

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова

К ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКИМ ИСПЫТАНИЯМ МАТЕРИАЛОВ С УПРУГИМИ, ВЯЗКИМИ И ПЛАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

Аннотация. Получено точное решение задачи о деформировании упруговязкопластической среды, заключенной между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами, при повороте одного из них. На жестких поверхностях выполняются условия прилипания. Решение строится в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций. Рассмотрены обратимое деформирование и вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном моменте закручивания. Получены законы движения границ развивающихся областей вязкопластического течения. Рассчитаны поля перемещений, деформаций, напряжений и скоростей.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

УДК: 539.374

Одним из видов экспериментов при определении постоянных вязкой и вязкопластической сред являются опыты в соосно-цилиндрическом вискозиметре. Различают два типа приборов с контролируемым напряжением сдвига и с контролируемой скоростью. Для обработки таких экспериментов необходимо иметь точные решения соответствующих краевых задач. В теории вязких и неньютоновских жидкостей такие решения давно получены и являются уже классическими [1], [7], [8]. Но существуют процессы интенсивного формоизменения твердых деформируемых тел на стадии пластического течения материалов, когда необходимо учитывать упругие свойства среды. При математическом моделировании подобных процессов необходимо пользоваться математической моделью больших упругопластических деформаций. В [3], [4] в рамках такой модели получено решение задачи о вискозиметрическом течении между двумя жесткими цилиндрами, когда на подвижном цилиндре задается скорость вращения. Здесь приводится решение задачи, когда на вращающемся цилиндре задан момент закручивания. В последнем случае оказалось возможным получить точное аналитическое решение краевой задачи.

1. Основные модельные соотношения. Задача решается в рамках модели больших упругопластических деформаций, предложенной в [2] и обобщенной на случай учета вязких свойств материала на стадии пластического течения [6]. В прямоугольной декартовой системе координат кинематика среды определяется зависимостями

$$\frac{\alpha\eta}{\mu} = 0.004, \quad \frac{r_0}{R} = 0.5, \quad \frac{k}{\mu} = 0.00621. \quad (5.2)$$

6. Деформирование при повороте внешнего жесткого цилиндра. Пусть теперь к внешнему жесткому цилиндру приложен закручивающий момент, а внутренний цилиндр при этом остается неподвижным:

$$\mathbf{u}|_{r=r_0} = \mathbf{v}|_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = \alpha t. \quad (6.1)$$

Так же, как и при повороте внутренней поверхности, интегрируя уравнения равновесия (2.4) и используя граничные условия (6.1), получим решение упругой задачи:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{c}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{\dot{c}}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \dot{c} = \frac{dc}{dt}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{c}{r^2}, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= \frac{c^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c^2}{4\mu} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad c(t) = \alpha t R^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В момент времени $t_0 = \frac{k r_0^2}{\alpha R^2}$ на поверхности $r = r_0$ выполнится условие пластичности (1.3). Далее в материале будут две области: область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ и область обратимого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R$. Текущее значение границы $r_1(t)$ определяется по формуле $r_1 = R \sqrt{\frac{\alpha t}{k}}$. В области течения, используя кинематические зависимости (3.1), условие пластичности и условие прилипания на внутренней поверхности $r = r_0$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\alpha t R^2}{r^2} - k \right), \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(-kt + \frac{\alpha t^2 R^2}{2r^2} + \frac{k^2 r^2}{2\alpha R^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t R^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r^2 - r_0^2) \right) + \frac{\alpha t R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \omega &= \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t R^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right) + \frac{\alpha R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Угол поворота и угловая скорость в упругой области находятся интегрированием уравнений равновесия и условий непрерывности этих параметров на поверхности $r = r_1$:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t^2 R^2}{4} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r_1^2 - r_0^2) \right) + \frac{\alpha t R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \omega &= \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t R^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right) + \frac{\alpha R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Если напряжение на поверхности $r = R$ становится постоянным с момента времени $t = t_1$, то, как и в случае поворота внутреннего цилиндра, область вязкопластического течения перестает увеличиваться. Тогда решение задачи записывается в виде:

– в области вязкопластического течения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\alpha t_1 R^2}{r^2} - k \right), \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\alpha t_1 t R^2}{r^2} - kt - \frac{\alpha t^2 R^2}{2r^2} + \frac{k^2 r^2}{2\alpha R^2} \right), \\ \theta &= \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t t_1 R^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha t_1^2 R^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r^2 - r_0^2) \right) + \\ &+ \frac{\alpha t_1 R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\alpha t_1 R^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

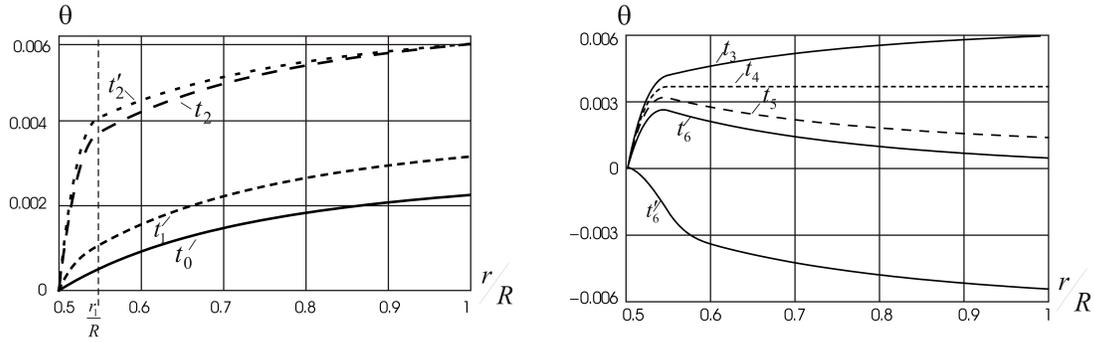


Рис. 2. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

– в упругой области:

$$\theta = \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t t_1 R^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha t_1^2 R^2}{4} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{k^2}{4\alpha R^2} (r^2 - r_0^2) \right) + \frac{\alpha t_1 R^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \omega = \frac{2}{\eta} \left(k \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\alpha t_1 R^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \right)$$

При уменьшении момента закручивания на внешнем жестком цилиндре наблюдаются те же эффекты, что и при повороте внутреннего. На рис. 2 показано распределение угла поворота в зависимости от радиуса при повороте внешнего жесткого цилиндра при постоянных (5.2) в процессе всего деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бахшиян, Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязкопластичной среде / Ф. А. Бахшиян // ПММ. – 1948. – Т. 12. – Вып. 6. – С. 650–661.
- [2] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Докл. АН СССР. – 1996. – Т. 347. – №2. – С. 199–201.
- [3] Буренин, А. А. Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 18–25.
- [4] Буренин, А. А. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова // ПМТФ. – 2008. – Т. 49. – № 2. – С. 143–151.
- [5] Знаменский, В. А. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114–118.
- [6] Ковтанюк, Л. В. О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник ДВО РАН. – 2006. – №4. – С. 87–93.
- [7] Огибалов, П. М. Нестационарные движения вязкопластических сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. – М. : Изд-во Московского университета, 1970. – 415 с.
- [8] Сафрончик, А. И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде / А. И. Сафрончик // ПММ. – 1959. – Т. 23. – Вып. 6. – С. 998–1014.

Буренин Анатолий Александрович,

член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: `burenin@iacp.dvo.ru`

Ковтанюк Лариса Валентиновна,

доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: `lk@iacp.dvo.ru`

Устинова Александра Сергеевна,

кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: `asustinova@mail.ru`

A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, A. S. Ustinova

TO VISKOZIMETRICHESKIM TESTING OF THE MATERIALS WITH THE ELASTIC VISCOUS AND PLASTIC PROPERTIES.

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

Abstract. The exact solution of the problem of deformation elastoviscoplastic environment enclosed between two rigid coaxial cylinders while turning one of them is obtained. On hard surfaces, the conditions of adhesion are performed. The solution is constructed in the media of large elastoviscoplastic strains. Reversible deformation and viscoplastic flow, unloading and its deformation at turn in the opposite direction are considered. Fields are calculated displacements, strains, stresses and velocities are calculated.

Keywords: elasticity, viscoplasticity, large deformations, residual stresses.

REFERENCES

- [1] *Bakhshiyani, F. A.* Rotation of a rigid cylinder in a viscoplastic medium / F. A. Bakhshiyani // Prikl. Mat. Mekh. – 1948. – Vol. 12. – №. 6. – P. 650–661.
- [2] *Burenin, A. A.* A Simple Model of Finite Strains in an Elastoplastic Medium / A. A. Burenin, G. V. Bykovtsev, and L. V. Kovtanyuk // Dokl. Akad. Nauk. – 1996. – Vol. 347. – №2. – P. 199–201.
- [3] *Burenin, A. A.* Viscosimetric Flow of an Elastoviscoplastic Material between Rigid Coaxial Cylindrical Surfaces / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, and A. S. Ustinova, // Vestnik ChGPU im. Yakovleva. Mekh. Predelnogo Sost. – 2007. – № 1. – P. 18–25.
- [4] *Burenin, A.A.* On Accounting for the Elastic Properties of a Non-Newtonian Viscosimetric Flow, / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, and A. S. Ustinova // Prikl. Mekh.i Tekhn. Fiz. – 2008. – Vol. 49. – № 2. – P. 143–151.
- [5] *Znamenskii, V. A.* On the equations a viscoplastic body with piecewise-linear potentials / V. A. Znamenskii, D. D. Ivlev // Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Mashinostroenie. – 1963. – № 6. – P. 114–118.
- [6] *Kovtanyuk, L. V.* On the theory of large elastoplastic deformations of materials with the temperature and rheological effects taken into account / L. V. Kovtanyuk, A. V. Shitikov // Vestnik Dal'nevostochn. Otd. Ross. Akad. Nauk. – 2006. – №4. – P. 87–93.
- [7] *Ogibalov, P. M.* Unsteady Motion of Viscoplastic Media / P. M. Ogibalov and A. Kh. Mirzadzhanzade. – M. : Izd. Mosk. Univ., 1970. – 415 p.
- [8] *Safronchik, A. I.* Rotation of a cylinder at a variable velocity in a viscoplastic medium / A. I. Safronchik // Prikl. Mat. Mekh. – 1959. – Vol. 23. – №. 6. P. 998–1014.

Burenin, Anatoly Aleksandrovich

corresponding member of the RAS, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Director of the Institute of machinery and metallurgy, Feb RAS, Komsomolsk-on-Amur

Kovtanyuk, Larisa Valentinovna

Dr. Sci. Phys. & Math., chair. lab. mechanics of irreversible deformation of the Institute of automation and control processes, Feb RAS, Vladivostok