

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова

К ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКИМ ИСПЫТАНИЯМ МАТЕРИАЛОВ С УПРУГИМИ, ВЯЗКИМИ И ПЛАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

Аннотация. Получено точное решение задачи о деформировании упруговязкопластической среды, заключенной между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами, при повороте одного из них. На жестких поверхностях выполняются условия прилипания. Решение строится в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций. Рассмотрены обратимое деформирование и вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном моменте закручивания. Получены законы движения границ развивающихся областей вязкопластического течения. Рассчитаны поля перемещений, деформаций, напряжений и скоростей.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

УДК: 539.374

Одним из видов экспериментов при определении постоянных вязкой и вязкопластической сред являются опыты в соосно-цилиндрическом вискозиметре. Различают два типа приборов с контролируемым напряжением сдвига и с контролируемой скоростью. Для обработки таких экспериментов необходимо иметь точные решения соответствующих краевых задач. В теории вязких и неньютоновских жидкостей такие решения давно получены и являются уже классическими [1], [7], [8]. Но существуют процессы интенсивного формоизменения твердых деформируемых тел на стадии пластического течения материалов, когда необходимо учитывать упругие свойства среды. При математическом моделировании подобных процессов необходимо пользоваться математической моделью больших упругопластических деформаций. В [3], [4] в рамках такой модели получено решение задачи о вискозиметрическом течении между двумя жесткими цилиндрами, когда на подвижном цилиндре задается скорость вращения. Здесь приводится решение задачи, когда на вращающемся цилиндре задан момент закручивания. В последнем случае оказалось возможным получить точное аналитическое решение краевой задачи.

1. Основные модельные соотношения. Задача решается в рамках модели больших упругопластических деформаций, предложенной в [2] и обобщенной на случай учета вязких свойств материала на стадии пластического течения [6]. В прямоугольной декартовой системе координат кинематика среды определяется зависимостями

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\
\frac{Dp_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$r_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk}).$$

В соотношениях (1.1) d_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} , p_{ij} — их обратимые и необратимые составляющие; u_i , v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; $\frac{D}{Dt}$ — объективная производная тензоров по времени; ε_{ij}^p (источник в уравнении переноса для тензора необратимых деформаций) — компоненты тензора скоростей пластических деформаций. Наличие нелинейной составляющей z_{ij} тензора вращений r_{ij} , которая выписана полностью в [2], [6], связано с выполнением требования неизменности тензора пластических деформаций p_{ij} в процессах разгрузки.

Материал считаем несжимаемым и тогда, следуя [2], [8], получаем

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0,$$

$$\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \neq 0,$$

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \tag{1.2}$$

$$J_k = \begin{cases} L_k, & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\ I_k, & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki},$$

$$I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}.$$

В зависимостях (1.2) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, p , p_1 — добавочные гидростатические давления, W — упругий потенциал, μ — модуль сдвига, b , χ — постоянные материала.

В качестве пластического потенциала используется функция нагружения Треска [5]:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^p|, \tag{1.3}$$

где k — предел текучести; η — коэффициент вязкости; σ_i , ε_k^p — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций.

Связь скоростей необратимых деформаций с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \tag{1.4}$$

2. Упругое деформирование. Рассмотрим деформирование несжимаемого упруговязко-пластического материала, свойства которого описываются модельными зависимостями, приведенными в первом разделе, расположенного между двумя цилиндрическими жесткими стенками $r = r_0$ и $r = R$. Внешний цилиндр $r = R$ жестко закреплен, а к внутреннему $r = r_0$ приложен закручивающий момент. Полагаем, что на жестких поверхностях выполняются условия прилипания, тогда граничные условия в цилиндрической системе координат r ,

φ , z для векторов перемещений и скорости $\mathbf{u}(u_r, u_\varphi, 0)$, $\mathbf{v}(0, v_\varphi, 0)$ и компоненты напряжения $\sigma_{r\varphi}$ имеют вид

$$\mathbf{u}|_{r=R} = \mathbf{v}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = -\alpha t. \quad (2.1)$$

Считаем, что в рассматриваемом случае все точки среды движутся по окружностям. Тогда составляющие вектора перемещений и компоненты тензора полных деформаций Альманси, отличные от нуля, имеют вид

$$u_r = r(1 - \cos \theta), \quad u_\varphi = r \sin \theta, \quad d_{rr} = -\frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (2.2)$$

где $\theta = \theta(r, t)$ – центральный угол закручивания.

Полагаем, что деформирование первоначально является обратимым ($p_{ij} = 0$).

Согласно зависимостям (1.2) компоненты напряжений находятся зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)r^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 = -s, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s + \mu r^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu r \frac{\partial \theta}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь и далее оставлены слагаемые до второго порядка деформаций, т. е. обратимые деформации полагаем малыми. Такое ограничение, не являясь принципиальным, позволяет получить точное решение рассматриваемой краевой задачи.

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (2.4)$$

и используя граничные условия (2.1), найдем

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{\dot{c}(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \dot{c}(t) = \frac{dc(t)}{dt}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= \frac{c(t)^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c(t)^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad c(t) = -\alpha t r_0^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $w = \frac{v_\varphi}{r}$ – угловая скорость, σ_0 – значение компоненты напряжений σ_{rr} на поверхности $r = r_0$.

Из первого соотношения (1.1) получим необходимые для дальнейших вычислений зависимости:

$$e_{r\varphi} = d_{r\varphi} = \frac{1}{2} \frac{c(t)}{\mu r^2}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2} e_{r\varphi}^2, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2. \quad (2.6)$$

Полученное решение справедливо в промежутке времени от $t = 0$ до последующего момента времени $t = t_0$, когда от стенки $r = r_0$ начинает развиваться область пластического течения. Используя условие пластичности (1.3), которое при принятых ограничениях записывается в виде: $\sigma_{r\varphi}(r_0, t_0) = -k$, найдем момент начала пластического течения $t_0 = \frac{k}{\alpha}$.

3. Вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном моменте закручивания. С момента времени $t = t_0$ в окрестности внутреннего жесткого цилиндра развивается область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$, где $r_1(t)$ – движущаяся граница пластической области, отделяющая ее от зоны упругого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R(t)$.

Согласно зависимостям (1.1) кинематика среды определяется соотношениями

$$\begin{aligned} v_\varphi &= r \frac{\partial \theta}{\partial t} = r\omega, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \\ \varepsilon_{rr}^p &= -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\varepsilon_{r\varphi}^p e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Интегрированием уравнений равновесия в области обратимого деформирования так же, как и ранее, используя условие (2.1), найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad \theta = \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{\dot{c}(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (3.2)$$

Для компонент напряжений в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$, следуя второй зависимости (1.2), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{zz} = -(p_1 + 2\mu) - 2(b + \mu)e_{r\varphi}^2 = -s_1(t), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s_1(t) + 4\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При записи выражений (3.3) использовались кинематические зависимости (2.6). С другой стороны, интегрированием уравнений равновесия можно получить

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{m(t)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{m(t)}{2\mu r^2}. \quad (3.4)$$

Из условий непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе $r = r_1(t)$ получим, что

$$m(t) = c(t), \quad s(t) = s_1(t).$$

Условие пластического течения (??) в нашем

$$\sigma_{r\varphi}^2 - (k + \eta|\varepsilon_{r\varphi}^p|)^2 = 0. \quad (3.5)$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (1.4) и условию (3.5), найдем

$$\sigma_{r\varphi} = -k + \eta\varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \lambda = -\frac{\varepsilon_{r\varphi}^p}{k - \eta\varepsilon_{r\varphi}^p}. \quad (3.6)$$

Сравнение (3.4) и (3.6) позволяет вычислить скорость пластической деформации:

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c(t)}{r^2} + k \right). \quad (3.7)$$

Неизвестную функцию интегрирования $c(t)$ найдем из условия равенства нулю скоростей пластических деформаций на упругопластической границе $r = r_1(t)$:

$$c(t) = -kr_1^2. \quad (3.8)$$

С другой стороны, согласно второму граничному условию (2.1)

$$c(t) = -\alpha tr_0^2, \quad (3.9)$$

что позволяет получить выражение для границы $r_1(t)$:

$$r_1 = r_0 \sqrt{\frac{\alpha t}{k}}. \quad (3.10)$$

Используя кинематические зависимости (3.1) и формулу (3.9), найдем компоненту пластических деформаций $p_{r\varphi}$:

$$p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(kt - \frac{\alpha t^2 r_0^2}{2r^2} \right) + g(r). \quad (3.11)$$

Для неизвестной функции $g(r)$ из условия равенства нулю пластических деформаций на поверхности $r = r_1$ и соотношения (3.10) получим

$$g(r) = -\frac{1}{2\eta} \frac{k^2 r^2}{\alpha r_0^2}. \quad (3.12)$$

Согласно соотношениям (1.1) $d_{r\varphi} = p_{r\varphi} + e_{r\varphi}$ тогда для определения угла поворота $\theta(r, t)$ в области вязкопластического течения из (3.4) и (3.9)–(3.12) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \left(kt - \frac{\alpha t^2 r_0^2}{2r^2} \right) - \frac{1}{2\eta} \frac{k^2 r^2}{\alpha r_0^2} - \frac{\alpha t r_0^2}{2\mu r^2},$$

интегрируя которое и используя условие непрерывности функции $\theta(r, t)$ на упругопластической границе $r = r_1(t)$, найдем распределение $\theta(r, t)$ в области течения:

$$\theta = \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\alpha t^2 r_0^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha r_0^2} (r_1^2 - r^2) \right) + \frac{\alpha t r_0^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \quad (3.13)$$

Угловую скорость в области течения определим согласно зависимостям (3.1)

$$\omega = \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\alpha t r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right) + \frac{\alpha r_0^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \quad (3.14)$$

Следуя первой формуле (1.1) разделения полных деформаций на обратимые и необратимые, компоненты пластических деформаций определяются зависимостями

$$p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(kt - \frac{\alpha t^2 r_0^2}{2r^2} - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} \right), \quad p_{\varphi\varphi} = 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}, \quad p_{rr} = 2d_{r\varphi} (e_{r\varphi} - d_{r\varphi}). \quad (3.15)$$

Пусть с момента времени $t = t_1$ напряжение $\sigma_{r\varphi}$ на внутренней поверхности перестает изменяться:

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_0} = -\alpha t_1. \quad (3.16)$$

Тогда в упругой области, интегрируя уравнения равновесия и используя условие прилипания на жестких стенках, получим

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad \theta = \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = 0, \quad c(t) = -\alpha t_1 r_0^2. \quad (3.17)$$

Скорость пластической деформации $\varepsilon_{r\varphi}^p$ в этом случае находится по формуле (3.7), где вместо $c(t)$ необходимо подставить текущее значение из (3.17). Сравнивая выражения для $c(t)$ из (3.8) и (3.17), получим, что при постоянном напряжении $\sigma_{r\varphi}$ на внутренней поверхности граница области вязкопластического течения не изменяется и равна $r_1 = r_0 \sqrt{\frac{\alpha t_1}{k}}$.

Компоненту пластических деформаций $p_{r\varphi}$ найдем интегрированием $\varepsilon_{r\varphi}^p$ по времени, используя условия равенства пластических деформаций в момент времени $t = t_1$:

$$p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(kt - \frac{\alpha t t_1 r_0^2}{r^2} + \frac{\alpha t_1^2 r_0^2}{2r^2} - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} \right). \quad (3.18)$$

Для угла поворота и угловой скорости в области $r_0 \leq r \leq r_1$, используя условие непрерывности этих параметров на границе r_1 , получим

$$\theta = \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\alpha t_1 t r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - \frac{\alpha t_1^2 r_0^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha r_0^2} (r_1^2 - r^2) \right) + \frac{\alpha t r_0^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right), \quad \omega = \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\alpha t_1 r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right).$$

4. Течение при уменьшающемся моменте закручивания. Разгрузка.

Далее рассмотрим случай, когда с момента времени $t = t_2$ напряжение $\sigma_{r\varphi}$ при $r = r_0$ уменьшается по абсолютной величине по закону

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_0} = -\alpha t_1 + \beta(t - t_2). \quad (4.1)$$

Напряжения при этом уменьшаются во всей области деформирования, которая разбивается на части: область обратимого деформирования $r_1 \leq r \leq R$, область, где пластические деформации перестают изменяться, $-r_2(t) \leq r \leq r_1$ и область продолжающегося пластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$. Граница $r_2(t)$, разделяющая последние две области, с течением времени движется в сторону внутреннего жесткого цилиндра $r = r_0$. Используя условие непрерывности напряжений, найдем уравнение ее движения: $r_2 = r_0 \sqrt{\frac{\alpha t_1 - \beta(t - t_2)}{k}}$.

В упругой области будут справедливы соотношения (3.2), где вместо $c(t)$ необходимо подставить выражение $c(t) = r_0^2(-\alpha t_1 + \beta(t - t_2))$. В области продолжающегося пластического течения, используя условие равенства пластических деформаций в момент времени $t = t_2$, получим

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{r_0^2(\alpha t_1 - \beta(t - t_2))}{r^2} \right), \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(kt - \frac{r_0^2}{r^2} \left(\alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} \right).$$

Из условия непрерывности пластических деформаций на границе $r = r_2(t)$ в области с неизменяющимися пластическими деформациями найдем

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = 0, \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(kt_2 + k \frac{\alpha}{\beta} t_1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(\frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} + \alpha t_1 t_2 - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2} \right) - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} - \frac{k^2 r^2}{2\beta r_0^2} \right).$$

Согласно зависимостям $d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi}$ и $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p$, воспользовавшись непрерывностью перемещений и скоростей при $r = r_1$ и $r = r_2$, найдем распределение угла поворота $\theta(r, t)$ и угловой скорости $\omega(r, t)$

в области $r_2(t) \leq r \leq r_1$:

$$\omega = \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \theta = \frac{2}{\eta} \left[k \ln \frac{r}{r_1} \left(\frac{\alpha t_1}{\beta} + t_2 \right) + \left(\frac{k^2}{4\alpha r_0^2} + \frac{k^2}{4\beta r_0^2} \right) (r_1^2 - r^2) + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \left(\alpha t_1 t_2 + \frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \quad (4.2)$$

в области $r_0 \leq r \leq r_2(t)$:

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{2}{\eta} \left[k \ln \frac{r}{r_2} + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) (\alpha t_1 + \beta(t - t_2)) \right] + \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \theta = \frac{2}{\eta} \left[kt \ln \frac{r}{r_2} + \right. \\ & + k \ln \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{\alpha t_1}{\beta} + t_2 \right) + \frac{k^2(r_1^2 - r^2)}{4\alpha r_0^2} + \frac{k^2(r_1^2 - r_2^2)}{4\beta r_0^2} + \frac{\alpha r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \left(t_1 t_2 + \frac{\alpha t_1^2}{2\beta} - \frac{t_1^2}{2} \right) + \\ & \left. + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \left(\alpha t_1 t + \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \end{aligned}$$

В момент времени $t_3 = \frac{\alpha t_1 + \beta t_2 - k}{\beta}$ граница $r_2(t)$ достигает внутренней жесткой стенки $r = r_0$, при этом $\sigma_{r\varphi}(r_0, t_3) = -k$. С момента t_3 пластические деформации всюду остаются неизменными, а напряжения продолжают уменьшаться по абсолютному значению. В конечный момент разгрузки $t_4 = \frac{\alpha t_1 + \beta t_2}{\beta}$ напряжения $\sigma_{r\varphi}$ становятся равными нулю во всем слое $r_0 \leq r \leq R$, угловая скорость равна нулю во всей области деформирования, для угла поворота получим

в области обратимого деформирования $r_1 \leq r \leq R$: $\theta = 0$,
в пластической области $r_2(t) \leq r \leq r_1$:

$$\theta = \frac{2}{\eta} \left[k \ln \frac{r}{r_1} \left(\frac{\alpha t_1}{\beta} + t_2 \right) + \left(\frac{k^2}{4\alpha r_0^2} + \frac{k^2}{4\beta r_0^2} \right) (r_1^2 - r^2) + \frac{\alpha r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \left(t_1 t_2 + \frac{\alpha t_1^2}{2\beta} - \frac{t_1^2}{2} \right) \right].$$

5. Течение при изменении направления движения.

Если далее уменьшать напряжение $\sigma_{r\varphi}$ на поверхности $r = r_0$ по модулю, то в момент времени $t = t_5$ при $r = r_0$ вновь выполнится условие пластичности, но с обратным знаком $\sigma(r_0, t_5) = k$, и начнет развиваться новая область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_3(t)$. В области $r_3(t) \leq r \leq r_1$, где пластические деформации не изменяются, и в области обратимого деформирования $r_1 \leq r \leq R$ будут справедливы зависимости (4.2) и (3.2). В области течения, как и ранее, найдем

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left(\frac{r_0^2(-\alpha t_1 + \beta(t - t_2))}{r^2} - k \right),$$

$$p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(-kt + 2\frac{\alpha}{\beta} kt_1 + 2kt_2 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(\alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) - \frac{k^2 r^2}{2\alpha r_0^2} \right), \quad (5.1)$$

$$\omega = \frac{2}{\eta} \left[-k \ln \frac{r}{r_3} + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) (\alpha t_1 + \beta(t - t_2)) \right] + \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{2}{\eta} \left[\left(2\frac{\alpha}{\beta} kt_1 + 2kt_2 - kt \right) \ln \frac{r}{r_3} + k \ln \frac{r_3}{r_1} \left(\frac{\alpha t_1}{\beta} + t_2 \right) + \frac{k^2(r_1^2 - r^2)}{4\alpha r_0^2} + \frac{k^2(r_1^2 - r_3^2)}{4\beta r_0^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \left(t_1 t_2 + \frac{\alpha t_1^2}{2\beta} - \frac{t_1^2}{2} \right) + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \left(\alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha t_1^2}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \end{aligned}$$

В момент времени $t_6 = \frac{\alpha t_1 + \beta t_2 + k r_1^2}{r_0^2 \beta}$ граница $r_3(t)$ достигает поверхности $r = r_1$, первоначально ограничивающей пластическую область. Далее для решения задачи уравнения

равновесия необходимо проинтегрировать в упругой области $r_3 \leq r \leq R$ и в двух областях вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq r_3(t)$, $r_0 \leq r \leq r_1$, в которых пластические деформации находятся по-разному. В области обратимого деформирования выполняются те же соотношения, что и ранее. В области течения $r_0 \leq r \leq r_1$ компонента пластических деформаций $p_{r\varphi}$ и ее скорость $\varepsilon_{r\varphi}^p$ вычисляются по формулам (5.1). Для области $r_1 \leq r \leq r_3(t)$, используя условие непрерывности перемещений, деформаций и скоростей на поверхности $r = r_3(t)$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{r_0^2(-\alpha t_1 + \beta(t - t_2))}{r^2} - k \right), \\ p_{r\varphi} &= \frac{1}{\eta} \left(-kt + \frac{\alpha}{\beta} kt_1 + kt_2 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(\alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} - \alpha t_1 t_2 \right) + \frac{k^2 r^2}{2\beta r_0^2} \right), \\ \omega &= \frac{2}{\eta} \left[-k \ln \frac{r}{r_3} + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) (\alpha t_1 + \beta(t - t_2)) \right] + \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} kt_1 + kt_2 - kt \right) \ln \frac{r}{r_3} + \frac{k^2(r^2 - r_3^2)}{4\beta r_0^2} + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} - \alpha t_1 t_2 \right) \right] + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \end{aligned}$$

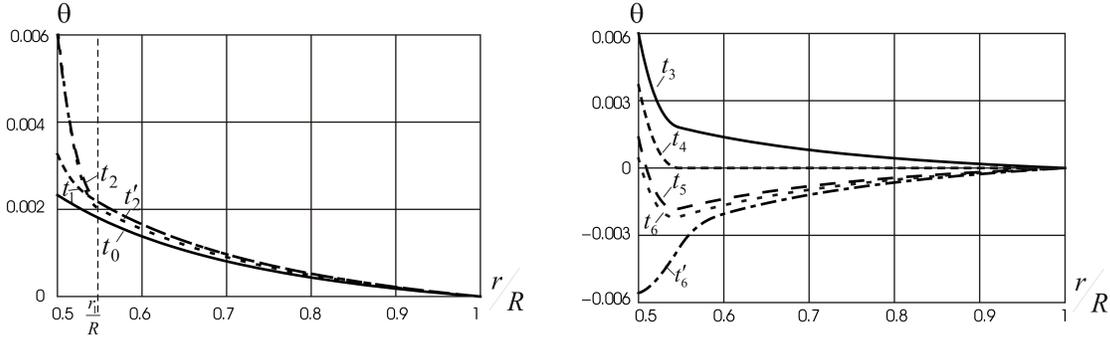


Рис. 1. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

В области $r_0 \leq r \leq r_1$ для угла поворота и угловой скорости найдем

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{\eta} \left[-k \ln \frac{r}{r_3} + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) (\alpha t_1 + \beta(t - t_2)) \right] + \frac{r_0^2 \beta}{2\mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} kt_1 + kt_2 \right) \ln \frac{r}{r_3 r_1} - kt \ln \frac{r}{r_3} + \frac{k^2(r_1^2 - r_3^2)}{4\beta r_0^2} - \frac{k^2(r^2 - r_1^2)}{4\alpha r_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \left(\alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2\beta} - \alpha t_1 t_2 \right) + \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\alpha t_1 t - \frac{\beta(t - t_2)^2}{2} - \frac{\alpha^2 t_1^2}{2} \right) \right] + \frac{(\alpha t_1 - \beta(t - t_2)) r_0^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right). \end{aligned}$$

На рис. 1 показано распределение угла поворота в зависимости от радиуса в различные моменты времени при значении постоянных

$$\frac{\alpha\eta}{\mu} = 0.004, \quad \frac{r_0}{R} = 0.5, \quad \frac{k}{\mu} = 0.00621. \quad (5.2)$$

6. Деформирование при повороте внешнего жесткого цилиндра. Пусть теперь к внешнему жесткому цилиндру приложен закручивающий момент, а внутренний цилиндр при этом остается неподвижным:

$$\mathbf{u}|_{r=r_0} = \mathbf{v}|_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = \alpha t. \quad (6.1)$$

Так же, как и при повороте внутренней поверхности, интегрируя уравнения равновесия (2.4) и используя граничные условия (6.1), получим решение упругой задачи:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{c}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{\dot{c}}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \dot{c} = \frac{dc}{dt}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{c}{r^2}, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= \frac{c^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad c(t) = \alpha t R^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В момент времени $t_0 = \frac{kr_0^2}{\alpha R^2}$ на поверхности $r = r_0$ выполняется условие пластичности (1.3). Далее в материале будут две области: область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ и область обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$. Текущее значение границы $r_1(t)$ определяется по формуле $r_1 = R\sqrt{\frac{\alpha t}{k}}$. В области течения, используя кинематические зависимости (3.1), условие пластичности и условие прилипания на внутренней поверхности $r = r_0$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\alpha t R^2}{r^2} - k \right), \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(-kt + \frac{\alpha t^2 R^2}{2r^2} + \frac{k^2 r^2}{2\alpha R^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t R^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r^2 - r_0^2) \right) + \frac{\alpha t R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \omega &= \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t R^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right) + \frac{\alpha R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Угол поворота и угловая скорость в упругой области находятся интегрированием уравнений равновесия и условий непрерывности этих параметров на поверхности $r = r_1$:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t^2 R^2}{4} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r_1^2 - r_0^2) \right) + \frac{\alpha t R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \omega &= \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t R^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right) + \frac{\alpha R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Если напряжение на поверхности $r = R$ становится постоянным с момента времени $t = t_1$, то, как и в случае поворота внутреннего цилиндра, область вязкопластического течения перестает увеличиваться. Тогда решение задачи записывается в виде:

– в области вязкопластического течения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\alpha t_1 R^2}{r^2} - k \right), \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\alpha t_1 t R^2}{r^2} - kt - \frac{\alpha t^2 R^2}{2r^2} + \frac{k^2 r^2}{2\alpha R^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t t_1 R^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha t_1^2 R^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r^2 - r_0^2) \right) + \\ &+ \frac{\alpha t_1 R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t_1 R^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

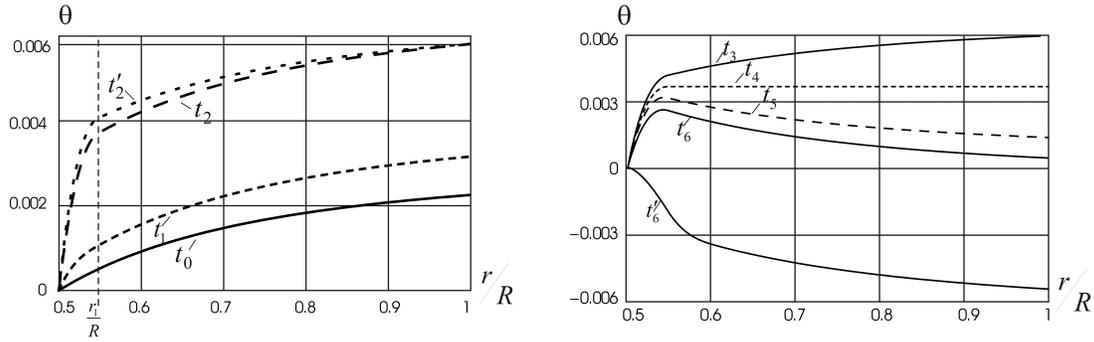


Рис. 2. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

– в упругой области:

$$\theta = \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t t_1 R^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha t_1^2 R^2}{4} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r^2 - r_0^2) \right) + \frac{\alpha t_1 R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t_1 R^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right)$$

При уменьшении момента закручивания на внешнем жестком цилиндре наблюдаются те же эффекты, что и при повороте внутреннего. На рис. 2 показано распределение угла поворота в зависимости от радиуса при повороте внешнего жесткого цилиндра при постоянных (5.2) в процессе всего деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бахшиян, Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязкопластичной среде / Ф. А. Бахшиян // ПММ. – 1948. – Т. 12. – Вып. 6. – С. 650–661.
- [2] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Докл. АН СССР. – 1996. – Т. 347. – №2. – С. 199–201.
- [3] Буренин, А. А. Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 18–25.
- [4] Буренин, А. А. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова // ПМТФ. – 2008. – Т. 49. – № 2. – С. 143–151.
- [5] Знаменский, В. А. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114–118.
- [6] Ковтанюк, Л. В. О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник ДВО РАН. – 2006. – №4. – С. 87–93.
- [7] Огибалов, П. М. Нестационарные движения вязкопластических сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. – М. : Изд-во Московского университета, 1970. – 415 с.
- [8] Сафрончик, А. И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде / А. И. Сафрончик // ПММ. – 1959. – Т. 23. – Вып. 6. – С. 998–1014.

Буренин Анатолий Александрович,

член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: `burenin@iacp.dvo.ru`

Ковтанюк Лариса Валентиновна,

доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией необратимого деформирования, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: `lk@iacp.dvo.ru`

Устинова Александра Сергеевна,

кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории необратимого деформирования, Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: `asustinova@mail.ru`

A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, A. S. Ustinova

TO VISKOZIMETRICHESKIM TESTING OF THE MATERIALS WITH THE ELASTIC VISCOUS AND PLASTIC PROPERTIES.

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

Abstract. The exact solution of the problem of deformation elastoviscoplastic environment enclosed between two rigid coaxial cylinders while turning one of them is obtained. On hard surfaces, the conditions of adhesion are performed. The solution is constructed in the media of large elastoviscoplastic strains. Reversible deformation and viscoplastic flow, unloading and its deformation at turn in the opposite direction are considered. Fields are calculated displacements, strains, stresses and velocities are calculated.

Keywords: elasticity, viscoplasticity, large deformations, residual stresses.

REFERENCES

- [1] *Bakhshiyani, F. A.* Rotation of a rigid cylinder in a viscoplastic medium / F. A. Bakhshiyani // Prikl. Mat. Mekh. – 1948. – Vol. 12. – №. 6. – P. 650–661.
- [2] *Burenin, A. A.* A Simple Model of Finite Strains in an Elastoplastic Medium / A. A. Burenin, G. V. Bykovtsev, and L. V. Kovtanyuk // Dokl. Akad. Nauk. – 1996. – Vol. 347. – №2. – P. 199–201.
- [3] *Burenin, A. A.* Viscosimetric Flow of an Elastoviscoplastic Material between Rigid Coaxial Cylindrical Surfaces / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, and A. S. Ustinova, // Vestnik ChGPU im. Yakovleva. Mekh. Predelnogo Sost. – 2007. – № 1. – P. 18–25.
- [4] *Burenin, A.A.* On Accounting for the Elastic Properties of a Non-Newtonian Viscosimetric Flow, / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, and A. S. Ustinova // Prikl. Mekh.i Tekhn. Fiz. – 2008. – Vol. 49. – № 2. – P. 143–151.
- [5] *Znamenskii, V. A.* On the equations a viscoplastic body with piecewise-linear potentials / V. A. Znamenskii, D. D. Ivlev // Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Mashinostroenie. – 1963. – № 6. – P. 114–118.
- [6] *Kovtanyuk, L. V.* On the theory of large elastoplastic deformations of materials with the temperature and rheological effects taken into account / L. V. Kovtanyuk, A. V. Shitikov // Vestnik Dal'nevostochn. Otd. Ross. Akad. Nauk. – 2006. – №4. – P. 87–93.
- [7] *Ogibalov, P. M.* Unsteady Motion of Viscoplastic Media / P. M. Ogibalov and A. Kh. Mirzadzhanzade. – M. : Izd. Mosk. Univ., 1970. – 415 p.
- [8] *Safronchik, A. I.* Rotation of a cylinder at a variable velocity in a viscoplastic medium / A. I. Safronchik // Prikl. Mat. Mekh. – 1959. – Vol. 23. – №. 6. P. 998–1014.

Burenin, Anatoily Aleksandrovich

corresponding member of the RAS, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Director of the Institute of machinery and metallurgy, Feb RAS, Komsomolsk-on-Amur

Kovtanyuk, Larisa Valentinovna

Dr. Sci. Phys. & Math., chair. lab. mechanics of irreversible deformation of the Institute of automation and control processes, Feb RAS, Vladivostok