

В.В. Юдин,
Е.С. Старцев,
И.Г. Пермякова¹

ГРУППОВАЯ СВЯЗКА ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУПП ФИБОНАЧЧИ-ПЕНРОУЗА

В рамках аксиоматического подхода построена групповая связка инверсных полугрупп Фибоначчи, для которой также найдена собственная подполугруппа. Она является соответствующей связкой полугрупп Пенроуза. Последнее можно трактовать как порождающую грамматику морфогенетического синтеза пентасимметричного паркета Пенроуза в числах замещения.

Введение

На множестве квазикристаллических симметрий разумно выделить минимальную подгруппу симметрий, которая в определенном смысле была бы достаточно близка к классическим симметриям. Таковыми, по нашему мнению, являются квартетная $4/8$ решетка, мозаика Пенроуза и бигексагональный паркет Дюно-Каца². В свою очередь, среди представителей этого минимального класса квазикристаллических симметрий стоит выделить паркет Пенроуза³. В нем в единый узел завя-

¹ Юдин Виталий Витальевич, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой Физических основ технологий информационных сред ДВГУ, профессор кафедры электроники ВГУЭС

e-mail: mih-alexey@yandex.ru;

Пермякова Ирина Геннадьевна, ведущий инженер кафедры электроники ВГУЭС

e-mail: irse@vimo.dvgu.ru; Научный руководитель Гряник Владимир Николаевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой электроники ВГУЭС. Специальность 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Старцев Евгений Сергеевич, ведущий инженер-программист кафедры Физических основ технологий информационных сред ДВГУ

E-mail: ses_1@mail.ru

² Гратиа Д. УФН. 1988. Т. 156. С. 347; Братковский А.М., Данилов Ю.А., Кузнецов Г.И. ФММ. 1989. Т. 68. С. 1045.

³ Стивенз П.В., Гоулдман А.И. В мире науки. 1991. Т. 6. С. 14; Нельсон Д.Р. В мире науки. 1986. Т. 10. С. 19; Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. - М.: Мир, 1993. - 416 с.

заны три аспекта: в мозаике Пенроуза усматривается органическое проявление золотой симметрии, налицо внутренняя причастность ряда Фибоначчи, и все это завершается свойством пентасимметричности.

В общих чертах задача, которую решал Пенроуз и другие математики¹, состояла в бездефектном замощении минимальным числом плиток пространств R_n . Можно было бы ввести понятие алфавита плиток, который, по нашему мнению, для мозаики Пенроуза имеет трехуровневый характер. Первый уровень образуется парой золотых треугольников Робинсона, второй является объединением треугольников Робинсона по золотым сторонам – пара золотых ромбов. Именно этим уровнем и работал Пенроуз при конструктивном построении своего пентасимметричного паркета². На этом уровне не существует алгоритма пентасимметричного покрытия в тьюринговской логике. Как отмечал сам Пенроуз, поочередное присоединение плиток, как правило, требует некоторой перестройки предыдущего окружения. Именно здесь он привлекает квантомеханическую парадигму для трактовки интегрального, целостного эффекта³.

Был сформулирован и третий уровень алфавита – дорзальный и звездчатый десятиугольники, состоящие из пяти широких и пяти узких золотых ромбов. На них гораздо проще было реализовать покрытие в конструктивных, нерекурсивных процедурах, хотя необходимо разрешить возможность минимальной пересеканности. С точки зрения теоретико-информационной⁴, если иметь ввиду теорию кодирования в приложении к задачам замощения, то возможно реализовать покрытие более простыми конструктивными процедурами. Наши десятиугольники это и есть кодировочные блоки, которыми «записывается текст» Пенроуза⁵.

Известна роль золотой симметрии, Фибоначчиевой последовательности в пентасимметричной мозаике Пенроуза. Поэтому было бы разумно остановиться на выяснении той алгебраической структуры, системы, которая лежит в основе процесса Фибоначчи. Это проделано в параграфах 1-2, что привело к построению групповой связки инверсных полу-групп Фибоначчи (ГСИПФ). Такая алгебраическая конструкция предполагает выполнимость очень важного скейлингового свойства (аксиома 4).

Фактически, задача покрытия осуществляется не абсолютно твердыми плитками, а плитками с золотым форм-фактором при сохранении постоянства отношения метрических характеристик этих золотых плиток. Нами предлагается морфогенетический принцип генерации моза-

¹ Пенроуз Р. Новый ум короля. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.

² Гарднер М. Указ. соч.; Пенроуз Р. Указ. соч.

³ Пенроуз Р. Указ. соч.

⁴ Юдин В.В., Любченко Е.А., Писаренко Т.А. Инормодинамика сетевых структур. – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2003. – 244 с.

⁵ Полянский Д.А. Дис. ... канд физ.-мат. наук. – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2005.

ик¹. Полугрупповые конструкции работают в задаче морфогенеза на числах заполнения золотыми ромбами, которые как раз и подчиняются сформулированной нами аксиоматике. Поскольку ГСИПФ относится к несобственным полугруппам, необходимо получить собственную подполугруппу. Это проделано в третьем параграфе, именно на этом пути мы получаем полугрупповую связку инверсных полугрупп Пенроуза – Фибоначчи.

Аксиоматика системы Фибоначчи

Под *F*-системой мы будем понимать итеративно, рекурсивно функционирующий «черный ящик», четырехполюсник, выходом которого является известный ряд Фибоначчи. Его было бы лучше именовать *F*-генератором. Как всякий четырехполюсник, генератор описывается в терминах «вход-выход» и оператором перехода. Состояние системы задается вектором на входе и выходе четырехполюсника, а движение, преобразование векторных состояний, осуществляется соответствующим оператором единичного сдвига (рис. 1). На этом рисунке приведена эквивалентная схема цепной логики движения по ряду Фибоначчи в терминах обратной связи. Такая логическая схема обладает некоторым скейлинговым свойством, что весьма важно для дальнейшего рассмотрения.

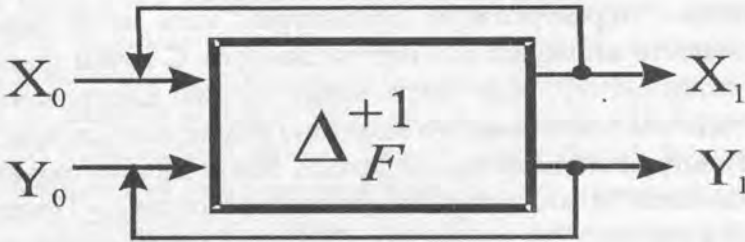


Рис. 1. Общая схема черного ящика Фибоначчи. Δ_F^{+1} – матрица Фибоначчи правого единичного сдвига. $\{(x_0; y_0), (x_1; y_1)\}$ – бивектора состояния, входа-выхода

Наша ближайшая задача состоит в установлении структуры «черного ящика», четырехполюсника (рис. 1), исходя из простейших предположений. Эту задачу можно отнести к классу задач идентификации, синтеза систем. Простейшее представление системы Фибоначчи будет реализовано в схеме векторного представления и в представлении линейного,

¹ Карыгина Ю.А. Дис. ... канд физ.-мат. наук. – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2002; Юдин В.В., Карыгина Ю.А. Кристаллография. – М., 2001. Т. 46. С. 1004; Карыгина Ю.А., Юдин В.В. Материаловедение. – М., 2001. Т. 12. С. 12; Юдин В.В., Любченко Е.А., Писаренко Т.А. Прикладная синергетика, фракталы и компьютерное моделирование структур: Сб. науч. трудов. – Томск, 2002. С. 343.

матричного оператора единичного (правого) сдвига. Уравнение движения F^+ -генератора:

$$(x_n; y_n) = \dots \Delta_F^{+1}(\Delta_F^{+1}(\Delta_F^{+1}(x_0; y_0))). \tag{1}$$

Бивектора и Δ_F^{+1} - генератор, его матричные элементы, определены на множестве N - натуральных чисел. Выходом итеративно-рекуррентной процедуры (1) должна быть последовательность Фибоначчи. Сформулируем несколько аксиом, которые позволят «вскрыть» структуру «черного ящика» (рис. 1).

Аксиома 1. Состояние F -системы будет задавать бивектор $(x; y) \in R_F(x; y) \subset R_N(x; y)$. Пространство $R_N(x; y)$ представляет собой двумерную решетку на N - множестве натуральных чисел. Подпространство $R_F(x; y)$ - тоже двумерная подрешетка Фибоначчи на $R_N(x; y)$. Начальным бивектором объявляется $(x_0; y_0) \equiv (1; 1)$. $Norm(x; y) = x + y$, а с ней определена на $R_N(x; y)$ метрика «города».

Аксиома 2. Функционирование генератора Фибоначчи задается F -цепью:

$$\begin{aligned} (x_0; y_0) \Delta_F^{+1} &= (x_1; y_1), \\ (x_1; y_1) \Delta_F^{+1} &= (x_2; y_2), \\ &\dots \\ (x_n; y_n) \Delta_F^{+1} &= (x_{n+1}; y_{n+1}), \\ (x_0; y_0) (\Delta_F^{+1})^n &= (x_n; y_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Выражение (2) запишем в «фильтровой» форме (рис .2):

$$\Delta_F^{+n} = \prod^n \Delta_F^{+1} = (\Delta_F^{+1})^n. \tag{3}$$

Выражения (2,3) указывают, что $(\Delta_F^{+1})^n$ -генераторы образуют матричную, операторную орбиту, траекторию с групповым свойством.

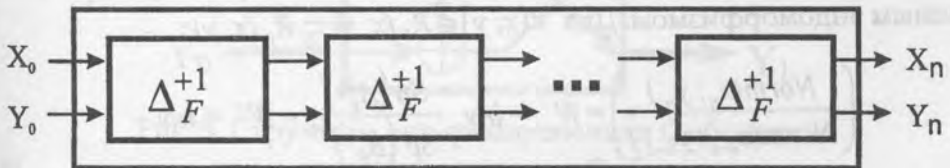


Рис. 2. Скейлинговая декомпозиция F^+ - цепи.

$$\forall (x; y) \in R_F(x; y) \subset R_N(x; y), \Delta_F^{+1} \in \{(2 \times 2)\text{-матриц}; \Delta_{i,k \leq 2}^{+1} \in N_0 \subset N\}$$

Аксиома 3. Наложим на Δ_F^{+1} - (2×2) - матрицы единичного правого сдвига с матричными элементами $\{\Delta_{ik}^{+1}\} \in N$, условия специальности и простоты. Потребуем, чтобы:

$$\begin{aligned} |\det \Delta_F^{+1}| = 1; \quad Sp \Delta_F^{+1} = 1, \\ \{\Delta_{ik}^{+1}\} \in N_0 \subset N; \quad N_0 = 0 \vee 1. \end{aligned} \quad (4)$$

В общем плане: $x' = \varphi_1(x; y)$; $y' = \varphi_2(x; y)$ и эти функции линейные. Введем диссимметричное условие, при этом:

$$x' = \varphi_1(x; y), \quad y' = \varphi_2(x), \quad \Delta_{22}^{+1} \equiv 0. \quad (5)$$

Фактически вводится некоторое отношение типа старшинства в пространстве $R_N(x; y)$. Для установления структуры Δ_F^{+1} -генератора достаточно (4,5), а не общей линейной зависимости. Условие (4) сразу приводит к:

$$E \notin \left\{ (\Delta_F^{+1})^n \right\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Это выражение означает, что операторная орбита (3) обладает полугрупповым свойством. Правая компонента ряда Фибоначчи характеризуется существенно необратимой эволюцией и представляет разрастающийся, развертывающийся F^+ -ряд. Для Δ_F^{+1} -генератора определим норму:

$$Norm(\Delta_F^{+1}) = Sp(\Delta_F^{+1} \cdot \Delta_F^{+1T}) \Rightarrow \sum_{i,k=1}^2 \Delta_{ik}^{+1}. \quad (7)$$

Норма (7) согласована с нормой бивекторов (аксиома 1). Выражение (6) также показывает, что никакое инфинитезимальное преобразование $(\Delta_F^{+1})^n$ -орбиты F^+ -генераторов не может стартовать от единичного, тривиального идемпотента. Тем самым свойство полугрупповости F^+ -ряда существенно и принципиально.

Аксиома 4. Наделим полугрупповую орбиту Δ_F^{+1} -генератора естественным эндоморфизмом. Для $\forall(x; y) \in R_F(x; y) \subset R_N(x; y)$:

$$\left(\frac{Norm(x_n; y_n)}{Norm(x_{n-1}; y_{n-1})} \right) = W^+ = inv \frac{Sp(\Delta_F^{+1})^n}{Sp(\Delta_F^{+1})^{n-1}} = W^+ = inv \quad (8)$$

$$\left(\frac{Norm(x_n; y_n)}{Norm(x_{n+1}; y_{n+1})} \right) = W^- = inv \frac{Sp(\Delta_F^{+1})^{n-1}}{Sp(\Delta_F^{+1})^n} = W^- = inv \quad (9)$$

$$W^+ W^- = 1. \quad (10)$$

Как видно из (8-9), F^+ -эволюция согласована, не сохраняет норму, метрику, однако, она сохраняет их отношение. Причем, при правых (8) - левых (9) сдвигах выполняется (10) - условие дуальности, сопряжения. Для F^+ -эволюции $W^+ = \alpha_2 \approx 1,618$ - большое золотое число, а для F^- -процесса $W^- = \alpha_1 \approx 0,618$ - малое золотое число. Очевидно, $\alpha_2\alpha_1 = 1$ конкретизирует (10) именно для системы Фибоначчи.

Введенный аксиомой 4 эндоморфизм - скейлингового типа. Процесс Фибоначчи реализуется преобразованиями подобия (рис. 2).

Групповая связка инверсных полугрупп Фибоначчи

Изложенные выше аксиомы, предлагают следующий явный вид F^+ -генератора:

$$\Delta_F^{+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad Sp \Delta_F^{+1} = 1, \quad \det \Delta_F^{+1} = -1. \quad (11)$$

Это известная Q-матрица Фибоначчи¹ [1]. Нетрудно для (11) выпи- сать элементарные диаграммы. Норма Δ_F^{+1} , согласно (7), будет следующая:

$Norm(\Delta_F^{+1}) = \sum_{i=1, k=1}^2 \Delta_{ik}^{+1} = 3$. Спектр собственных значений F^+ -системы (11) двухточечный и равен:

$$\lambda_{F_1}^+ = \alpha_2 \approx 1,618, \quad \lambda_{F_2}^+ = -\alpha_1 \approx -0,618 \quad (12)$$

Положительное собственное значение (12) и будет определять темп функционирования генератора F^+ -эволюции. Отрицательность детер- минанта (11) указывает на несобственный характер действия F^+ - генератора. Следовательно, необходимо выделить и собственную компо- ненту полугрупповой орбиты, налагая условия: $\det(\Delta_F^{+1}) = +1$.

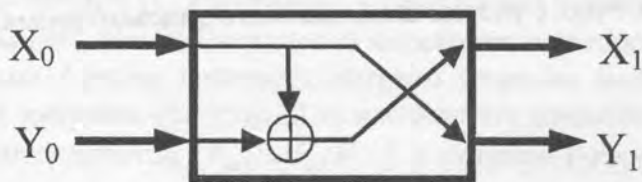


Рис. 3. Структура четырехполюсника Фибоначчи для разрастающегося ряда Фибоначчи

Выражения (11) позволяют вскрыть структуру четырехполюсника Фибоначчи. Из (рис. 3) видна принципиально дисимметричная структу-

¹ Gould H.W. Fib. Quart. 1981. V. 19. P. 250.

ра F^+ -черного ящика, что обусловлено структурой генератора Фибоначчи (11). Образует F^+ -цепь:

$$(1;1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2;1); \quad (2;1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (3;2); \dots; (F_n; F_{n-1})\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (F_{n+1}; F_n). \quad (13)$$

Из (13) видно, что Δ_F^{+1} - генератор осуществляет единичный правый сдвиг бивекторов и генерирует из $(x_0; y_0) = (1;1)$ последовательность Фибоначчи. Выражения (11) указывают на один момент в арифметическом алгоритме ряда Фибоначчи. Наряду с попарным суммированием $(y_i + x_i) = x_{i+1}$ надо предусмотреть инверсию: $x_i = y_{i+1}$. Именно это преобразование как раз и содержится в структуре (11) Δ_F^{+1} -генератора и фильтра Фибоначчи (рис. 3). Теперь на (2,3) строим F^+ -полугрупповую орбиту:

$$\left(\Delta_F^{+1}\right)^n \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \dots; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\det\left(\Delta_F^{+1}\right)^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \pm 1. \quad (15)$$

Матричные элементы степеней Δ_F^{+1} -генератора (14) состоят из членов F^+ -ряда с условием унимодулярности (15). Последнее показывает, что в F^+ -орбите (14) можно выделить собственную подорбиту с положительным детерминантом. Очевидно, этому условию удовлетворяют четные степени. Именно так и была получена полугрупповая орбита Пенроуза¹. В выражении (14) матричную форму $\left(\Delta_F^{+1}\right)^n$ -орбиты можно эквивалентно отобразить в триплетную. Этот триплетный единичный правый сдвиг и наследует полугрупповую F^+ -орбиту в ряде Фибоначчи. Условие положительности детерминанта степеней F^+ -генераторов видимо является условием морфогенетической реализуемости паркета Пенроуза², конечно, с учетом скейлингового эндоморфизма.

¹ Юдин В.В., Писаренко Т.А., Любченко Е.А. и др. Кристаллография. - М., 2002. Т. 47. С. 224; Карыгина Ю. А. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2002.

² Карыгина Ю.А. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2002; Юдин В.В., Карыгина Ю.А. Кристаллография. - М., 2001. Т. 46. С. 1004; Карыгина Ю.А., Юдин В.В. Материаловедение. - М., 2001. Т.12. С. 12; Юдин В.В., Любченко Е.А., Писаренко Т.А. Прикладная синергетика, фракталы и компьютерное моделирование структур: Сб. науч. трудов. - Томск, 2002. С. 343.

Обсуждаемое скейлинговое свойство полугруппы Фибоначчи (аксиома 4) можно сделать наглядным, если осуществить комплексификацию F^+ -полугруппы в $R_N(F_n; F_{n-1})$ -пространстве:

$$\begin{aligned} (x_n; y_n) &\rightarrow (F_n + iF_{n-1}); \text{Norm}(F_n + iF_{n-1}) = (F_n + iF_{n-1})(F_n - iF_{n-1}) = \\ |F_n| + |F_{n-1}| &= F_n + F_{n-1} = F_{n+2}. \end{aligned} \quad (16)$$

В выражении (16) использована метрика «города». При комплексификации Δ_F^{+1} -генератора должны выполняться условия специальности (11) и сохраняться спектр собственных значений (12). Комплексифицированный (F^+) -генератора Фибоначчи (11) запишется:

$$\left(\Delta_F^{+1}\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \text{Sp}\left(\Delta_F^{+1}\right)^* = 1, \quad \det\left(\Delta_F^{+1}\right)^* = -1. \quad (17)$$

Общий член комплексифицированной (F^+) -цепи запишется:

$$(F_n + iF_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = ((F_n + F_{n-1}) + iF_n) = (F_{n+1} + iF_n); \forall n = 1, 2, 3 \dots N. \quad (18)$$

Нетрудно видеть из (17,18), что (Δ_F^{+1}) является гиперкомплексным натуральным числом. Комплексифицированная полугрупповая орбита (14) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & i2 \\ -i2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 5 & i3 \\ -i3 & 2 \end{pmatrix}; \dots \\ \left(\Delta_F^{+1}\right)^n &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & iF_n \\ -iF_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Изобразим на диаграмме Аргана полугрупповую орбиту (19) комплексифицированной (F^+) -эволюции в триплетном представлении. При этом надо помнить, что на Евклидовой плоскости, в которой всегда строится диаграмма Аргана, действует метрика «города» (аксиома 1), а не квадратичная метрика. На (рис. 4) приведено это неевклидово построение динамики триплетов $(F_{n+1}; \pm iF_n; F_{n-1})$ в метрике F -города. В частности, на (рис. 4) показана последовательность следующих триплетов из (19): $(3; \pm i2; 1)$, $(5; \pm i3; 2)$, $(8; \pm i5; 3)$, $(13; \pm i8; 5)$, $(21; \pm i13; 8)$.

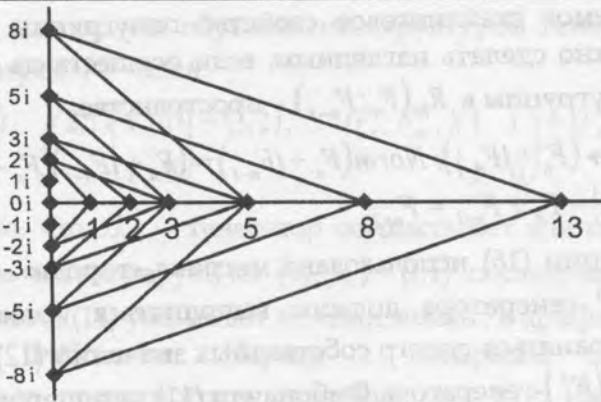


Рис. 4. Комплексифицированная динамика триплетов Фибоначчи в гиперкомплексных натуральных числах

Отношение катетов «наконечников стрелы» подчиняется золотой инвариантности: $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \alpha_2 = Au_2 - inv$, как и требовалось в аксиоме 4.

Комплексификация триплетов степеней (19) $(\Delta_F^{+1})^n$ делает наглядным принцип самоподобия F^+ -эволюции. Такое свойство является необходимым условием фрактальности F^+ -эволюции.

Обратим четырехполюсник F^+ -системы (рис. 3) и элементарные диаграммы. Тогда структура F^- -четырёхполюсника запишется (рис. 5):

$$\Delta_F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; Sp(\Delta_F^{-1}) = -1, \quad (20)$$

$$\det(\Delta_F^{-1}) = -1.$$

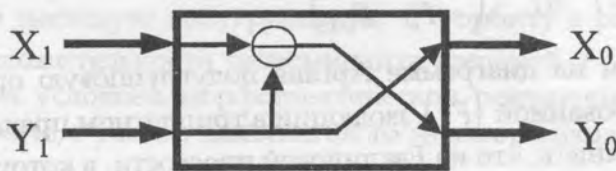


Рис. 5. Структура фильтра коллапсирующего ряда Фибоначчи

Δ_F^{-1} - генератор левого единичного сдвига работает в обратном времени. Спектр собственных значений Δ_F^{-1} также двухточечный:

$$\lambda_{F_1}^- = \alpha_1, \lambda_{F_2}^- = -\alpha_2. \quad (21)$$

Сравним (21) с (12). Видно, что логика собственных значений идентична. Отталкиваясь от (11) и (20), получаем:

$$\Delta_F^{+1} \Delta_F^{-1} = E \notin \left\{ (\Delta_F^{+1})^n \right\}. \quad (22)$$

Тем самым мы имеем две сопряженных полугрупповых F^\pm компоненты, которые описывают разрастающуюся и коллапсирующую полугруппы. Уже на этом уровне ясно, что мы пришли к:

$$SL\left\{\left[R_N\left(\vec{x}; y\right); \Delta_F^{+1} \right] \cup \left[R_N\left(\overleftarrow{x}; y\right); \Delta_F^{-1} \right] \right\} \quad (23)$$

- групповой связке инверсных полугрупп Фибоначчи, причем квантор объединения идет с условием (22), но $E \notin \left\{ \left(\Delta_F^{\pm 1} \right)^n; n=1,2,3,\dots \right\}$.

Обсудим теперь, аналогично разрастающейся F^+ -эволюции, коллапсирующий F^- -процесс (рис. 5). Действие Δ_F^{-1} -генератора (20), являющегося единичным левым сдвигом, так же приводит к F^- -цепи:

$$\begin{aligned} (x_n; y_n) \Delta_F^{-1} &= (x_{n-1}; y_{n-1}), \\ (F_{n+1}; F_n) \Delta_F^{-1} &= (F_n; F_{n-1}). \end{aligned} \quad (24)$$

На (24) действует та же «абсолютная» норма, что и в $R_N(\overrightarrow{x}; y)$ - бивекторном пространстве. Тогда, например:

$$\begin{aligned} (F_6; F_5) \Delta_F^{-1} &= (F_5; F_4); (5; 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ (3; 2) &\rightarrow (2; 1) \rightarrow (1; 1) = (x_0; y_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) видно, что это та же, но «обратная» F^- последовательность с левым единичным сдвигом. Построим F^- полугрупповую орбиту:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \dots \\ \left(\Delta_F^{-1} \right)_n^{n-\text{четн.}} &= \begin{pmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}; \quad \left(\Delta_F^{-1} \right)_n^{n-\text{нечетн.}} = \begin{pmatrix} -F_{n-1} & F_n \\ F_n & -F_{n+1} \end{pmatrix}; \\ \det \left(\Delta_F^{-1} \right)_n &= \pm 1. \end{aligned}$$

Согласно алгебраической теории полугрупп¹, структура полугруппы определяется своими идемпотентами. Наряду с тривиальными единичными, основополагающую роль играют нулевые идемпотенты - неподвижные точки, или, в общем случае, некоторые стационарные режимы. Однако для группового свойства особенно важны нетривиальные единичные идемпотенты. Для этого образуем средний генератор Фибоначчи:

$$\overline{\Delta_F^{\pm 1}} \equiv \frac{\Delta_F^{+1} + \Delta_F^{-1}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_3 + \hat{S}_1,$$

¹ Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2. - М.: Мир, 1972. 422 с.; Ляпин Е.С. Полугруппы. - М.: Наука, 1960. 592 с.

где \hat{S}_3 и \hat{S}_1 - матрицы Паули. Они являются нетривиальными единичными идемпотентами: $\hat{S}_3^2 = \hat{S}_1^2 = E$.

\hat{S}_3 - матрица Паули имеет собственные значения $\hat{S}_3^+ = \frac{1}{2}$, $\hat{S}_3^- = -\frac{1}{2}$, которые обычно трактуются как спин. Со времен Ван-дер-Вардена спин является собственным значением оператора представления группы вращения SO_3 . В работе¹ нам удалось показать, что на полугруппе релятивистских эндоморфизмов² спиновый оператор представления в смысле Ли генерируется пространственно-временным генератором вышеуказанной полугруппы. Если интерпретировать этот результат буквально, то «стрела времени», введенная еще А. Эддингтоном, приобретает спинорную семантику а не векторную.

Система Пенроуза как собственная подполугруппа Фибоначчи

Собственная подполугруппа предполагает, что определитель генератора полугруппы должен быть положителен и равен единице. При этом достаточно образовать квадрат оператора Фибоначчи (11):

$$\begin{aligned} (\Delta_F^{+1})^2 = \Delta_P^{+1} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Delta_P^{+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; Sp \Delta_P^{+1} = 3, \det \Delta_P^{+1} = +1. \end{aligned} \quad (26)$$

Так, полученный генератор является порождающим мозаики Пенроуза. Спектр оператора Пенроуза Δ_P^{+1} - двухточечный:

$$\lambda_{p_1} \approx 2,618 = \alpha_2^2, \lambda_{p_2} \approx 0,382 = \alpha_1^2. \quad (27)$$

Как мы видим, спектр оператора Пенроуза (26) состоит из положительных собственных значений (27), в отличие от спектров операторов Фибоначчи (12,21). Положительность спектра генератора Пенроуза как раз и отражает собственный характер полугруппы Пенроуза, которая является подполугруппой Фибоначчи. Спектр собственных значений оператора Пенроуза (27) является квадратом аналогичных собственных значений полугруппы Фибоначчи (12).

Построим P^+ -цепь $(R_p(x, y) \subset R_N(x, y)$ - бивекторное пространство).

Пусть стартовый бивектор: $(x_0, y_0) = (1;1)$. Тогда P^+ -цепь запишется:

$$(1;1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} (3;2) \xrightarrow{(2)} (8;5) \xrightarrow{(3)} (21;13) \xrightarrow{(4)} \dots \xrightarrow{(n)} (F_{2n+2}; F_{2n+1}). \quad (28)$$

¹ Юдин В.В. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - М., Ун-т Дружбы народов, 1970.

² Юдин В.В., Ершов А.Д. Физика // Изв. вузов СССР. 1970. Т. 6. С. 49.

Δ_p^{+1} - генератор Пенроуза осуществляет двоичный правый сдвиг бивекторов вдоль ряда Фибоначчи. При F^+ -сдвиге оператор осуществляет зацепляющий сдвиг вдоль цепи на единицу; это действительно обычная цепь. Генератор Пенроуза также формирует цепь, но с двоичным сдвигом.

В общем виде закон P^+ -цепи будет иметь следующий вид:

$$(1;1)(\Delta_p^{+1})^n = (F_{2n+2}; F_{2n+1}).$$

Построим полугрупповую P^+ -орбиту:

$$(\Delta_p^{+1})^n \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}; \dots; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Согласно (29), орбита осуществляет двоичный сдвиг-триплетов, но при этом сохраняется обычное зацепление. На триплетах детерминант положительный и единичный, что и требуется для собственной полугруппы. В случае полугруппы Фибоначчи определитель степеней генераторов будет чередоваться:

Прежде чем продолжить, покажем алгоритм порождения мозаики Пенроуза. Сразу отметим, что наш подход не относится к задаче простого замощения, когда исходные плитки являются абсолютно твердыми¹. Если отказаться от принципа абсолютной твердости плиток и базироваться на полугруппах подобия с соответствующим скейлингом (аксиома 4), мы придем к морфогенетическому классу синтеза паркета, мозаики². Можно ввести трехуровневый бинарный золотой алфавит, который и будет участвовать в морфогенезе Пенроуза (рис. 6). При этом должны выполняться вышеприведенные нами аксиомы морфогенетического покрытия.

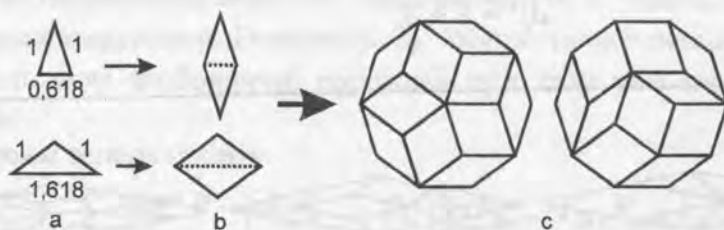


Рис. 6. Трехуровневый алфавит паркета Пенроуза. (а) - пара треугольников Робинсона. (б) - пара золотых ромбов. (с) - дорзальный и звездчатый десятиугольники

¹ Пенроуз Р. Новый ум короля. - М.: Едиториал УРСС, 2003. 384 с.

² Карыгина Ю. А. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2002; Юдин В.В., Карыгина Ю.А.//Кристаллография. 2001. Т. 46. С. 1004; Карыгина Ю.А., Юдин В.В. Материаловедение. - М., 2001. Т.12. С. 12; Юдин В.В., Любченко Е.А., Писаренко Т.А. Прикладная синергетика, фракталы и компьютерное моделирование структур: Сб. науч. трудов. - Томск, 2002. С.343.

Первый уровень составляют треугольники Робинсона. Второй уровень алфавита – золотые ромбы: x -ромб и y -ромб, получаемые из треугольников Робинсона путем объединения по золотому основанию (рис.6b). Третий уровень – десятиугольники: дорзальный и звездчатый, состоящие из пяти x -ромбов и пяти y -ромбов (рис.6с) [4].

При морфогенетическом синтезе паркета Пенроуза (рис. 7), стартовым, например, можно взять x -ромб в качестве рамки, внутри которой в уменьшенной копии показан аналогичный x -ромб (первое поколение). При этом преобразовании подобия выполняется аксиома 4, а дополнение первой окрестности до рамки реализуется золотыми треугольниками также при условии непересекаемости. На третьем поколении (рис. 7) уже сформировался представитель диადы третьего уровня алфавита, им является выпуклый дорзальный десятиугольник, который основан на x -ядре. Первая координационная сфера дополняется элементами алфавита низшей размерности; аналогично строится рамочное дополнение. В четвертом поколении (рис. 7) четко видна ядерная группа дорзального и звездчатого десятиугольников из третьего уровня алфавита с минимальным пересечением по y -ромбу. Аналогично формируются координационные сферы и рамочные дополнения на золотом алфавите низших размерностей.

Полугрупповая инверсная алгебраическая структура (23) задается на числах замощения по второму уровню алфавита – парой золотых ромбов.

Обычно в алгебраической теории полугрупп понимание генераторов полугрупп требует его разложения на возможные нетривиальные идемпотенты. Или надо искать связь между генераторами Фибоначчи (11) и Пенроуза (26).

Нетрудно видеть, что:

$$\Delta_P^{+1} = E + \Delta_F^{+1}. \tag{30}$$



Рис. 7. Шесть поколений морфогенетического синтеза паркета Пенроуза на основе трехуровневого дуального золотого алфавита

Как и в случае с генератором Фибоначчи, это означает существенно полугрупповой характер орбиты (29). Однако, наряду с правой полугруппой следует различать и левую полугруппу, вследствие чего можно придти к групповой связке полугрупп Пенроуза. В этом смысле, ситуа-

ция с собственными компонентами полугруппы Пенроуза аналогична ГСИПФ (23). Строим левую P^- -полугруппу:

$$\Delta_P^{-1} = (\Delta_F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (31)$$

$$Sp\Delta_P^{-1} = 3, \det\Delta_P^{-1} = 1.$$

Условия специальности для обычных компонент подполугруппы одинаковые, что и должно быть для собственных орбит. Очевидно:

$$\Delta_P^{-1} \cdot \Delta_P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = E. \quad (32)$$

Теперь мы подошли вплотную к групповой связке полугрупп.

Однако, из (31) и (32) видно, что матричные элементы «обратных компонент» как генератора Фибоначчи (20), так и генератора Пенроуза (31), имеют отрицательные значения. Фактически, за инверсную обратимость надо заплатить расширением множества натуральных чисел до множества целых чисел. Также преобразуются элементарные диаграммы. Спектр Δ_P^{-1} двухточечный: $\lambda_{P_1}^- = \alpha_2^2$, $\lambda_{P_2}^- = \alpha_1^2$. И условие специальности, и спектр обеих полугрупповых компонент идентичны.

Рассмотрим, как функционирует полученный генератор Δ_P^{-1} . Образует P^- -цепь:

$$(F_{n+1}; F_n)\Delta_P^{-1} = (F_{n-1}; F_{n-2}). \quad (33)$$

Если сравнить цепи (33,28), видно, что они логически идентичны, с той лишь разницей, что двоичный сдвиг левый. То есть мы имеем дело с «обратной» последовательностью Фибоначчи для P^+ -цепи, а именно, с цепью коллапсирующей. Генератор Δ_P^{-1} осуществляет левый двоичный сдвиг вдоль ряда Фибоначчи, порождая при этом уже знакомую нам P^- -подцепь.

Построим теперь орбиту:

$$(\Delta_P^{-1})^n = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & -F_{2n} \\ -F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix} \vee (F_{2n-1}, -F_{2n}, F_{2n+1}). \quad (34)$$

И снова, что подтверждает полугрупповые свойства P^- -системы (34). На P^- -орбите осуществляется двоичный левый сдвиг триплетов, с обычным цепочным зацеплением. Нетрудно и для левого генератора Пенроуза усмотреть связь с генератором Δ_F^{-1} :

$$\Delta_P^{-1} = E - \Delta_F^{-1}, \quad (35)$$

которая аналогична структуре (30). Условия (30,35) очень похожи на ортогональное (антиортогональное) разложения единичного оператора. Для растущих орбит все точки ряда Фибоначчи являются седельными, а для P^- -орбиты в коллапсирующем варианте имеют фокусный характер.

Разрастание и коллапсирование алгебраически эквивалентны в прямом и обратном временах. Однако, T-инвариантность приводит к невозможности построения квазивероятностных мер на коллапсирующих орбитах. Тем самым «стрела Времени» в эволюционном смысле может быть продиктована только лишь разрастающейся полугруппой Фибоначчи. Необходимо подчеркнуть, что процесс эволюции обязан снять спиновое вырождение, проведя выбор, режекцию прямого и обратного времени, породив эволюционное время или «стрелу времени». Здесь важно отметить, что «стрела времени» появляется в процессе размножения, который изучал Фибоначчи. Она не является следствием естественного отбора¹.

Заключение

В статье на базе аксиоматики для системы Фибоначчи построена групповая связка инверсных полугрупп Фибоначчи. Установлена идемпотентная структура ГСИПФ². Показано, что генератор Фибоначчи может быть представлен через спиновые матрицы Паули. Это позволяет предложить новую трактовку «стрелы Времени»³ на примере процесса Фибоначчи в спинорной, а не векторной форме. Полугрупповая орбита ГСИПФ, порожденная генератором Фибоначчи, сопряжена с замечательным рядом, в данном случае это ряд Фибоначчи. В гиперкомплексных натуральных числах продемонстрировано скейлинговое свойство ГСИПФ.

Построена собственная подполугруппа Фибоначчи, которая является порождающей грамматикой морфогенетического синтеза паркета Пенроуза в числах замощения. Полугруппа Пенроуза индуцирована соответствующим генератором, который является квадратом генератора Фибоначчи. Последнее эквивалентно тому, что паркет Пенроуза является прямой суммой систем Фибоначчи. Найдена связь между идемпотентами системы Фибоначчи и Пенроуза⁴.

¹ Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р. Физика процессов эволюции. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. 328 с.

² Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2. – М.: Мир, 1972. 422 с.; Ляпин Е.С. Полугруппы. – М.: Наука, 1960. 592 с.

³ Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р. Физика процессов эволюции. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. 328 с.

⁴ Клиффорд А., Престон Г. Указ. соч., Ляпин Е.С. Указ. соч.