемы расчётов с выделением поверхностей разрывов.

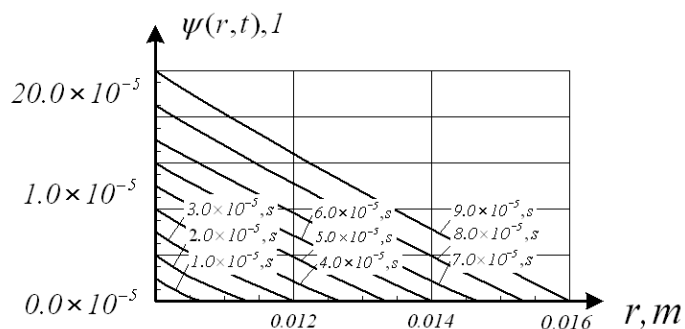


Рис. 3. Крутка $\psi(r, t)$

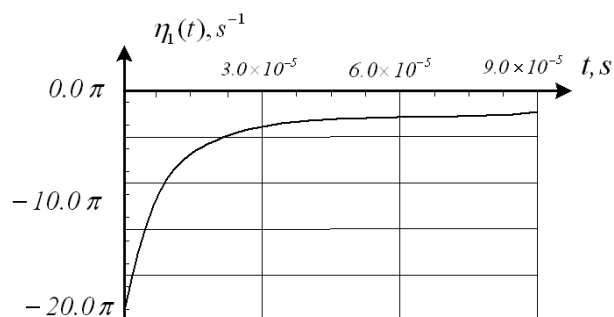


Рис. 4. Эволюция интенсивности скручивающего воздействия $\eta_1(t)$

В третьей главе рассматривается краевая динамическая задача, когда слой, заключённый между двумя цилиндрическими поверхностями, является не упругим, а упруговязкопластическим. Предварительные деформации полагаются скручивающими, а последующее ударное воздействие ($0 \leq t$) обусловлено прямолинейным движением внутреннего цилиндра (рисунок 5). Как и в предыдущей главе, в среде с предварительными деформациями распространяются две поверхности сильных разрывов: волна нагрузки и волна круговой поляризации (рисунок 6). Граничные условия в данной постановке имеют вид

$$\psi(r_0, t) = \psi_0, \quad \psi(R, t) = 0,$$

$$u(r_0, t) = u_1 t + u_2 t^2 / 2, \quad u(R, t) = 0, \quad (23)$$

где u_1, u_2 – коэффициенты, определяющие скорость и ускорение вала в аксиальном направлении, ψ_0 – предварительную крутку (угол поворота внутреннего цилиндра относительно внешнего).

Из решения статической задачи о предварительном скручивающем воздействии получаем, что условие пластичности (4) впервые выполнится в точках поверхности $r = r_0$ в момент времени $t = 0$. Далее для упрощения вычислений полагаем, что начало вязкопластического течения в окрестности внутреннего цилиндра совпадает с моментом ударного воздействия. Таким образом, начиная с момента времени $t = 0$ от поверхности $r = r_0$ развивается область вязкопластического течения, передним фронтом и границей которой является волна нагрузки, следом за которой по области течения распространяется волна круговой поляризации.

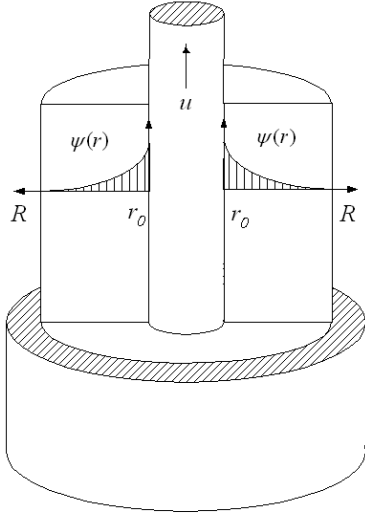


Рис. 5. Состояние слоя (показано распределение $\psi(r)$)

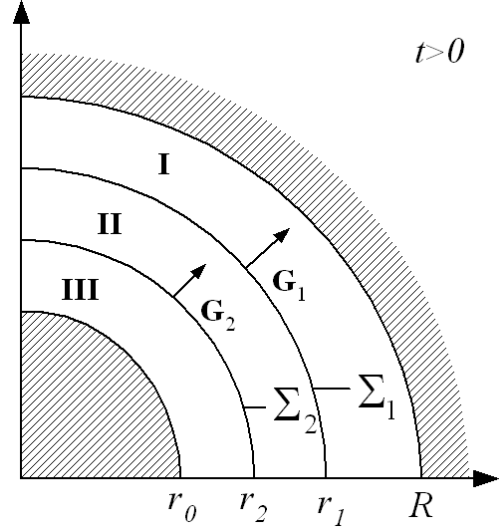


Рис. 6. Распространение двух ударных волн в цилиндрическом слое

Уравнения переноса для компонент необратимых деформаций $p_{r\varphi}$ и p_{rz} в соответствии с (1) имеют вид

$$p_{r\varphi,t} = \varepsilon_{r\varphi}^p - (p_{rr} + p_{\varphi\varphi})(\varepsilon_{r\varphi} - \varepsilon_{r\varphi}^p) - p_{\varphi z}(\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{rz}^p) - \dots,$$

$$p_{rz,t} = \varepsilon_{rz}^p - (p_{rr} + p_{zz})(\varepsilon_{rz} - \varepsilon_{rz}^p) - p_{\varphi z}(\varepsilon_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p) - \dots. \quad (24)$$

Согласно ассоциированному закону течения (4) напряжения связаны со скоростями необратимых деформаций зависимостями

$$\varepsilon_{ij}^p = \left(1 - \frac{\sqrt{8k}}{\sqrt{3\tau_{kl}\tau_{lk}}}\right) \frac{\tau_{ij}}{\eta}, \quad \tau_{ij} = \eta \left(1 + \frac{\sqrt{8k}}{\eta\sqrt{3\varepsilon_{kl}^p\varepsilon_{lk}^p}}\right) \varepsilon_{ij}^p. \quad (25)$$

Соотношения (24), (25) являются справедливыми уже за первой ударной волной. Система уравнения для величин $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\omega_2(t)$ записывается в форме

$$\frac{\delta \lambda_1}{\delta t} = -\lambda_1 \left(\frac{3c}{2r} + g_1 \frac{5e_{r\varphi}^3}{8c} (r\lambda_2 - c^2 e_{r\varphi,r}) \right) + \frac{1}{2} \lambda_2 + \frac{1}{2} \frac{c}{r} [p_{r\varphi,t}] + \dots,$$

$$\frac{\delta \omega_1}{\delta t} = -\omega_1 \left(\frac{1}{2} \frac{c}{r} + 2g_1 \frac{e_{r\varphi}^3}{c} (\omega_2 - c^2 e_{r\varphi,r}) + \frac{1}{2} \frac{\tau_2}{c} \frac{\delta \lambda_1}{\delta t} \right) + \dots \quad (26)$$

$$+ g_1 e_{rz}^2 \kappa_1 \left(3\eta_1 \left(\frac{e_{rz}}{r} + 2 \left(\frac{\kappa_2}{c^2} - e_{rz,r} \right) \right) + 2 \frac{\eta_2 e_{rz}}{c} \right) + \frac{1}{2} c [p_{rz,t}] + \dots,$$

$$\eta_2 = -\frac{\omega_1 \omega_2}{r c e_{r\varphi}} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{r \lambda_1}{c e_{r\varphi}} (1 - g_1 e_{r\varphi}^4) \right) + \dots.$$

Численное моделирование производится аналогично упругой задаче, с тем отличием, что в схему расчётов добавляется система дискретизированных уравнений переноса необратимых деформаций (24). Посредством дискретизации систем дифференциальных уравнений для областей II и III (рисунок 6) и краевых условий (23) после инициализации расчётной схемы на каждой итерации происходит определение и уточнение коэффициентов $\eta_{1,j}$, $\eta_{2,j}$, $\omega_{1,j}$, $\omega_{2,j}$, которые используются для представления искомых функций в ближней зоне за движущимися поверхностями разрывов.

На рисунках 7 и 8 представлены эпюры аксиальной составляющей перемещения и эволюция скачка скорости для предварительно деформированного упруговязкопластического слоя.

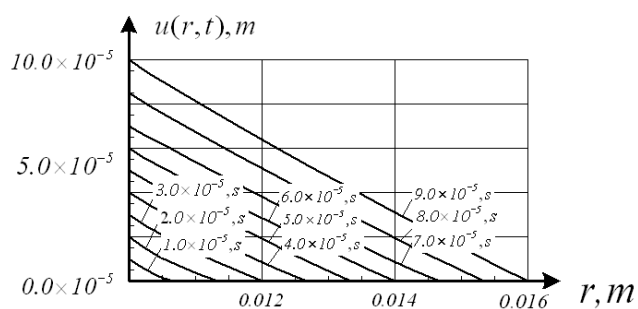


Рис. 7. Аксиальная составляющая перемещения $u(r, t)$

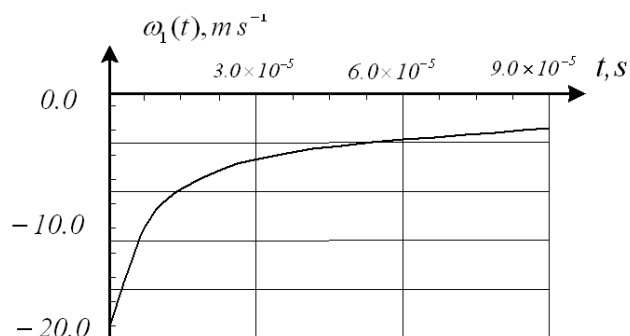


Рис. 8. Эволюция интенсивности разрыва $\omega_1(t)$

В четвёртой главе решается задача о неизотермическом деформировании несжимаемого упругого материала, заключённого между двумя жёсткими коаксиальными цилиндрами. Полагаем, что предварительное деформированное состояние достигнуто за счёт движения внутреннего цилиндра и точек материала по винтовым линиям при неподвижном внешнем цилиндре при комнатной температуре T_0 . К моменту начала ударного нагружения такое состояние характеризуется величинами ψ_0 и u_0 – предварительными круткой и смещением вдоль оси z соответственно.

Последующее ударное воздействие связано с движением внутреннего цилиндра при неподвижном внешнем и разогревом деформируемого материала. Граничные условия такой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(r_0, t) &= \psi_0 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 / 2, \quad \psi(R, t) = 0, \\ u(r_0, t) &= u_0 + u_1 t + u_2 t^2 / 2, \quad u(R, t) = 0, \\ T(r_0, t) &= T_0 (1 + \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 / 2), \quad T(R, t) = T_0, \end{aligned} \quad (27)$$

где $T(r, t)$ – текущая температура. Принимая закон теплопроводности Фурье, согласно уравнению баланса энтропии (3), получаем уравнение теплопроводности вида

$$T_{,rr} + r^{-1}T_{,r} = \frac{1}{2} \frac{\chi}{\alpha} T m_{,t} - \frac{\nu}{\alpha} T_{,t}, \quad (28)$$

где α – коэффициент температуропроводности.

Волновая картина сохраняется, то есть в термоупругой среде с предварительными деформациями также распространяются две ударные волны. Согласно условиям совместности (8) волна круговой поляризации является изотермической поверхностью разрывов, в то время как на волне нагрузки давление и температура испытывают скачок, величина которого полностью определяется интенсивностью ударной волны

$$[T] = \frac{d}{\nu} \left(\frac{3}{2} \gamma [m^2] + \frac{[m^3]}{8} \right) (1 - 2g_3 \gamma)^{-1}, \quad \gamma = \frac{[m]}{4} \frac{\alpha_{rz} - [\alpha_{rz}]}{[\alpha_{rz}]}, \quad g_3 = \frac{\chi}{\nu},$$

$$[p] = -\frac{\mu + b + 2\chi T}{2} [m] - \frac{3}{4} d \left([m^2] + [m^3] \right) - \chi (1 + m - [m]) [T]. \quad (29)$$

Для скоростей распространения термоупругих волн нагрузки и круговой поляризации получим

$$G_1 = c \left(1 + \frac{1}{2} g_2 T - \frac{1}{8} g_3 m + g_1 m^2 + \frac{1}{4} \frac{m^2}{\alpha_{rz}^2} [\alpha_{rz}] (g_3 (1 + g_2 T + g_1 m^2)) - \alpha_{rz} \left(\frac{3}{4} g_2 T + 5g_1 m - \frac{7}{4} g_1 g_3 m^2 \right) \right) + \dots,$$

$$G_2 = c \left(1 + \frac{1}{2} g_2 T + \frac{1}{2} g_1 m^2 + \frac{1}{4} \frac{m^2}{\alpha_{rz}^2} [\alpha_{rz}] (g_3 (1 + g_2 T + g_1 m^2)) - \alpha_{rz} \left(\frac{1}{2} g_2 T + 2g_1 m - \frac{1}{2} g_1 g_3 m^2 \right) \right) + \dots. \quad (30)$$

Далее, как и в предыдущих главах, происходит определение коэффициентов разложений интенсивностей с учётом соотношений (29) и совокупности уравнений метода, аналогичных (19). Для термоупругой задачи такие соотношения имеет вид

$$\frac{\delta \beta_1}{\delta t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{r} + c^2 \frac{\nu}{\alpha} \right) \beta_1 + \frac{1}{2} \left(\beta_2 + \frac{\delta^2 \beta_0}{\delta t^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\chi}{\alpha} c \alpha_{r_z} \left(c (r^{-1} T + T_{,r}) r^{-1} \kappa_1 + \left(T + \frac{1}{2} g_2^{-1} \right) r^{-1} \kappa_2 \right) + \dots, \\
\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} & = - \left(\frac{1}{2} \frac{c}{r} + \frac{c}{r} g_2 T + \frac{1}{2} c g_2 T_{,r} \right) \kappa_1 + \frac{1}{2} g_2 T \kappa_2 - \frac{1}{2} \alpha_{r_z} \frac{\beta_1}{T} + \dots, \\
\lambda_2 & = \frac{\alpha_{r\varphi}}{\alpha_{r_z}} \frac{\kappa_2}{r} + 2cT g_2 \frac{\alpha_{r\varphi}}{\alpha_{r_z}} \frac{\kappa_1}{r} - 2\alpha_{r\varphi} \frac{c^2}{r^2} \frac{\beta_0}{T} + \dots, \\
\frac{\delta \eta_1}{\delta t} & = - \left(\frac{3}{2} \frac{c}{r} + \frac{c}{r} g_2 T + \frac{1}{2} c g_2 \frac{T_{,r}}{T} + r^{-1} \frac{\tau_2}{2} \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} \right) \eta_1 + \frac{1}{2} T g_2 \eta_2 + \dots, \\
\omega_2 & = - \frac{\alpha_{r\varphi}}{\alpha_{r_z}} r \eta_2 - c g_2 T \frac{\alpha_{r\varphi}}{\alpha_{r_z}} \eta_1 + \dots, \\
\beta_j & = \left[\frac{\partial^j T}{\partial t^j} \right]_{t=t_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{jk} \frac{t_1^k}{k!}, \quad \beta_{jk} = \left. \frac{\delta^k \beta_j}{\delta t^k} \right|_{t=0}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (31) с граничными условиями (27) также используется для инициализации расчётной схемы, расширенной на случай температурного и механического взаимодействия. Для этого к дискретизированному уравнению движения добавляется дискретизированное уравнение теплопроводности (28), а температура за волной нагрузки представляется выражением

$$T_{i,j} = T_{i,0} - \beta_{0,j} - (\beta_{1,j} + a_i \Delta t^{-1} (\beta_{1,j} - \beta_{1,j-1})) (t_j - a_i) - \beta_{2,j} (t_j - a_i)^2 / 2.$$

Результаты численного моделирования представлены в виде эпюр ниже. Распределение компонент тензора деформаций $\alpha_{r\varphi}$ и α_{r_z} проиллюстрировано на рисунках 9, 10. Нормированное давление p и относительная температура $\theta = (T - T_0) / T_0$, изображены на рисунках 11 и 12.

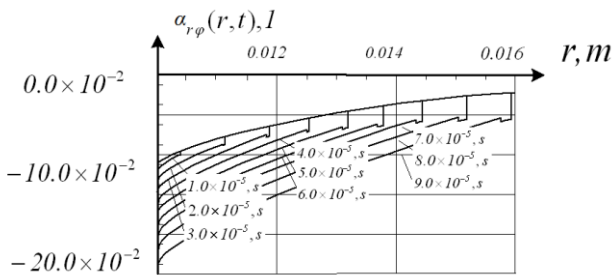


Рис. 9. Компонента $\alpha_{r\varphi}(r, t)$ тензора деформаций

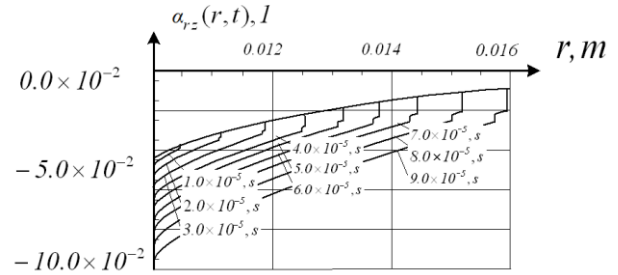


Рис. 10. Компонента $\alpha_{r_z}(r, t)$ тензора деформаций

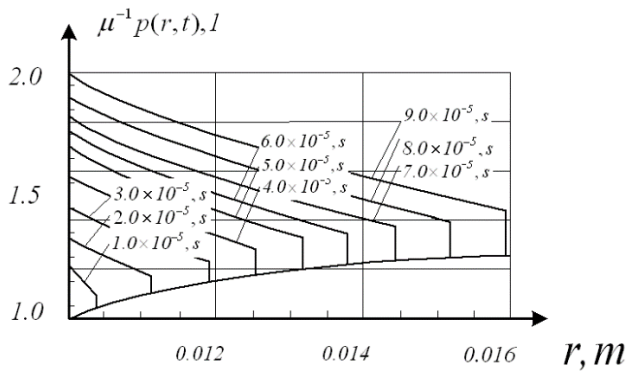


Рис. 11. Нормированное добавочное всестороннее давление $p(r, t) / \mu$

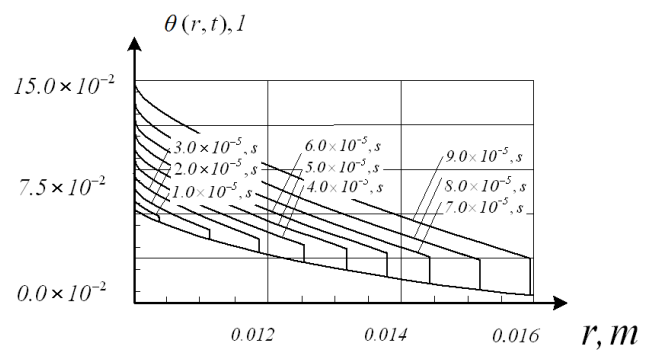


Рис. 12. Относительная температура $\theta(r, t)$

Выяснилось, что температурные эффекты могут оказывать существенное влияние на деформированное состояние слоя, если термоупругие модули в (6) имеют для конкретной среды сравнимые с модулем сдвига значения или их превосходящие.

В заключении обозначены перспективы дальнейшей разработки рассматриваемой тематики, а также приводятся основные результаты диссертационной работы, а именно:

- Показано, что в несжимаемой среде с предварительными деформациями могут существовать и распространяться две поверхности разрывов деформаций: волна нагрузки и волна круговой поляризации. При этом на плоскополяризованной ударной волне может изменяться только интенсивность предварительного сдвига без изменения его направленности, и наоборот: на ударной волне круговой поляризации скачкообразно меняется направленность предварительного сдвига без изменения его суммарной величины;

- Указаны особенности построения приближённых лучевых разложений решений одномерных задач о распространении цилиндрических ударных волн для случая близко расположенных ударных волн. В случае малых послеударных времён построены замкнутые решения задач об ударном нагружении предварительно деформированного цилиндрического слоя несжимаемого упругого (упруговязкопластического) материала;

- Разработанные способы построения лучевых разложений решений нелинейных задач динамики несжимаемых упругой и упруговязкопластической сред за цилиндрическими поверхностями сильных разрывов окажутся необходимой основой для обобщения результатов на случай сжимаемых сред, задач с более сложной геометрией и с другими условиями ударного нагружения;

- Предложенные алгоритмы расчётов, использующие разностные схемы для целей выделения на каждом временном шаге (итерации) положений поверхностей разрывов и вычисления их интенсивностей, позволят не только получить уточнённые результаты расчётов, но и послужат верификации результатов расчётов с использованием различных вариантов широко распространённых схем сквозного счёта.

Публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Ковтанюк, Л.В. Штука, В.И. Исследование цилиндрических ударных волн в упруговязкопластических несжимаемых телах с помощью метода лучевых рядов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2017. – № 2 (32). – С. 119–135.
2. Штука, В.И. Применение лучевого метода в задаче определения напряжённо-деформированного состояния предварительно продеформированного упругого слоя // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2017. – № II – 1 (30). – С 40–44.
3. Буренин, А.А. Севастьянов, Г.В. Штука, В.И. О выделении разрывов в расчетах динамики несжимаемой упругой среды // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 400–411. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.33.
4. Штука, В.И. О расчётах добавочного всестороннего давления в динамике ударного нагружения несжимаемого цилиндрического упругого слоя // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2016. – № 2 (28). – С. 123–131.
5. Севастьянов, Г.М. Штука, В.И. Буренин, А.А. Лучевой метод в приближённом решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 4 (26). – С. 52–60.

Статьи в сборниках и материалах конференций, школ-семинаров:

6. Штука, В.И. Ударные волны в несжимаемом термоупругом цилиндрическом слое // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела, Самара, 18–22 сентября 2017 г. — Т. 2. — Самара: Самарский государственный технический университет, 2017. – С. 291–296.
7. Штука, В.И. Особенности применения лучевого метода при решении нестационарных задач связанной термоупругости с ударными волнами // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций: материалы II Дальневосточной школы-семинара, Комсомольск-на-Амуре, 11–15 сентября 2017 г. / редкол. : А. И. Евстигнеев (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВО «КнАГТУ», 2017. – 96 с. ISBN 978-5-7765-1326-8. – С. 70–73.
8. Штука, В.И. Альтернативный подход в применении лучевого метода на примере одной задачи // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, 11–30 апреля 2017 г. [Электронный ресурс] / отв. ред. А.В. Малюгин. – Электрон. дан. – Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2017. – Режим доступа:

https://www.dvfu.ru/schools/school_of_natural_sciences/sciences/the-conference/new-page.php. – Загл. с экрана. ISSN 2500-3518. – С. 352–354.

9. Штука, В.И. О распространении сдвиговых ударных волн в упругопластической среде с предварительными деформациями // В сборнике трудов международной научно-технической конференции: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики, Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2016. – 423 с. – ISBN 978-5-9907623-3-6. – С. 330–332.

10. Штука, В.И. Лучевой метод в решении нестационарных задач деформирования упруго-вязкопластических материалов // В сборнике трудов IX Всероссийской конференции: Механика деформируемого твердого тела, Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2016. – 226 с. – ISBN 978-5-9907623-2-9. – С. 206–208.

11. Штука, В.И. Определение бассейнов решений в задаче взаимодействия плоской волны нагрузки постоянной интенсивности с границей раздела двух упругих сред. // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, 15–30 апреля 2015 г. [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – Владивосток : Дальневост. федерал. ун-та, 2015. – Режим доступа: http://www.dvfu.ru/science/student_scientific_life/proceedings-of-student-activities/. – Загл. с экрана. ISBN 978-5-7444-3632-2. – С. 232–234.

12. Штука, В.И. Расчёт поля перемещений в задаче нестационарного деформирования несжимаемого упругого слоя постоянной кривизны // II Дальневосточная молодежная школа-семинар по математическому моделированию в механике. Тезисы российской научной молодежной конференции. 1–5 окт. 2014 г., Владивосток: тезисы [Электронный ресурс]. – Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2014. – 114 стр.; объем 1,62 Мб; 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). – С. 110.

13. Штука, В.И. Лучевые асимптотики для осесимметричных ударных волн сдвига в цилиндрическом слое с предварительными деформациями // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела, Чебоксары, 16–21 июля 2014 г. в 2-х частях. – Чебоксары. Чувашский государственный педагогический университет, 2014. – 265 с., 269 с. ISBN 978-5-88297-260-7, 978-5-88297-261-4. Ч. 2. – С. 245–247.

14. Штука, В.И. Определение напряжённо-деформированного состояния цилиндрического слоя построением лучевых асимптотик // Сборник Международной конференции, приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина, 28 сентября – 4 октября 2014 г., Владивосток, Россия. – Иркутск: Издательство «Мегапринт». ISBN 978-5-7442-1574-3. – С. 520–523.

15. Shtuka, V.I. Nonlinear dynamics as a tool of modern science. // Proceedings of the Academic Conference in English of School of Natural Sciences Students, Vladivostok, 14–15 March 2014 [Electronic resource] / [ex. ed. A.V. Malyugin]. – Electr. dat. – Vladivostok : Far Eastern Federal University, 2014. P. 25–26.

Штука Виктор Игоревич

**Лучевой метод в исследованиях одномерных
цилиндрических ударных волн в несжимаемой
упругой и упруговязкопластической средах**

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 03.11.2017 г.

Усл. п. л. 1.3

Уч.-изд. л. 1.1

Формат 60x84/16

Тираж 100 экз.

Заказ 5.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов
управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИАПУ ДВО РАН).

Отпечатано участком оперативной печати ИАПУ ДВО РАН.

690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 5.