III. HITECH

УДК 519.63, 532.5.031, 551.465

А.И. Шавлюгин[1]

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ВИХРЕВОГО ДИПОЛЯ В КРУГЛОМ ПРОТОЧНОМ БАССЕЙНЕ

Рассматривается задача об определении стационарной формы вихревого диполя, образованного ВП в бассейне с проточным течением, индуцированным источником и стоком равной интенсивности, расположенными на границе бассейна в его диаметрально противоположных точках. Предложен численный метод определения стационарной формы вихревого диполя, сводящий исходное условие стационарности границы составляющих его ВП к системе нелинейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения формы вихрей диполя в ряд Фурье и интенсивности источника и стока.

Введение

Изучение стационарных состояний фронтов завихренности (ФЗ) и вихревых пятен (ВП) является актуальным направлением исследований в классической и геофизической гидродинамике. Под ФЗ в плоских задачах гидродинамики понимается линия, разграничивающая области с постоянными и различными значениями вихря скорости, а ВП представляет замкнутую область, ограниченную ФЗ. Такой интерес объ-

[1] Шавлюгин Александр Иванович, кандидат физико-математических наук, начальник НИС, доцент кафедры электроники ВГУЭС.
e-mail: Alexander.Shavlyugin@vvsu.ru

ясняется прежде всего тем, что в ходе эволюции плоского течения идеальной несжимаемой жидкости, индуцированного некоторым начальным распределением завихренности, как правило наблюдается (это подтверждается результатами численных и лабораторных экспериментов) его трансформация к квазистационарному состоянию, сопровождаемая незначительными колебаниями относительно положения равновесия.

В зависимости от граничных условий рассматриваемых задач возможны различные виды стационарных состояний ФЗ и ВП. Так, в частности, для неограниченной жидкости известно, что однородно завихренная эллиптическая область (вихрь Кирхгофа) вращается как твердое тело с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{ab}{(a+b)^2}\omega\,,$$

где a, b – полуоси эллипса, ω – величина завихренности внутри него (вне вихря завихренность равна нулю). Выполненный в последующем линейный анализ устойчивости показал, что вихрь Кирхгофа устойчив относительно бесконечно малых возмущений его формы при условии, что отношение полуосей эллипса не превышает 3. Полученные Кирхгофом результаты нашли свое развитие в работе Deem, Zabusky[1], где были численно построены m-симметричные ротационные стационарные состояния ВП в неограниченной жидкости (форма вихря совпадает с исходной при повороте относительно его центра на угол $2\pi/m$). Фактически, найденные в цитируемой работе решения представляют собой волны конечной амплитуды и различной длины, возмущающие ВП круглой формы. Кроме того Deem, Zabusky определили стационарную форму вихревого диполя, движущегося с постоянной линейной скоростью, не меняя своей формы.

В дальнейшем стационарные формы областей постоянной завихренности были численно найдены и в других модельных задачах. В частности в работе Pullin, Jacobs[2] были построены стационарные волны конечной амплитуды на фронте завихренности, разделяющем в невозмущенном состоянии полуплоскости, на границе которых завихренность изменяется скачком. Шавлюгиным[3] было обнаружено, что от стационарных состояний таких фронтов, расположенных возле прямолинейной границы и обладающих максимальной амплитудой, должны бифурцировать другие стационарные состояния, в которых исходная область постоянной завихренности становится неодносвязной.

---

[1] Deem G.S., Zabusky N.J. Vortex waves: stationary V-states, interactions recurrence and breaking // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 40. №13. P. 859-862.

[2] Pullin D.I., Jacobs P.A. Nonlinear waves in a shear flow with a vorticity discontinuity // Stud. Appl. Math. 1986. V. 75. № 1. P. 77-94.

[3] Шавлюгин А.И. Стационарные состояния областей постоянной завихренности возле прямолинейной границы (плоская пространственно периодическая задача) // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1992. Т. 28. №5. С. 529-537.

В настоящей работе предложен численный метод построения стационарных состояний вихревого диполя, представляющего собой два зеркально симметричных ВП с противоположными знаками завихренности в круглом бассейне. Подобная постановка задачи безусловно представляет интерес, поскольку позволяет учесть граничные условия, являющиеся типичными для лабораторных экспериментов и присутствующие в модельных задачах геофизической гидродинамики при изучении течений в замкнутых водоемах.

Принципиальное отличие рассматриваемой в работе модели от случая неограниченной жидкости заключается в том, что присутствие в потоке твердых границ делает невозможным неограниченное во времени прямолинейное движение диполя. Чтобы остановить движение пары, требуется дополнительный учет некоторого фонового течения, генерируемого, например, источником и стоком равной интенсивности, расположенными на границе бассейна. Это придает течению жидкости в бассейне проточный характер и позволяет остановить движение пары. Таким образом, предложенный подход также имеет ясное геофизическое содержание и позволяет моделировать течения в замкнутых водоемах с проливами, которые характерны, в частности, для окраинных Дальневосточных морей.

Описание поля течения

Рассматривается движение однородно завихренной области $D(t)$ в плоском потоке идеальной однородной несжимаемой жидкости. Уравнение неразрывности

$$u_x + v_y = 0$$

позволяет ввести функцию тока $\Psi(x,y,t)$, связанную с проекциями вектора скорости u, v известными соотношениями

$$u = -\Psi_y,\ \ v = \Psi_x, \tag{1}$$

где индексы означают частное дифференцирование по соответствующей переменной. Благодаря уравнениям движения Эйлера

$$u_t + uu_x + vu_y = -\frac{p_x}{\rho},\ v_t + uv_x + vv_y = -\frac{p_y}{\rho},$$

где p – давление, ρ – плотность), завихренность

$$\omega = v_x - u_y = \Psi_{xx} + \Psi_{yy} = \Delta\Psi$$

удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega_t + u\omega_x + v\omega_y = 0$$

Предположим, что в пределах $D(t)$ завихренность постоянна и равна ω_0, а вне рассматриваемой области равна нулю. Тогда, обращая оператор

Лапласа и принимая во внимание закон сохранения завихренности, получаем

$$\Psi(x,y,t)=\omega_0\iint\limits_{D(t)}G(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta\,, \tag{2}$$

где введена функция Грина $G(x,y;\xi,\eta)$; (x,y), (ξ,η) – координаты точек наблюдения и интегрирования соответственно.

В дальнейшем ограничим рассмотрение случаем, когда область течения представляет круг радиуса a. Функция Грина для оператора Лапласа, удовлетворяющая сформулированным граничным условиям ($G=0$ при $r=\sqrt{x^2+y^2}=a$), имеет вид

$$G=\frac{1}{2\pi}\left[\ln R-\ln\frac{R^*\rho}{a}\right], \tag{3}$$

где обозначено $\rho=(\xi^2+\eta^2)^{1/2}$, $(\xi^*,\eta^*)=\frac{a^2}{\rho^2}(\xi,\eta)$, $R=\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]^{1/2}$, $R^*=\left[(\xi^*-x)^2+(\eta^*-y)^2\right]^{1/2}$.

Вычисление функции тока, а в силу (1) и поля скорости можно свести к контурному интегрированию, что позволяет построить намного более эффективный численный алгоритм вычисления поля скорости. Для этого введем функцию

$$F(x,y;\xi,\eta)=\int\limits_0^1 G(x,y;x+(\xi-x)z,y+(\eta-y)z)zdz\,, \tag{4}$$

удовлетворяющую легко проверяемому тождеству

$$G=[(\xi-x)F]_\xi+[(\eta-y)F]_\eta\,,$$

с помощью которого и теоремы Стокса из (2) следует

$$\Psi(x,y,t)=\omega_0\oint\limits_{C(t)}F\left[(\xi-x)d\eta-(\eta-y)d\xi\right], \tag{5}$$

где $C(t)$ – граница области $D(t)$. Подставляя (3) в (4) и выполняя квадратуру, находим

$$F=\frac{1}{8\pi}\left[2\ln R-\ln(b+c+d)-\frac{c}{b}+\frac{c^2-2bd}{2b^2}\ln\frac{b+c+d}{d}+\frac{ce}{b^2}\,arctg\,\frac{e}{c+2d}\right],$$

где введены обозначения

$$b=\frac{(x^2+y^2)R}{a^2}\,,\quad c=\frac{2}{a^2}\left[x(\xi-x)+y(\eta-y)\right],\quad d=\frac{\left(a^2-x^2-y^2\right)^2}{a^2}\,,$$

$$e=\frac{2(a^2-x^2-y^2)}{a^2}\left|x\eta-y\xi\right|.$$

Из соотношений (1), (5) следуют выражения для поля скорости

$$u = -\omega_0 \oint\limits_{C(t)} \left[F_y((\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi) + Fd\xi \right], \tag{6}$$

$$v = \omega_0 \oint\limits_{C(t)} \left[F_x((\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi) - Fd\eta \right]. \tag{7}$$

Формулы (5–7) позволяют определить поля функции тока и скорости по известному положению границы ВП, что обеспечивает решение эволюционной задачи о трансформации формы вихря при помощи интегрирования лагранжевых уравнений движения принадлежащих границе вихря жидких частиц

$$\frac{dx}{dt} = u, \; \frac{dy}{dt} = v. \tag{8}$$

Модель без труда обобщается на случай, когда поле течения определяется наличием нескольких ВП. Обозначая завихренность i-го пятна через ω_i, а его границу – через $C_i(t)$, можно записать соотношения (5–7) в виде

$$\Psi(x,y) = \sum_i \omega_i \oint\limits_{C_i(t)} F\left[(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi \right], \tag{9}$$

$$u = -\sum_i \omega_i \oint\limits_{C_i(t)} \left[F_y((\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi) + Fd\xi \right], \tag{10}$$

$$v = \sum_i \omega_i \oint\limits_{C_i(t)} \left[F_x((\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi) - Fd\eta \right]. \tag{11}$$

Учет в модели произвольного безвихревого фонового течения, как уже говорилось выше, достигается добавлением к правым частям (8) слагаемых, определяемых уравнениями

$$u_0 = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}, \; v = \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}, \tag{12}$$

где $\Psi_0(x,y)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} = 0, \tag{13}$$

удовлетворяющее определенным граничным условиям. В частности, фоновое течение описанного выше проточного типа должно удовлетворять условию

$$\Psi_0\big|_{r=a} = f(\varphi),$$

где $f(\varphi)$ – заданная (в данном случае – стационарная) функция, характеризующая интенсивность источников (стоков) на границе. Решение (13) с учетом приведенного граничного условия записывается в виде (интеграл Пуассона)

$$\Psi_0(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\frac{a^2-r^2}{r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)+a^2}d\theta .$$

В частном случае, когда на концах вертикального диаметра расположены источник и сток равной интенсивности $\pm q$, функция тока фонового течения запишется в виде

$$\Psi_0(r,\varphi)=\frac{q}{2\pi}\left(\frac{a^2-r^2}{r^2-2ar\sin\varphi+a^2}-\frac{a^2-r^2}{r^2+2ar\sin\varphi+a^2}\right), \tag{14}$$

где (r,φ) – полярные координаты точки наблюдения.

Перейдем теперь к описанию численного метода построения стационарных состояний вихревого диполя в круглом бассейне с проточным фоновым течением вида (14).

Численный метод построения стационарных вихревых диполей в круглом бассейне

Условие стационарности вихревого диполя заключается в том, что границы его ВП являются линиями тока, т.е.

$$(\Psi+\Psi_0)|_{C_i}=const . \tag{15}$$

Очевидно, что диполь должен располагаться симметрично относительно того диаметра бассейна, на концах которого расположены источник и сток. Для описанного выше случая расположения источника и стока на концах вертикального диаметра исследуемая конфигурация ВП показана на рис. 1. Учитывая очевидную симметрию задачи, будем искать стационарную форму ВП с положительным знаком завихренности, полагая, что его граница задана параметрически соотношениями $x=x(v)$, $y=y(v)$. Тогда, дифференцируя (15) по параметру с учетом (1), получаем

$$\left((v+v_0)\frac{dx}{dv}-(u+u_0)\frac{dy}{dv}\right)|_C=0 . \tag{16}$$

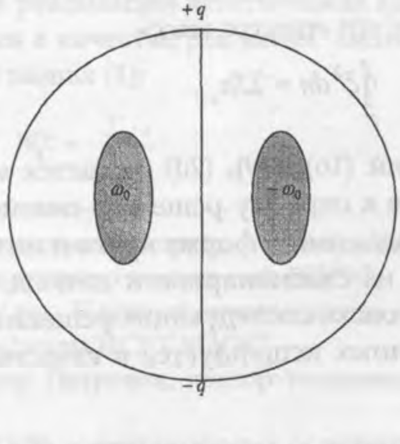

Рис. 1. Искомая форма вихревого диполя в круглом проточном бассейне

Условие (16) совместно с формулами (10–12), (14) представляет нелинейное интегродифференциальное уравнение относительно неизвестной формы ВП диполя и интенсивности источника и стока q.

Аппроксимируем границу ВП множеством из N опорных точек, полагая, что параметр ν принимает в них целочисленные значения $\nu = \overline{1, N}$. Будем искать решение (16) в полярных координатах согласно соотношениям

$$\xi(\nu) = \xi_c + \rho(\nu)\cos\theta(\nu)\,,\ \eta(\nu) = \rho(\nu)\sin\theta(\nu)\,, \tag{17}$$

где x_c – горизонтальная координата «центра масс» ВП,

$$\theta = \frac{2\pi\nu}{N},$$

а $\rho(\nu)$ ищется в виде ряда Фурье

$$\rho(\nu) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} b_m \cos\frac{2\pi\nu m}{N}\,. \tag{18}$$

Удовлетворяя уравнению (16) в точках $\nu = i = \overline{1, N/2-1}$ (очевидно, что N должно быть чётным) и вычисляя входящие в (16) интегралы по формуле трапеций, получаем $\frac{N}{2}-1$ нелинейных. уравнений относительно $\frac{N}{2}+1$ неизвестных коэффициентов b_m разложения (18) и интенсивности q. Два дополнительных условия, позволяющих выделить единственное решение из рассматриваемого семейства, определяют фиксированную площадь ВП

$$S = -\oint_C y\,dx \tag{19}$$

и заданное положение его «центра масс»

$$\oint_C \xi^2 d\eta = 2Sx_c\,. \tag{20}$$

Система уравнений (16), (19), (20) решается методом Ньютона. Начальное приближение к первому решению семейства с заданными площадью и «центром масс» имеет форму круга и интенсивность источника и стока, следующую из стационарности диполя, образованного точечными вихрями. При поиске последующих решений из данного семейства последнее из полученных используется в качестве начального приближения.