УДК 517.956.225

Катрахов В.В., Киселевская С.В.

СИНГУЛЯРНАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТЯХ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ.
I. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Целью работы является изучение сингулярной краевой задачи в областях с угловыми точками (не ограничивая общности, рассмотрен случай одной точки). В первой части приводятся свойства операторов преобразования Пуассона, Сонина, вводятся и изучаются новые функциональные пространства типа Фреше в ограниченной области с гладкой границей, за исключением угловой точки. Эти пространства характеризуются тем, что они содержат все гармонические функции, имеющие произвольные особенности в конечном числе фиксированных точек, а также они шире, чем пространства Соболева-Никольского-Бесова, а вне особой точки совпадают с последними. Вводится понятие σ-следа, доказывается прямая и обратная теорема о следах. Во второй части доказываются вспомогательные теоремы и основной результат, который состоит в однозначной разрешимости соответствующей краевой задачи.

1. Операторы преобразования. Приведём общее определение операторов преобразования. Пусть A и B - некоторые линейные операторы. Операторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}$ называются операторами преобразования, если имеют место формулы:

$$B = \mathcal{P}A\mathcal{S}, \qquad A = \mathcal{S}B\mathcal{P}$$

и операторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}$ взаимно обратны на подходящих функциональных пространствах. Мы будем рассматривать случай, когда A и B будут дифференциальными операторами. В частности, мы возьмём в качестве A и B следующие операторы:

$$A = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad B = B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{2}D,$$

Здесь $D = \frac{d}{dr}$, $D^2 = \frac{d^2}{dr^2}$. Оператор B_ν принято называть оператором Бесселя с параметром ν. В этой ситуации известны (см. [1, с. 92]) следующие операторы преобразования

$$\mathcal{S}_\nu^{\nu-1/2} f(y) = \frac{-2\,\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\,\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^\infty (t^2-y^2)^{\nu-1/2}\,t f(t)\,dt,$$

$$\mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu} f(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(1/2-\nu)}\int\limits_y^\infty (t^2-y^2)^{-\nu-1/2} f(t)\,dt,$$

последняя фрмула определяет оператор $\mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu}$ лишь при $\nu < 1/2$, для остальных значений $\nu > 0$ он определяется с помощью аналитического продолжения по параметру

ν, что в результате приводит к формуле: если для некоторого натурального N, $\nu < N+1/2$

$$\mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu} f(y) = \frac{(-1)^N 2^{-N}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu{+}1)\,\Gamma(N{-}\nu{+}1/2)} \int\limits_y^\infty (t^2-y^2)^{N-\nu-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t}\right)^N f(t)\,dt. \qquad (1)$$

Здесь и всюду ниже через $\Gamma(\mu)$ обозначается Гамма-функция Эйлера. Оператор $\mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu}$ принято называть оператором Пуассона, а оператор $\mathcal{S}_\nu^{\nu-1/2}$ - оператором Сонина.

Введём некоторые обозначения. Пусть R обозначает положительное число или бесконечность. Через $C^\infty(0,R)$ обозначается множество бесконечно дифференцируемых на интервале $(0,R)$ функций. $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\{\circ\}}(0,R)$ обозначает подмножество функций из $C^\infty(0,R)$, имеющих компактный в $[0,R)$ носитель; другими словами это множество функций состоит из бесконечно дифференцируемых на интервале $(0,R)$ функций, обращающихся в нуль в окрестности правого конца, а в левом конце они могут иметь произвольную сингулярность. Через $C^\infty[0,R)$ обозначаем подмножество функций из $C^\infty(0,R)$, все производные которых непрерывны вплоть до левого конца. Символ $\overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$ обозначает подмножество функций из $C^\infty[0,R)$, обращающихся в нуль в окрестности правого конца. Будем называть функцию f из $\overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$ чётной (нечётной), если $D_y^k f(0) = 0$ при всех нечётных (чётных) неотрицательных значениях k. Множество чётных (нечётных) функций обозначим через $C_+^\infty[0,R)$ $\left(C_-^\infty[0,R)\right)$. Пусть $\overset{\circ}{C}{}^\infty_\nu(0,R)$ - множество всех функций f, допускающих представление $f=\mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu} g$, в котором $g\in \overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$, то есть в других обозначениях $\overset{\circ}{C}{}^\infty_\nu(0,R) = \mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu}\ \overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$. Отметим, что к введённому множеству относятся, например, функции вида: $r^{-2\nu} f$ при $\nu>0$, и $(\ln r) f$ при $\nu=0$, где $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty_+\ [0,R)$.

Введённые выше операторы $\mathcal{S}_\nu^{\nu-1/2}$ и $\mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu}$ действительно являются операторами преобразования, поскольку справедлива

Т е о р е м а 1. *Операторы $\mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu}$ и $\mathcal{S}_\nu^{\nu-1/2}$ при $Re\nu \geqslant 0$ взаимно однозначно отображают пространство $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\{\circ\}}\ (0,R)$ на себя и являются взаимно обратными. Имеют место формулы*

$$B_\nu \mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu} = \mathcal{P}_\nu^{1/2-\nu} D^2, \quad D^2 \mathcal{S}_\nu^{\nu-1/2} = \mathcal{S}_\nu^{\nu-1/2} B_\nu.$$

Теорема 1 известна, она доказывалась многими авторами при различных ограничениях (например, в [2, с. 88]).

Лиувиллевский оператор I^μ при $Re\,\mu > 0$ на функциях $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty_{\{\circ\}}\ (0,R)$ определяется по формуле (см. [3, с. 853])

$$I^\mu f(y) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_y^R (t-y)^{\mu-1} f(t)dt,$$

а при $Re\,\mu < 0$ функция $I^\mu f(y)$ определяется следующим образом: если $Re\,\mu > -N$, –

натуральное число или нуль, то

$$I^{\mu}f(y) = \frac{(-1)^N}{\Gamma(\mu+S)} \int\limits_0^R (t-y)^{N+\mu-1} \frac{\partial^S f(t)}{\partial t^N} dt.$$

Операторы I^{μ} взаимно однозначно отображают пространство $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\{\circ\}}(0,R)$ на себя и для них справедливо групповое свойство $I^{\mu}I^{\nu} = I^{\nu}I^{\mu} = I^{\mu+\nu}$.

Теперь можно определить операторы $\mathcal{P}_{\nu}$ и $\mathcal{S}_{\nu}$ при $Re\,\nu > 0$ на функциях $f \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\{\circ\}}(0,R)$ по формуле

$$\mathcal{P}_{\nu}f = \mathcal{P}_{\nu}^{1/2-\nu} I^{\nu-1/2} f, \quad \mathcal{S}_{\nu}f = I^{\,1/2-\nu}\mathcal{S}_{\nu}^{\nu-1/2} f.$$

Из перечисленных выше свойств лиувиллевских операторов и теоремы 1 следует

Теорема 2. *При $Re\,\nu \geqslant 0$ операторы $\mathcal{P}_{\nu}$ и $\mathcal{S}_{\nu}$ взаимно однозначно отображают пространство $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\{\circ\}}(0,R)$ на себя и являются взаимно обратными. Для функции $f \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\{\circ\}}$ $(0,R)$ справедливы следующие формулы $B_{\nu}\mathcal{P}_{\nu}f = \mathcal{P}_{\nu}D^2 f$, $D^2\mathcal{S}_{\nu}f = \mathcal{S}_{\nu}B_{\nu}f$.*

Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu}(0,R)$ (где $s \geqslant 0$ – целое) пополнение множества $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\nu}(0,R)$ по норме: $\| f \|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu}(0,R)} = \| D^s(S_{\nu}f) \|_{L_2(0,R)}$, где L_2 – лебегово пространство.

Теорема 3. *Пусть $\nu > 0$, $s \geqslant 1$, $0 < R < \infty$. Тогда для функции f из множества $\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu}$ $(0,R)$ (после исправления при необходимости её на множестве меры нуль) существует предел $r^{2\nu}f(r)$ при $r \to +0$, причём, справедлива оценка*

$$\left| \, r^{2\nu}f(r) \right|_{r=+0} \left| \leqslant (2R)^{\nu}(\nu+1)^{-s}C(s,R)\|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu}(0,R)}, \right.$$

в которой постоянная $C(s,R) > 0$ не зависит от ν и f.

Данная теорема была доказана в [3] с. 858

Приведём одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *При $\nu > 0$ функции из множества $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\nu}(0,R)$ могут иметь в нуле особенность не выше степенной порядка -2ν.*

Доказательство Пусть $0 < \nu < N + 1/2$ и $f \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}[0,R)$, тогда, используя в формуле (1) оценку производных $|(D_t t^{-1})^N f| \leqslant c\,t^{-2\nu}$, получим

$$\left|\mathcal{P}_{\nu}^{1/2-\nu} f(y)\right| \leqslant c_{\nu} \int\limits_y^R (t^2-y^2)^{N-\nu-1/2} t^{-2\nu}\, dt \leqslant c_{\nu} \int\limits_y^{\infty} (t^2-y^2)^{N-\nu-1/2} t^{-2\nu}\, dt =$$

(используя замену переменной $t^2 = y^2 z$)

$$= c_{\nu} \int\limits_1^{\infty} (z-1)^{N-\nu-1/2} z^{-N-1/2}\, dz < \infty.$$

Так как N было произвольным, то лемма доказана.

2. Функциональные пространства.

Пусть S - единичная окружность в евклидовом двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$. Введём полярные координаты $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Обозначим через S_R круговой сектор радиуса R с центром в точке $\mathcal{O}$ и раствора $\Phi \in (0, 2\pi]$.

Рассмотрим в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ ограниченную область Ω и пусть начало координат $\mathcal{O}$ принадлежит Ω. Будем считать, что при некотором $R_\circ > 0$ пересечение области Ω с кругом с центром в $\mathcal{O}$ и радиуса $2R_\circ$ совпадает с круговым сектором $S_{2R_\circ}$. Кроме того, будем считать, что граница области Ω класса C^∞ за исключением точки $\mathcal{O}$, которая по нашему предположению, является угловой точкой. Пусть $G_{\mathcal{O}} = \partial\Omega \backslash \mathcal{O}$.

Обозначим через $\chi(r)$ бесконечно дифференцируемую функцию на полуоси $[0, \infty)$, равную 1 при $0 \leqslant r \leqslant 1$ и нулю при $r \geqslant 2$, и пусть функция $\chi_{_R}(r) = \chi(r/R)$.

Через $H^s(\Omega)$ будем обозначать пространство Соболева-Никольского-Бесова функций, определённых на Ω и для которых конечна норма вида $\|f\|^2_{H^s} = \sum\limits_{|k| \leqslant s} \|D^k f\|^2_{L_2}$.

Введём пространство $H^s_{loc}(\Omega)$, состоящее из функций f таких, что при любом $R \in (0, R_\circ)$ функция $(1 - \chi_{_R})f$ будет принадлежать пространству $H^s(\Omega)$. Наделим пространство $H^s_{loc}(\Omega)$ топологией, определяемой семейством полунорм

$$\|f\|_{H^s_{loc}} = p_{s,R}(f) = \|(1 - \chi_{_R})f\|_{H^s(\Omega)}, \ 0 < R < R_\circ.$$

Данная топология превращает $H^s_{loc}(\Omega)$ в полное топологическое векторное пространство.

Кроме того, нам потребуется некоторое расширение пространства $H^s(\Omega)$. Введём множество H^s_Δ как обобщённое замыкание множества $C^\infty(\overline{\Omega})$, состоящего из бесконечно дифференцируемых на замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω функций, в лебеговом пространстве $L_2(\Omega)$ по норме

$$\|f\|^2_{H^s_\Delta(\Omega)} = \int\limits_\Omega |f|^2 d\Omega + \sum_{\substack{\alpha+2l=s,\\ |\alpha|\leqslant 1}} \int\limits_\Omega \left|D^{\alpha,l} f\right|^2 d\Omega = \|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{\substack{\alpha+2l=s,\\ |\alpha|\leqslant 1}} \|D^{\alpha,l} f\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{2}$$

здесь $D^{\alpha,l} = D^\alpha \Delta^l$, мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, x_1, x_2 – декартовы координаты, Δ – оператор Лапласа.

Покажем, что H^s_Δ-гильбертово пространство. По теореме о существовании обобщённого замыкания (см., например, [4, с. 95]) достаточно проверить выполнение условия согласования: если последовательность функций $f_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ фундаментальна по норме (2) и $f_n \xrightarrow{L_2(\Omega)} 0$, то и $f_n \xrightarrow{H^s_\Delta(\Omega)} 0$.

Действительно, последовательность функций $D^{\alpha,l} f_n \in C^\infty(\Omega)$ сходится к некоторой функции $g \in L_2(\Omega)$. Пусть $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ как обычно обозначает множество финитных и бесконечно дифференцируемых на Ω функций. Для любой функции h из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{\Omega})$ имеем

$$\int\limits_\Omega D^{\alpha,l} f_n h dt = (-1)^{\alpha+l} \int\limits_\Omega f_n D^{\alpha,l} h dt \to \int\limits_\Omega 0 \cdot D^{\alpha,l} h dt = 0.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_\Omega D^{\alpha,l} f_n h dt \to \int\limits_\Omega g_{\alpha,l} h dt,$$

значит,

$$\int\limits_\Omega g_{\alpha,l} h dt = 0 \ \forall h \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\overline{\Omega}).$$

Отсюда следует, что $g_{\alpha,l}=0$. Тем самым справедливость условия согласования, а вместе с этим и существование указанного обобщённого замыкания пространства $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$ доказано.

Ясно, что $H^s_\Delta(\Omega)$ является гильбертовым пространством.

Перейдём теперь к определению новых функциональных пространств в которых в дальнейшем будет изучаться сингулярная краевая задача.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} D^2_\varphi Y=-\lambda^2 Y,\ \varphi\in[0,\Phi],\\ Y(0)=Y(\Phi)=0.\end{cases}$$

Система, состоящая из функций $\{\sqrt{2/\Phi}\sin(\lambda_k\varphi)\}$, являющихся решением данной задачи, образует ортонормированный базис пространства $L_2(0,2\pi)$. Положим $Y_k=\sqrt{2/\Phi}\sin(\lambda_k\varphi)$.

Введём множество $T^\infty(\Omega_{\mathcal{O}})$ функций $f\in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\mathcal{O})$ для которых в круговом секторе $S_{R_\circ}$ справедливо разложение

$$f=f(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{K}f_k(r)\sqrt{\frac{2}{\Phi}}\sin(\lambda_k\varphi)=\sum_{k=1}^{K}f_k(r)Y_k(\varphi),$$

где

$$f_k(r)=\int\limits_0^\Phi f(r,\varphi)Y_k(\varphi)d\varphi,$$

являются коэффициентами Фурье разложения по ортонормированной системе $\{Y_k\}$. При этом предполагается, что натуральное число K своё для каждой функции f и, что функции $r^{-\lambda_k}\chi_{R_\circ}c(r)f_k(r)$ принадлежат $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\nu}(0,2R_\circ)$. На $T^\infty(\Omega_{\mathcal{O}})$ определим для целых $s\geqslant 0$, и произвольных $R,0<R<R_\circ$ систему норм

$$\|f\|_{s,R}=\left(\sum_k \|\, r^{-\lambda_k}\chi_R f_k\,\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)}+\|\,(1-\chi_R)f\,\|^2_{H^s(\Omega)}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Ясно, что справедливо вложение $T^\infty(\Omega_{\mathcal{O}})\subset H^s_{loc}(\Omega)$ и для любой функции $f\in T^\infty(\Omega_{\mathcal{O}})$ имеет место оценка $\|f\|_{s,R}\geqslant p_{s,R}(f)$. Таким образом, это вложение будет и топологическим (в другой терминологии – непрерывным).

Через $M^s(\Omega)$ обозначим замыкание $T^\infty(\Omega_{\mathcal{O}})$ по топологии, определяемой системой норм (3), при фиксированном s и $R\in(0,R_\circ)$. Эта топология сильнее топологии пространства $H^s_{loc}(\Omega)$, поэтому справедливо вложение $M^s(\Omega)\subset H^s_{loc}(\Omega)$.

Обозначим через $T^\infty_+(\Omega_{\mathcal{O}})$ подмножество функций f из $T^\infty(\Omega_{\mathcal{O}})$, для которых функции f_k удовлетворяют условию $r^{-\lambda_k}f_k\chi_R\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{+}[0,2R_\circ)$.

Пусть функция $f\in T^\infty_+(\Omega_{\mathcal{O}})$. Тогда при любом R из $(0,2R_\circ)$ функция $\chi_R f$ принадлежит $T^\infty_+(S_{2R})$ и выполняется следующее неравенство

$$\|\chi_R f\|^2_{H^s_\Delta(S_{2R})}=\sum_{k=0}^{K}\|r^{-\lambda_k}\chi_R f_k\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu,+}(0,2R)}\geqslant c\sum_{k=0}^{K}\|r^{-\lambda_k}\chi_R f_k\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)}.$$

Следовательно,

$$\|f\|^2_{s,R} \leqslant c\left(\|\chi_R f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\Delta(S_{2R})} + \|(1-\chi_R)f\|^2_{H^s_\Delta(\Omega)}\right). \tag{4}$$

поскольку,

$$\Delta(\chi_R f) = \Delta\sum_k \chi_R f_k Y_k = \sum_k \left[r^{\lambda_k} B^s_{\lambda_k}(r^{-\lambda_k}\chi_R f)\right] Y_k$$

и, поэтому, по равенству Парсеваля

$$\|\chi_R f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2s}_\Delta(S_{2R})} \equiv \|\Delta^s(\chi_R f)\|^2_{L_2(S_{2R})} = \sum_k \int\limits_0^{2R} |r^{\lambda_k} B^s_{\lambda_k}(r^{-\lambda_k}\chi_R f_k)|^2 r\,dr =$$

$$= \sum_k \int\limits_0^{2R} |B^s_{\lambda_k}(r^{-\lambda_k}\chi_R f_k)|^2 r^{2\lambda_k+1}\,dr = \|r^{-\lambda_k}\chi_R f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2s}_{\nu,+}(0,2R)}.$$

В неравенстве (4) выражение справа является при любом $R\in\ (0,R_\circ)$ квадратом одной из эквивалентных норм пространства $H^s_\Delta(\Omega)$.

Отсюда и из того, что множество $T^\infty(\Omega_{\mathcal{O}})$ всюду плотно в $H^s_\Delta(\Omega)$ при чётных s вытекает

Теорема 4. *Для любого* $s\geqslant 0$ *имеет место следующее вложение, понимаемое и в топологическом смысле* $H^s_\Delta(\Omega)\subset M^s(\Omega)\subset H^s_{loc}(\Omega)$.

Отметим, что эта теорема верна на самом деле для любых s, однако, доказательство этого факта требует привлечения теории преобразования Фурье и Ганкеля, на чём останавливаться здесь не будем.

Лемма 2. *Топологии, порождаемые в пространстве* $M^s(\Omega)$ *различными функциями из* X, *равносильны.*

Доказательство. Пусть χ,χ' - две функции из множества X. Покажем, что порождаемые ими топологии равносильны. В самом деле, пусть $R' < R/4$, тогда справедливы следующие два неравенства :

$$\|\chi_R g\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} \leqslant \|\chi_R\chi'_{R'}g\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} + \|\chi_R(1-\chi'_{R'})g\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\|\chi'_{R'}g\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} + \|\chi_R(1-\chi'_{R'})g\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)}\right)$$

и

$$\|(1-\chi_R)f\|_{H^s_\Delta(\Omega)} = \|(1-\chi_R)(1-\chi'_{R'})f\|_{H^s_\Delta(\Omega)} \leqslant c\|(1-\chi'_{R'})f\|_{H^s_\Delta(\Omega)}.$$

Отсюда и из определения норм (3) получим оценку: $\|f\|_{s,R}\leqslant c\|f\|_{s,R'}$. Здесь слева стоит норма порождаемая функцией χ, справа - функцией χ'. Меняя местами χ и χ', получаем противоположную оценку. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пространство* $M^s(\Omega)$ *- полное счётно-нормируемое топологическое пространство, то есть пространство Фреше.*

Доказательство. Рассмотрим счётный набор норм $\|\cdot\|_{s,R_m}$, где $m=1,2,...$ и последовательность $R_m\to +0$ при $m\to\infty$, причём, $R_m < R_\circ$. По предыдущей теореме топология задаваемая этим набором норм будет равносильна исходной. Таким образом, пространство $M^s(\Omega)$ – полное счётно-нормируемое топологическое пространство.

Теорема 5. *Пусть* $0\leqslant s_1 < s_2$. *Тогда* $M^{s_2}(\Omega)$ *непрерывно вложено в* $M^{s_1}(\Omega)$.

Доказательство. Так как для любой функции $g \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}[0,R)$

$$\|g\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_1}(0,R)} = \|D^{s_1} g\|_{L_2(0,R)} \leqslant c(s_2 - s_1, R)\|g\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_2}(0,R)},$$

то

$$\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_k\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_1}_{\nu}(0,2R)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)} \|\mathcal{S}_\nu\big(\chi_R r^{-\lambda_k} f_k\big)\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_1}_{\nu}(0,2R)} \leqslant c(s_1 - s_2, R)\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_k\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_2}_{\nu}(0,2R)}$$

суммируя эти неравенства по k и замечая, что выполняется следующее неравенство $\|(1-\chi_R)f\|_{H^{s_1}(\Omega)} \leqslant c\|(1-\chi_R)f\|_{H^{s_2}(\Omega)}$, получаем оценку вида $\|f\|_{s_1,R} \leqslant c\|f\|_{s_2,R}$, в которой постоянная не зависит от функции $f \in M^{s_2}(\Omega)$. Теорема доказана.

3. Теорема о следах. Перейдём к изучению следов функции на границе области Ω, состоящей из угловой точки $\mathcal{O}$ и остальной части границы. Сначала изучим следы в точке $\mathcal{O}$. Введём операцию усреднения (по угловой переменной)

$$\sigma f(r,\varphi) = \sum_k r^{\lambda_k} f_k(r) Y_k(\varphi) = \frac{2}{\Phi}\sum_k r^{\lambda_k} \sin(\lambda_k \varphi) \int_0^{\Phi} f(r,\varphi') \sin(\lambda_k \varphi') d\varphi'$$

или

$$\sigma f(r,\varphi) = \int_0^{\Phi} f(r,\varphi') \varSigma(r,\varphi,\varphi') d\varphi',$$

где ядро $\varSigma$ интегрального оператора σ задаётся формулой вида

$$\varSigma(r,\varphi,\varphi') = \frac{2}{\Phi}\sum_k r^{\lambda_k} \sin(\lambda_k\varphi) \sin(\lambda_k\varphi').$$

Делая ряд преобразований получим следующий вид ядра:

$$\varSigma = \frac{2r^{\pi/\Phi}(1-r^{2\pi/\Phi})\big(\cos\big(\frac{\pi}{\Phi}(\varphi-\varphi')\big) - \cos\big(\frac{\pi}{\Phi}(\varphi+\varphi')\big)\big)}{\Phi\left(1-2r^{\pi/\Phi}\cos\big(\frac{\pi}{\Phi}(\varphi-\varphi')\big)+r^{2\pi/\Phi}\right)\left(1-2r^{\pi/\Phi}\cos\big(\frac{\pi}{\Phi}(\varphi+\varphi')\big)+r^{2\pi/\Phi}\right)},$$

где $r < 1$.

Для функций $f \in T^{\infty}(\Omega_{\mathcal{O}})$ определим σ-след в точке $\mathcal{O}$ как предел

$$\sigma f\big|_{\mathcal{O}} = \lim_{r \to \mathcal{O}} \sigma f(r,\varphi),$$

понимаемый в классическом поточечном смысле. Из теоремы 3 следует существование σ-следа для функции $f \in T^{\infty}(\Omega_{\mathcal{O}})$, который при этом является тригонометрическим полиномом по синусам.

Понятие σ-следа на всё пространство $M^s(\Omega)$ распространим путём расширения по непрерывности с $T^{\infty}(\Omega_{\mathcal{O}})$. Для этого введём пространство σ-следов $A[0,\Phi]$ как множество функций, определённых на отрезке $[0;\Phi]$ и допускающих разложение в ряд Фурье по синусам $\Psi(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k Y_k(\varphi)$, для которого для любого $h > 0$ конечны нормы

$$\|\Psi\|_h^2 = \sum_k h^{-2k} \mid \Psi_k \mid^2 . \tag{5}$$

Л е м м а 4. *Пространство* $A[0,\Phi]$ *является полным счётно-нормируемым топологическим пространством, то есть пространством Фреше.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем полноту. Пусть $\{\Psi^m\}\subset A[0,\Phi]$ – фундаментальная последовательность. Тогда для любого $h\in(0,1)$ будем иметь $\|\Psi^{m_1}-\Psi^{m_2}\|_h\to 0$ при $m_1,m_2\to\infty$. Поэтому для каждого h найдётся такая функция $g_h(v)$, что $\|g_h\|_h<\infty$ и $\|\Psi^m-g_h\|_h\to 0$ при $m\to\infty$. Из ([5, с. 496]) следует, что функция g_h аналитична на $[0,\Phi]$. Так как выполняется неравенство $\|\Psi\|_h\leqslant\|\Psi\|_{h'}$ при $h'<h$, то из условия $\|g_{h'}-\Psi^m\|_{h'}\to 0$ следует, что $\|g_{h'}-\Psi^m\|_h\mapsto 0$ при $m\to\infty$.

Следовательно, все функции g_h совпадают друг с другом. Эта единственная функция принадлежит пространству $A[0,\Phi]$ и является пределом последовательности $\{\Psi^m\}$ по любой норме (5). Полнота доказана.

Рассмотрим счётное множество норм $\|\cdot\|_{1/m}, m=2,3,\ldots$. Определяемая ими топология равносильна исходной. Покажем это. Для любого h существует m такое, что $1/m<h$, следовательно $\|\cdot\|_{1/m}\leqslant\|\cdot\|_h$. Аналогично, для любого m существует $h=1/m$ такое, что $\|\cdot\|_h\leqslant\|\cdot\|_{1/m}$. То есть, получили, что $1/m=\|\cdot\|_h$, значит, топологии равносильны. Таким образом, пространство $A[0,\Phi]$ счётно-нормируемо. Лемма доказана.

Отметим, что $A[0,\Phi]$ состоит из сужений всех гармонических в секторе $S=S_\infty$ функций и равных нулю на границе этого сектора на часть единичной окружности, лежащей в этом секторе. Гармоническим продолжением функции Ψ из $A[0,\Phi]$ на весь сектор S будет функция

$$f(r,\varphi)=\sum_k\Psi_k r^{\lambda_k}Y_k. \tag{6}$$

Т е о р е м а 6. [прямая теорема о σ-следах]. *Пусть* $s\geqslant 2$. *Тогда для каждой функции* f *из пространства* $M^s(\Omega)$ *существует* σ-*след* $\sigma f\big|_{\mathcal{O}}\in A[0,\Phi]$. *При этом оператор* $f\mapsto\sigma f\big|_{\mathcal{O}}$ *непрерывно отображает* $M^s(\Omega)$ *в пространство* $A[0,\Phi]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать то, что данный оператор непрерывно отображает пространство $T^\infty(\Omega_{\mathcal{O}})$ с индуцированной пространством $M^s(\Omega)$ топологией в пространство $A[0,\Phi]$. Для этого необходимо доказать, что для любого $h>0$ существует такое число $R\in(0,R_\circ)$ и такая константа $c>0$, что для любой функции $f\in T^\infty(\Omega_{\mathcal{O}})$ справедлива следующая оценка $\|\sigma f\big|_{\mathcal{O}}\|_h\leqslant c\|f\|_{s,R}$.

Пусть f_k - коэффициент разложения функции f по сферическим гармоникам Y_k. Тогда функции $r^{-\lambda_k}\chi_R f_k$ принадлежат пространству $\overset{\circ}{C}{}^\infty_\nu\ (0,2R)$, а значит и пространству $\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)$. Известно из [3, стр. 858], что для любой функции $g\in\overset{\circ}{H}{}^s_\nu\ (0,2R)$ справедлива оценка

$$\left|\sigma_\nu(r)g(r)\right|_{r=0}\leqslant C(s,R)(4R)^\nu(\nu+1)^{-s}\|g\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)},$$

если $s\geqslant 1,\ \nu\geqslant 0,\ s+\nu>1$. Здесь $\sigma_\nu(r)=r^{2\nu}$, при $\nu>0$ и $\sigma_\circ(r)=(ln\frac{1}{r})^{-1}$. Полагая в вышеприведённом неравенстве $g=r^{-\lambda_k}f_k\chi_R$, получим

$$\left|\sigma_\nu(r)r^{-\lambda_k}f_k\big|_{r=0}\right|\leqslant C(s,R)(4R)^k(k+1)^{-s}\parallel\chi_R r^{-\lambda_k}f_k\parallel_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)}.$$

Далее, так как сигма след $\sigma f\big|_{\mathcal{O}}=\sum_k\sigma_\nu r^{-\lambda_k}f_k(r)\big|_{r=\circ}\sin(\lambda_k\varphi)$, то для любого $h>0$ из предыдущей оценки получаем

$$\parallel\sigma f\ |_{\mathcal{O}}\|_h^2=\sum_k\left|\sigma_\nu r^{-\lambda_k}f_k\big|_{r=\circ}\right|^2h^{-2k}\leqslant$$

$$\leqslant C(s,R)\sum_k (4R)^{2k}(k+1)^{-2s}h^{-2k}\parallel \chi_R r^{-\lambda_k} f_k \parallel^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} \leqslant$$

$$\leqslant C(s,R)\sum_k \parallel \chi_R r^{-\lambda_k} f_k \parallel_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} \leqslant C(s,R)\parallel f \parallel^2_{s,R},$$

где положено, например, $R = 1/4h$. Теорема доказана.

Лемма 5. *Любая функция u из $H^s_{loc}(\Omega), s \geqslant 2$, гармоническая в Ω и равная нулю на Γ, принадлежит пространству $M^s(\Omega)$.*

Теорема 7. [Обратная теорема о σ-следах]. *Отображение $\Psi \mapsto f$, задаваемое формулой*

$$f(r,\varphi) = \sum_k r^{-\lambda_k}\Psi_k Y_k(\varphi), \;\; \Psi_k = \int\limits_0^\Phi \Psi(\varphi)Y(\varphi)\,d\varphi, \tag{7}$$

при $s > 0$ непрерывно из $A[0,\Phi]$ в $M^s(\Omega)$, при этом $\sigma f\big|_{\mathcal{O}} = \Psi$.

Доказательство. Отметим, что так как $\Psi \in A[0,\Phi]$, то ряд (7) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{S}$ вне любой окружности с центром в $\mathcal{O}$ к гармонической (значит, к вещественно-аналитической) функции.

Пусть сначала $s \geq 2$ – чётное число. Тогда используя свойства операторов преобразования (см. теорему 2), получаем

$$\|\chi_R r^{-2\lambda_k}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} \leqslant \frac{2\pi}{2^{2\lambda_k+1}\Gamma^2(\lambda_k+1)}\|D^s\mathcal{S}_\nu(\chi_R r^{-2\lambda_k})\|^2_{L_2(0,2R)} = \tag{8}$$

$$= \frac{2\pi}{2^{2\lambda_k+1}\Gamma^2(\lambda_k+1)}\|\mathcal{S}_\nu B_\nu^{s/2}(\chi_R r^{-2\lambda_k})\|_{L_2(0,2R)}.$$

Применяя соотношение Дарбу-Вайнштейна $r^{2\mu}B_\mu r^{-2\mu} = B_{-\mu}$ получаем

$$\|\chi_R r^{-2\lambda_k}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} \leqslant \frac{2\pi}{2^{2\lambda_k+1}\Gamma^2(\lambda_k+1)}\|\mathcal{S}_\nu(r^{-2\lambda_k}B_{-\nu}^{s/2}\chi_R)\|^2_{L_2(0,2R)}. \tag{9}$$

Так как функция $\chi_R(r) = 1$ при $0 \leqslant r \leqslant R$, то

$$B_{-\nu}\chi_R(r) = r^{2\lambda_k-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{1-2\lambda_k}\frac{\partial \chi_R}{\partial r}\right) = 0$$

при тех же значениях r. Значит, $B_{-\nu}^{s/2}\chi_R(r) = 0$ при $r \leqslant R$, а также и при $r \geqslant 2R$, поскольку $\chi_R(r) = 0$ при $r \geqslant 2R$. Отсюда следует, что функция $B_\nu^{s/2}\chi_R(r)$ бесконечно дифференцируема, имеет компактный носитель и обращается в нуль вблизи начала. Следовательно, из формулы (9) получаем

$$\|r^{-2\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} \leqslant 2\int\limits_R^{2R}|B_{-\nu}^{s/2}\chi_R(r)|^2 r^{1-2\lambda_k}dr. \tag{10}$$

Так как $\chi(t) \in C^\infty[1,2]$, то имеет место оценка

$$\|r^{-2\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} \leqslant 2R^{2-s-2\lambda_k}\int\limits_1^2|B_{-\nu}^{s/2}\chi(t)|^2 t^{1-2\lambda_k}dt \leqslant \tag{11}$$

$$\leqslant c(s,R)R^{-2\lambda_k}(1+\lambda_k)^{s-1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|r^{-2\lambda_k}\Psi_k\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} \leqslant c\sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k|^2R^{-2\lambda_k}(1+\lambda_k)^{s-1}. \tag{12}$$

Оценим теперь выражение $\|(1-\chi_R)\|_{H^s_\Delta(\Omega)}$.

Функция $\chi_{\overline{R}}(r)=1$ на Ω и поэтому

$$\|(1-\chi_R)f\|^2_{H^s_\Delta(\Omega)} = \|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)f\|_{H^s_\Delta(\Omega)} \leqslant \|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s(S_{2\overline{R}})},$$

Из теоремы 5 вытекает формула

$$\|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s(S_{2\overline{R}})} = \sum_{k=0}^{\infty}\|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)r^{-\lambda_k}f_k\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu,+}(0,2\overline{R})} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k|^2\|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)r^{-2\lambda_k}\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu,+}(0,2\overline{R})} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k|^2\int\limits_R^{2\overline{R}}|B_\nu^{s/2}(\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)r^{-2\lambda_k})|^2r^{2\lambda_k+1}dr =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k|^2\int\limits_R^{2\overline{R}}|B_{-\nu}^{s/2}(\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)|^2r^{1-2\lambda_k}dr,$$

где ещё раз использовалось соотношение Дарбу-Вайнштейна.

Справедлива следующая оценка

$$\max_r|B_{-\nu}^{s/2}\left(\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)\right)|\leqslant c(1+\lambda_k)^s,$$

где постоянная $c>0$ зависит от s, R, $\overline{R}$, χ, но не зависит от k. Объединяя две последние формулы, получаем

$$\|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s(S_{2\overline{R}})} \leqslant c\sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k|^2(1+\lambda_k)^s\int\limits_R^{2\overline{R}}r^{1-2\lambda_k}dr \leqslant \tag{13}$$

$$\leqslant c'\sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k|^2(1+\lambda_k)^{s-1}R^{-2\lambda_k},$$

где постоянная $c'>0$ не зависит от Ψ. При $h<R$ из (12) и (13) теперь получаем

$$\|f\|^2_{s,R} = \sum_{k=0}^{\infty}\|\chi_Rr^{-2\lambda_k}\Psi_k\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)} + \|(1-\chi_R)f\|^2_{H^s_\Delta(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k|^2h^{-2\lambda_k} = c\|\Psi\|^2_h,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от Ψ. Теорема доказана.

Литература:

1. Бейтемен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции.Т2. – М., Наука, 1974. – 296 с.

2. Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы // Сибирский математический журнал.– 1980.–Т. 21, №1. – с. 86-97.

3. Катрахов В.В. Об одной сингулярной краевой задаче для уравнения Пуассона // Математический сборник. – 1991. – Т. 182, №6. – с. 849-876.

4. Катрахов В.В., Мазелис Л.С. Непрерывность, пополнение, замыкание в метрических пространствах. – Владивосток, изд-во ДВГУ, 2000. – 112 с.

5. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М., Наука, 1974. – 808 с.

Информация об авторах:

Катрахов Валерий Вячеславович,
дом.адрес.: г.Владивосток ул. Нейбута 21-77,
место работы: Институт Прикладной Математики ДВОРАН,
должность: ведущий научный сотрудник.

Киселевская Светлана Викторовна,
дом.адрес.: г.Владивосток ул. Гризодубовой 55-100,
место работы: Владивостокский Государственный Университет Экономики Сервиса,
кафедра математики и моделирования,
должность: ассистент.