

Сачко Максим Анатольевич, Кривошеев Владимир Петрович

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Владивосток, Россия

Эффективный метод расчёта расширенных амплитудно-фазовых характеристик с использованием биннома Ньютона

Рассматривается метод преобразования полиномов передаточной функции в комплексное выражение амплитудно-фазовой характеристики с использованием биннома Ньютона. Приводятся блок-схема алгоритма расчета описанного метода на ЭВМ и вариант его алгоритмизации на языке программирования C++. Рассматривается пример нахождения амплитудно-фазовой характеристики эквивалентного объекта каскадной системы управления.

Ключевые слова и словосочетания: автоматическая система регулирования, передаточная функция, полиномы, бинном Ньютона, расширенная амплитудно-фазовая характеристика.

Динамические свойства отдельного линейного звена или линейной системы управления по выбранному каналу передачи воздействия можно описать математическими выражениями следующего вида [3]:

1) дифференциальным уравнением

$$a_h \frac{d^h x(t)}{dt^h} + a_{h-1} \frac{d^{h-1} x(t)}{dt^{h-1}} + \dots + a_0 x(t) = b_g \frac{d^g y(t)}{dt^g} + b_{g-1} \frac{d^{g-1} y(t)}{dt^{g-1}} + \dots + b_0 y(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ – входное воздействие;

$y(t)$ – выходной сигнал (управляемая переменная);

$a_h, a_{h-1}, \dots, a_0, b_g, b_{g-1}, \dots, b_0$ – постоянные коэффициенты, определяемые физическими параметрами звена (системы). Для физически реализуемых систем $g \leq h$;

2) передаточной функцией

$$W(S) = \frac{y(S)}{x(S)} = K \frac{\sum_{i=0}^g b_i S^i}{\sum_{k=0}^h a_k S^k}, \quad (2)$$

где S – оператор Лапласа;

K – коэффициент усиления;

$y(S)$ и $x(S)$ – изображения по Лапласу соответственно $y(t)$ и $x(t)$ при нулевых начальных условиях;

3) амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) или комплексной передаточной функцией

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = K \frac{\sum_{i=0}^g b_i (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^h a_k (j\omega)^k}, \quad (3)$$

где $y(j\omega)$ и $x(j\omega)$ – преобразования Фурье соответственно сигналов $x(t)$ и $y(t)$.

Среди перечисленных видов описаний динамических звеньев широко используются передаточные функции и АФХ. Причём при параметрическом синтезе систем управления для выполнения условий по качеству применяют расширенные АФХ (РАФХ) [2]. РАФХ получают из передаточной функции (2), придавая оператору Лапласа выражение, содержащее показатель качества системы управления, например

$$S = \omega \cdot (j - m), \quad (4)$$

где m – степень колебательности.

Подставив (4) в (2) получим:

$$W(j\omega, m) = K \frac{\sum_{i=0}^g b_i \cdot \omega^i \cdot (j - m)^i}{\sum_{k=0}^h a_k \cdot \omega^k \cdot (j - m)^k}. \quad (5)$$

Получение РАФХ из передаточной функции. Для построения графиков РАФХ необходимо функцию (5) представить в виде комплексного выражения с мнимой и действительной частями. Для этого необходимо сначала освободиться от мнимости в знаменателе при помощи умножения числителя и знаменателя на выражение, сопряжённое знаменателю. Основная сложность преобразования заключается в получении

$\text{Re}(\omega, m)$ и $\text{Im}(\omega, m)$ из выражения $(j-m)^k$, так как в передаточной функции может быть различная величина степени полинома k , в зависимости от описываемого объекта.

Выражение разности двух слагаемых в заданной степени можно разложить последовательным перемножением. Использовать подобный подход решения этой задачи при алгоритмизации возможно в двух случаях: если использовать алгоритм перемножения разности слагаемых друг на друга или если рассчитанный ранее результат использовать как шаблон для решения задач для заданной степени полинома. Однако указанный подход имеет большой недостаток, поскольку расчет полиномов ограничивается величиной степени разности слагаемых.

Представление полиномов числителя и знаменателя любого порядка в РАФХ (5) комплексными выражениями возможно при наличии алгоритма раскрытия разности $(j-m)^n$ для любой степени n . С этой целью рассмотрим j и m элементами бинома Ньютона [1] и получим следующее выражение:

$$(j+m)^n = j^n + C_n^1 \cdot j^{n-1} \cdot m + C_n^2 \cdot j^{n-2} \cdot m^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot j \cdot m^{n-1} + m^n, \quad (6)$$

где
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Для применения уравнения (6) в функции (5) поменяем знак у степени колебательности на отрицательный и после преобразования получим:

$$(j-m)^n = j^n + (-m)^n + \sum_{p=1}^{n-1} (C_n^p \cdot j^{n-p} \cdot (-m)^p) \quad (7)$$

РАФХ представим в виде суммы мнимой и действительной частей:

$$W(j\omega, m) = \text{Re}(\omega, m) + j \text{Im}(\omega, m) \quad (8)$$

Для приведения функции (5) к виду (8) представим числитель и знаменатель функции (5) комплексными выражениями

$$\text{Re}(\omega, m) + j \text{Im}(\omega, m) = K \frac{\text{Re}_{\text{числ}}(\omega, m) + j \text{Im}_{\text{числ}}(\omega, m)}{\text{Re}_{\text{знам}}(\omega, m) + j \text{Im}_{\text{знам}}(\omega, m)} \quad (9)$$

С учётом (5) и (7) в выражении (9) получим:
для чётных степеней полиномов

$$\text{Re}_{\text{числ}}(\omega, m) = \sum_{i=0}^g \left[b_i \cdot \omega^i \cdot \left(-1^{i/2} + (-m)^i + \sum_{p=2,4,6,\dots}^{i-1} (C_i^p \cdot (-1)^{(i-p)/2} \cdot (-m)^p) \right) \right] \quad (10)$$

$$\text{Im}_{\text{числ}}(\omega, m) = \sum_{i=0}^g \left[b_i \cdot \omega^i \cdot \left((-m)^i + \sum_{p=1,3,5,\dots}^{i-1} (C_i^p \cdot (-1)^{(i+3-p)/2} \cdot (-m)^p) \right) \right], \quad (11)$$

$$\text{Re}_{\text{знам}}(\omega, m) = \sum_{k=0}^h \left[a_k \cdot \omega^k \cdot \left(-1^{k/2} + (-m)^k + \sum_{p=2,4,6,\dots}^{k-1} (C_k^p \cdot (-1)^{(k-p)/2} \cdot (-m)^p) \right) \right], \quad (12)$$

$$\text{Im}_{\text{знам}}(\omega, m) = \sum_{k=0}^h \left[a_k \cdot \omega^k \cdot \left((-m)^k + \sum_{p=1,3,5,\dots}^{k-1} (C_k^p \cdot (-1)^{(k+3-p)/2} \cdot (-m)^p) \right) \right], \quad (13)$$

для нечётных

$$\text{Re}_{\text{числ}}(\omega, m) = \sum_{i=0}^g \left[b_i \cdot \omega^i \cdot \left((-m)^i + \sum_{p=1,3,5,\dots}^{i-1} (C_i^p \cdot (-1)^{(i-p)/2} \cdot (-m)^p) \right) \right], \quad (14)$$

$$\text{Im}_{\text{числ}}(\omega, m) = \sum_{i=0}^g \left[b_i \cdot \omega^i \cdot \left(-1^{(i+3)/2} + (-m)^i + \sum_{p=2,4,6,\dots}^{i-1} (C_i^p \cdot (-1)^{(i+3-p)/2} \cdot (-m)^p) \right) \right], \quad (15)$$

$$\text{Re}_{\text{знам}}(\omega, m) = \sum_{k=0}^h \left[a_k \cdot \omega^k \cdot \left((-m)^k + \sum_{p=1,3,5,\dots}^{k-1} (C_k^p \cdot (-1)^{(k-p)/2} \cdot (-m)^p) \right) \right], \quad (16)$$

$$\text{Im}_{\text{знам}}(\omega, m) = \sum_{k=0}^h \left[a_k \cdot \omega^k \cdot \left(-1^{(k+3)/2} + (-m)^k + \sum_{p=2,4,6,\dots}^{k-1} (C_k^p \cdot (-1)^{(k+3-p)/2} \cdot (-m)^p) \right) \right], \quad (17)$$

Если описываемый канал передачи воздействия содержит звено чистого запаздывания с передаточной функцией $W(S) = e^{-\tau S}$, то его амплитудно-фазовая характеристика с использованием формулы Эйлера представляется в виде:

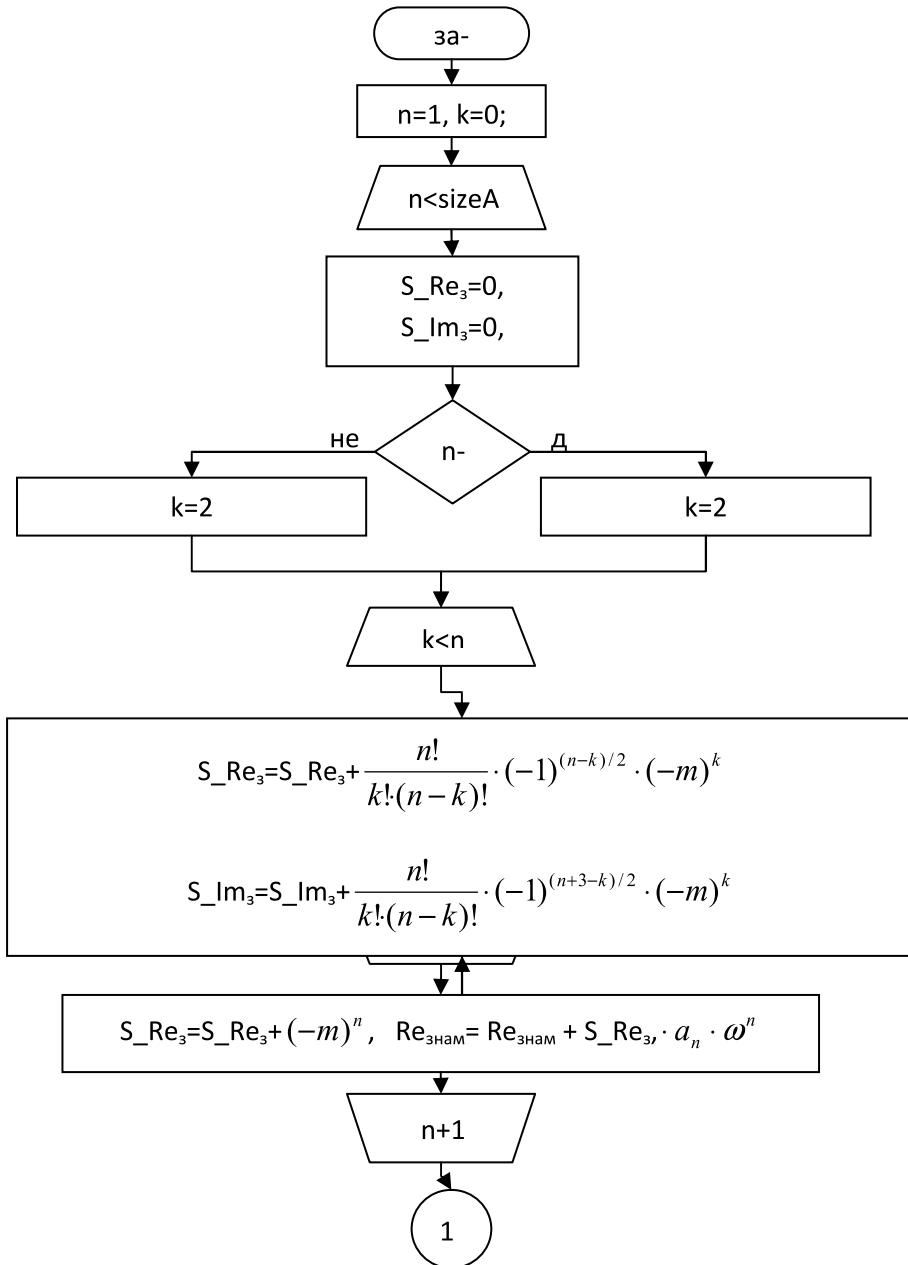
$$e^{-\tau(j\omega - m\omega)} = e^{\tau m\omega} \cdot (\cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau)) \quad (18)$$

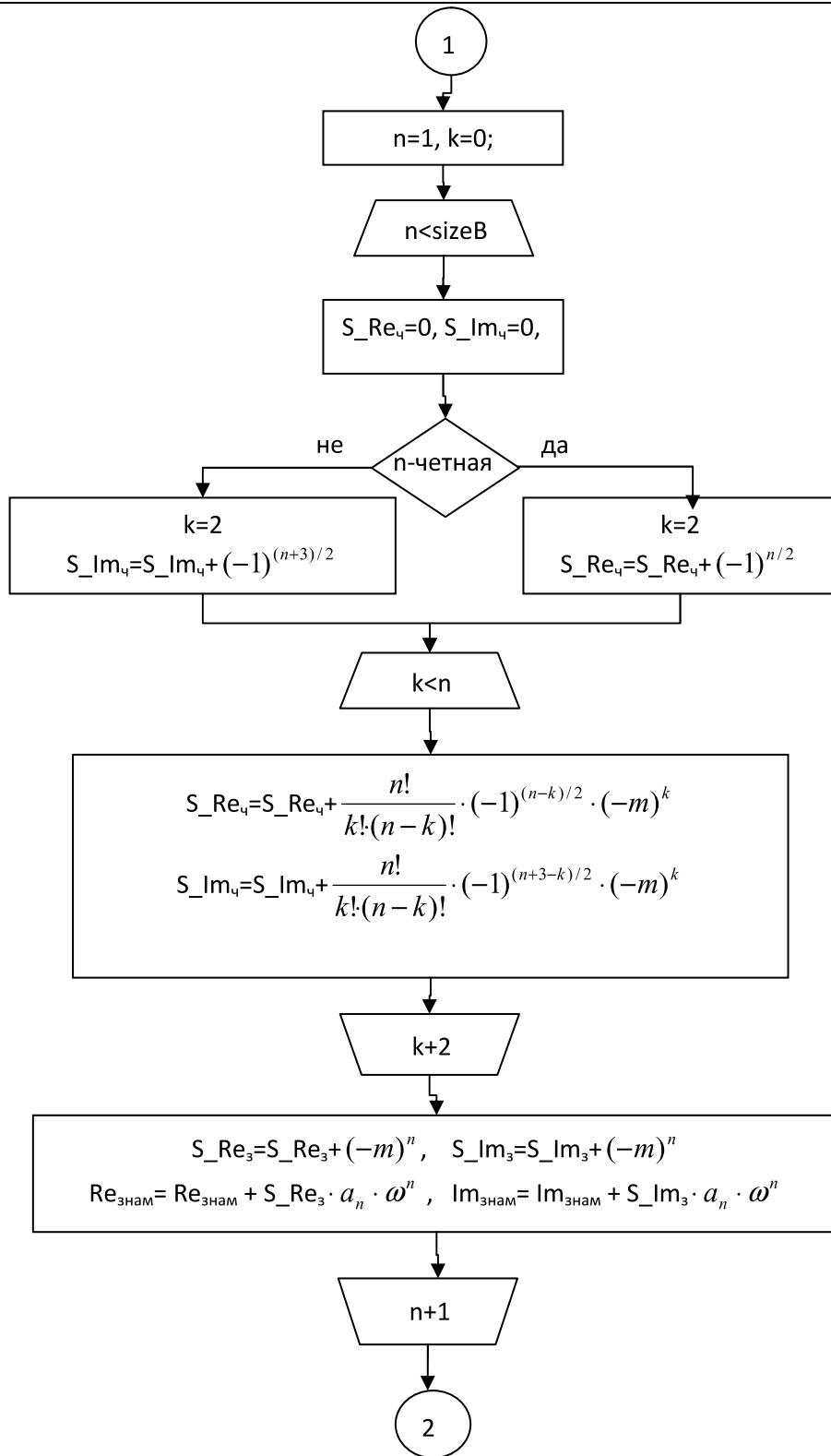
Добавив в (9) звено чистого запаздывания, учитывая (18), получим мнимую и действительную части передаточной функции (8):

$$\begin{aligned} \text{Re}(\omega, m) = & K \cdot e^{m\omega\tau} \cdot \frac{(\text{Re}_{\text{числ}} \cdot \text{Re}_{\text{знам}} + \text{Im}_{\text{числ}} \cdot \text{Im}_{\text{знам}}) \cdot \cos(\omega\tau)}{\text{Re}_{\text{знам}}^2 + \text{Im}_{\text{знам}}^2} + \\ & + K \cdot e^{m\omega\tau} \cdot \frac{(\text{Im}_{\text{числ}} \cdot \text{Re}_{\text{знам}} - \text{Re}_{\text{числ}} \cdot \text{Im}_{\text{знам}}) \cdot \sin(\omega\tau)}{\text{Re}_{\text{знам}}^2 + \text{Im}_{\text{знам}}^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega, m) = & K \cdot e^{m\omega\tau} \cdot \frac{(\text{Im}_{\text{числ}} \cdot \text{Re}_{\text{знам}} - \text{Re}_{\text{числ}} \cdot \text{Im}_{\text{знам}}) \cdot \cos(\omega\tau)}{\text{Re}_{\text{знам}}^2 + \text{Im}_{\text{знам}}^2} - \\ & - K \cdot e^{m\omega\tau} \cdot \frac{(\text{Re}_{\text{числ}} \cdot \text{Re}_{\text{знам}} + \text{Im}_{\text{числ}} \cdot \text{Im}_{\text{знам}}) \cdot \sin(\omega\tau)}{\text{Re}_{\text{знам}}^2 + \text{Im}_{\text{знам}}^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Алгоритмизация расчета. Описанный метод может эффективно использоваться при расчёте РАФХ на ЭВМ. Ниже приведена блок-схема алгоритма расчета с использованием этого метода (рис. 1).





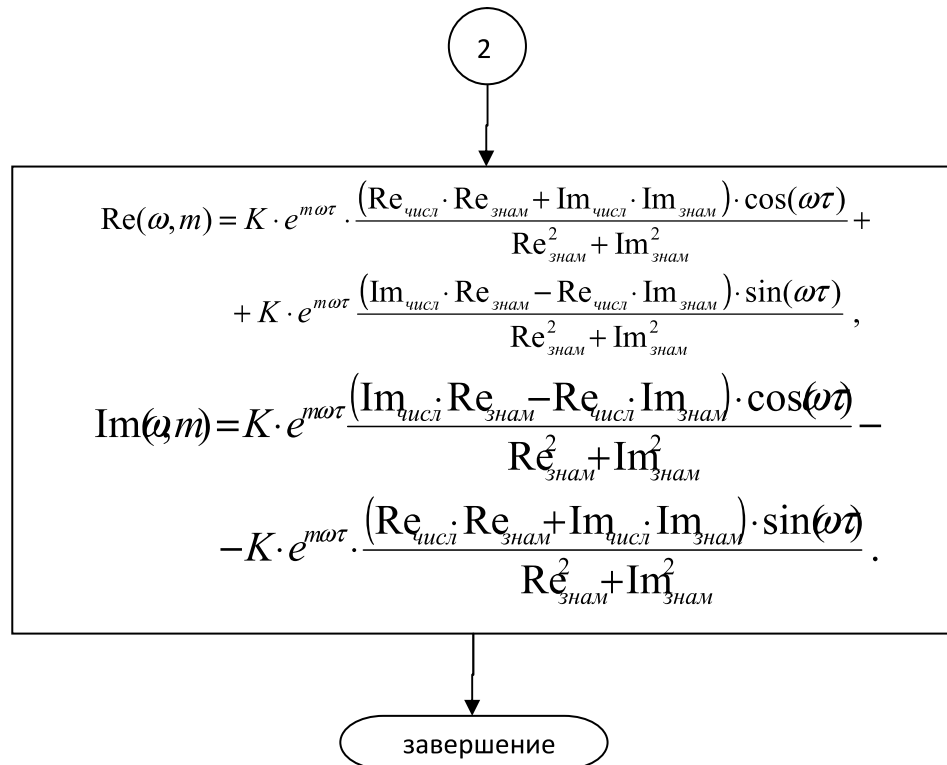


Рис. 1. Блок-схема алгоритма расчёта мнимой и действительной частей РАФХ

Ниже приведена программа, реализующая на языке С++ алгоритм предложенного способа нахождения мнимой и действительной частей РАФХ по полиномам её числителя и знаменателя.

//функция расчета Re и Im передаточной функции

*/*входные параметры:*

K – коэффициент усиления

B, A – полиномы числителя и знаменателя

sizeB, sizeA – кол-во полиномов числителя и знаменателя

w – частота, tau – чистое запаздывание, m – степень колебательности,

*Re_or_Im – флаг вывода мнимой или действительной части функции. */*

*double ReIm(double K, double *B, int sizeB, double *A, int sizeA, double w, double tau, bool Re_or_Im, double m)*

{

double Re, Im; //действительная и мнимая части функции

double B1=0, B2=0, A2=0, A1=0; //Re и Im числителя и знаменателя

```

double dSum_Re, dSum_Im;
double COS=cos(w*tau), SIN=sin(w*tau);
int n, k_im, k_re;
A1=A[0]; //помещаем первый (нулевой) полином знаменателя в A1
for(n=1; n<sizeA; n++) //в циклы проходим все полиномы знаменателя
{
dSum_Re=0;
dSum_Im=0;
k_im=k_re=1;
if(n%2!=1) { k_re=2; dSum_Re+=stp(-1,n/2); } //если степень четная
else { k_im=2; dSum_Im+=stp(-1,(n+3)/2); } //если степень не четная
for(;k_re<n; k_re+=2){ //суммируем действительную часть
dSum_Re+=(fact(n)/(fact(k)*fact(n-k))) * stp(-1,(n-k)/2) * stp(-m,k);
}
for(;k_im<n; k_im+=2){ //суммируем мнимую часть
dSum_Im+=(fact(n)/(fact(k)*fact(n-k))) * stp(-1,(n+3-k)/2) * stp(-m,k);
}
dSum_Re+=stp(-m,n);
A1+=dSum_Re*A[n]*stp(w,n); //действительная часть знаменателя
A2+=dSum_Im*A[n]*stp(w,n); //мнимая часть знаменателя
}
B1=B[0]; //помещаем первый (нулевой) полином числителя в B1
for(n=1; n<sizeB; n++) //в циклы проходим все полиномы числителя
{
dSum_Re=0;
dSum_Im=0;
k_im=k_re=1;
if(n%2!=1) { k_re=2; dSum_Re+=stp(-1,n/2); } //если степень четная
else { k_im=2; dSum_Im+=stp(-1,(n+3)/2); } //если степень не четная
for(;k_re<n; k_re+=2){ //суммируем действительную часть
dSum_Re+=(fact(n)/(fact(k)*fact(n-k))) * stp(-1,(n-k)/2) * stp(-m,k);
}
for(;k_im<n; k_im+=2){ //суммируем мнимую часть
dSum_Im+=(fact(n)/(fact(k)*fact(n-k))) * stp(-1,(n+3-k)/2) * stp(-m,k);
}
dSum_Re+=stp(-m,n);
B1+=dSum_Re*B[n]*stp(w,n); //действительная часть числителя
B2+=dSum_Im*B[n]*stp(w,n); //мнимая часть числителя
}

```



```

}
//вычисляем действительную часть функции
Re=K*exp(m*w*tau) * ((B1*A1+B2*A2)*COS+(B2*A1-
B1*A2)*SIN)/(A1*A1+A2*A2);
//вычисляем мнимую часть функции
Im=K*exp(m*w*tau) * ((B2*A1-B1*A2)*COS-
(B1*A1+B2*A2)*SIN)/(A1*A1+A2*A2);
//если флаг равен 1, возвращаем значение действительной части функции
if(Re_or_Im) return Re;
//иначе возвращаем значение мнимой части функции
else return Im;
}

```

Пример

Рассмотрим эквивалентный объект каскадной системы управления (рис. 2), где передаточная функция объекта по основному каналу управления

$$W_0(S) = \frac{0.5 \cdot e^{-4S}}{4S + 1}, \quad (21)$$

а передаточная функция объекта по вспомогательному каналу управления

$$W_0(S) = \frac{e^{-0.4S}}{1.2S + 1}. \quad (22)$$

Рабочая частота основного регулятора $R(S)$ $\omega_p = 0,35$ 1/сек, при которой настроечные параметры регулятора имеют следующие значения $K_0=0,5$ 1/сек, $K_1=2$.

Передаточная функция эквивалентного объекта для регулятора $R_1(S)$ имеет вид:

$$W_1^3(S) = W_1(S) - W_0(S)R(S). \quad (23)$$

Подставив функции (21) и (22) в (23), учитывая настроечные параметры основного регулятора, получаем передаточную функцию эквивалентного объекта (24).

$$W_1^3(S) = \frac{-2,08S^4 + 4,12S^3 + 4,56S^2 + 1,85S + 0,25}{1,94S^5 + 12,64S^4 + 16,64S^3 + 7,4S^2 + S}. \quad (24)$$

Применив вышеописанный алгоритм нахождения мнимой и действительной части к передаточной функции (24), построим амплитудно-фазовую характеристику эквивалентного объекта в диапазоне частот от 0,2 до 10 1/сек (рис. 2).

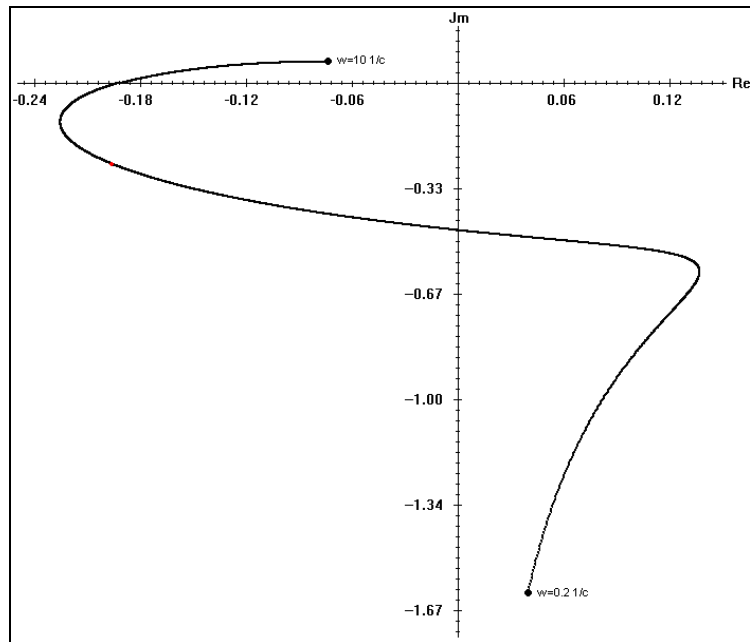


Рис. 2. Амплитудно-фазовая характеристика эквивалентного объекта

Эффективность данного метода по сравнению с традиционным подходом к построению РАФХ при одинаковой точности повышается с увеличением степеней полиномов передаточной функции исследуемого звена или системы.

1. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Астрель: АСТ, 2005.
2. Душин, С.Е. Теория автоматического управления / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев, Н.Н. Кузмин, В.Б. Яковлев. – М.: Высшая школа, 2003.
3. Лукас, В.А. Теория управления техническими системами / В.А. Лукас. – Екатеринбург, 2002.