Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса. 2022. Т. 14, № 3. С. 146–157
The Territory of New Opportunities. The Herald of Vladivostok State University of Economics and Service. 2022. Vol. 14, № 3. P. 146–157

Научная статья
УДК 504.064.2
DOI: https://doi.org/10.24866/VVSU/2073-3984/2022-3/146-157

Связь внутренних обменных полей с критическими показателями в модели Изинга

Сёмкин Сергей Викторович

Смагин Виктор Павлович

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Владивосток. Россия

Аннотация. *Магнитные фазовые переходы многие годы интенсивно исследуются как теоретиками, так и экспериментаторами. С одной стороны, исследование магнитных фазовых переходов позволяет установить механизмы формирования магнитного упорядочения, закономерности поведения системы в критической области фазового перехода. С другой стороны, системы с магнитными фазовыми переходами представляют практический интерес, поскольку в области перехода происходит контролируемое изменение намагниченности, электросопротивления, теплоемкости, объема и других характеристик, свойств и параметров. В работе используется метод усреднения по обменным полям, суть которого заключается в установлении связей между термодинамическими средними для небольшой группы спинов и функциями распределения спинов из ближайшего окружения этой группы. С помощью усреднения по обменным полям можно построить дополнительные характеристики магнитных систем, как вблизи точки фазового перехода, так и за ее пределами. В качестве дополнительной характеристики можно использовать функцию отношения. Эта функция определяется как отношение таких значений полей обменного взаимодействия, при которых кластерное среднее спина равно среднему по ансамблю. В работе рассмотрена функция отношения для кластеров из одного и двух магнитных атомов. Для модели Изинга на квадратной решетке с помощью решения Онзагера построено точное значение функции отношения. Для этой же решетки построены приближенные значения функции отношения и проведено сравнение их между собой и с точным значением. Использование функции отношения дает возможность строить новые приближенные решения для модели Изинга, делая те или иные предположения об этой функции. В работе показано, что с помощью подходящего выбора функции отношения можно получить критические показатели, отличные от классических.*

Ключевые слова: *фазовые переходы, модель Изинга, критические индексы.*

Для цитирования: *Сёмкин С.В., Смагин В.П. Связь внутренних обменных полей с критическими показателями в модели Изинга // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса. 2022. Т. 14, № 3. С. 146–157. DOI: https://doi.org/10.24866/VVSU/2073-3984/2022-3/146-157.*

Original article

An additional characteristic of a magnet is a function of the ratio of internal fields

Sergey V. Semkin
Viktor P. Smagin

Vladivostok State University of Economics and Service
Vladivostok. Russia

Abstract. *In the theory of systems of interacting particles, the Ising model is often used. This model can serve as a fairly accurate description of real systems. In addition, the universality principle makes it possible to extend many of the results obtained for simple lattice Ising models to more complex systems. However, there are practically no exact solutions for the Ising model. In fact, the only exact solution is the Onsager solution for a square lattice. There are, of course, approximate methods of solution, but they have fundamental drawbacks, namely: approximate methods give overestimated estimates of the Curie temperature and incorrectly describe the behavior of the system near the phase transition point. However, as shown in this paper, there are ways to improve virtually any approximate methods. Using averaging over exchange fields, one can construct additional characteristics of magnetic systems, both near the phase transition point and beyond it. As such an additional characteristic, you can use the relation function. This function is defined as the ratio of such values of the exchange interaction fields at which the cluster average of the spin is equal to the average over the ensemble. The paper considers the ratio function for clusters of one and two magnetic atoms. For the Ising model on a square lattice, the exact value of the ratio function is constructed using the Onsager solution. For the same lattice, approximate values of the ratio function are constructed and compared with each other and with the exact value. The use of the ratio function makes it possible to construct new approximate solutions for the Ising model, making certain assumptions about this function.*

Keywords**:** *phase transitions, Ising model, critical exponents.*

For citation*: Semkin S.V., Smagin V.P. An additional characteristic of a magnet is a function of the ratio of internal fields // The Territory of New Opportunities. The Herald of Vladivostok State University of Economics and Service. 2022. Vol. 14, № 3. P. 146–157. DOI: https://doi.org/10.24866/VVSU/2073-3984/2022-3/146-157.*

Введение

Для теоретического исследования магнетиков часто используется модель Изинга [1]. Гамильтониан обобщенной модели Изинга имеет вид

$$E = -\sum J_{ij}\sigma_i\sigma_j - H_{вх}\sum\sigma_i .$$

Здесь σ_i – изинговские переменные, принимающие значения +1 и –1 (в моделях магнетиков эти переменные связаны с проекцией магнитного момента на выделенную ось); J_{ij} – константы, определяющие величину обменного взаимодействия (в решеточных моделях J_{ij} обычно принимается равной J для ближайших соседей и равной 0 для всех остальных пар атомов); $H_{вх}$ пропорциональна внешнему магнитному полю.

Модель Изинга является одним из теоретических инструментов для исследования не только магнетиков, но и других систем с коллективным взаимодействием [2]. В некоторых случаях [1] эта модель допускает получение точных результатов. Но эти случаи немногочисленны и не охватывают важных случаев. Кроме того, сама модель Изинга представляется не всегда адекватной для описания многих реальных систем с коллективным взаимодействием. Однако с помощью приближенных методов, основанных на использовании среднего поля или на усреднении по полям обменного взаимодействия [3], можно получить определенные результаты и в тех случаях, когда модель Изинга не допускает точного решения или когда используется более сложная модель.

В работах [3, 4] развит общий подход, основанный на усреднении по полям обменного взаимодействия применительно к спиновым кластерам на магнитной решетке. Используя этот подход, можно ввести в рассмотрение наряду с намагниченностью и спиновой корреляцией некоторые новые характеристики магнетиков [5]. В работе на основе метода усреднения по обменным полям вводится «функция отношения эффективных полей обменного взаимодействия». Эту функцию определим как отношение таких значений полей обменного взаимодействия, при которых кластерное среднее спина равно среднему по ансамблю. При этом ограничимся только кластерами из одного и двух магнитных атомов. В работе установлена связь между функцией отношения и спонтанной намагниченностью как функцией температуры. Эта связь позволяет определить точный вид функции отношения для квадратной решетки (при использовании решения Онзагера [1]) и построить приближенные решения для модели Изинга, связывающие критический показатель температурной зависимости спонтанной намагниченности с температурой Кюри.

Основная часть

Функция отношения эффективных полей и ее связь со спонтанной намагниченностью

Рассмотрим систему из N взаимодействующих частиц, каждая из которых характеризуется некоторым параметром σ, который в дальнейшем, имея в виду применение к модели Изинга, будем называть спином. Обозначим множество всех этих спинов – Ω, а гамильтониан системы – $H(\Omega)$. Два спина σ_i и σ_j будем называть взаимодействующими, если в гамильтониане есть слагаемое, не аддитивно зависящее от σ_i и σ_j.

Рассмотрим в системе группу, содержащую n спинов. Такую группу в дальнейшем будем называть кластером. Множество входящих в кластер спинов обозначим c. Обозначим r множество не входящих в кластер спинов, каждый из которых взаимодействует хотя бы с одним спином кластера, и s множество всех остальных спинов. Очевидно, Ω является объединением непересекающихся множеств c, r и s. Пусть теперь $f(r)$ – некоторая функция спинов, принадлежащих r, а $\varphi(c)$ – некоторая функция кластерных спинов c. Тогда, как показано в [6], среднее по ансамблю значение произведения $f\varphi$ равно

$$\langle f\varphi\rangle = \sum_r f(r)\langle\varphi\rangle_r W(r), \qquad (1)$$

где

$$\langle\varphi\rangle_r = \frac{1}{Z_c(r)}\sum_c \varphi(c)\exp\left(-\frac{1}{kT}H_c(c,r)\right), \quad (2)$$

а $W(r)$ – функция распределения для наборов состояний спинов множества r; $H_c(c, r)$ – «кластерный гамильтониан» – слагаемые в гамильтониане $H(\Omega)$, связанные с взаимодействием спинов, принадлежащих c и r; k – постоянная Больцмана; – температура. «Кластерная» статистическая сумма $Z_c(r) = \sum_c \exp\left(-\frac{1}{kT}H_c(c,r)\right)$.

Формулу (2) можно понимать как «кластерное среднее» функции $\varphi(c)$, вычисленное при условии, что конфигурация взаимодействующих с кластером спинов задана и неизменна. Тогда выражение (1) можно интерпретировать как усреднение произведения $f(r)\langle\varphi\rangle_r$ по функции распределения $W(r)$.

Рассмотрим модель Изинга на некоторой решетке с координационным числом q. Пусть в каждом узле решетки содержится изинговский «спин», принимающий значения +1 и –1; взаимодействуют только спины, находящиеся в соседних узлах. Тогда гамильтониан модели Изинга можно записать как

$$H(\Omega) = -J\sum_{(i,j)}\sigma_i\sigma_j - H_{вх}\sum_i \sigma_i, \quad (3)$$

где J – энергия обменного взаимодействия; суммирование в первой сумме проводится по всем парам соседних спинов, во второй формуле – по всем узлам [1].

Выделим на решетке кластер, состоящий только из одного спина σ_0. Множество c в этом случае состоит только из этого спина σ_0, а множество r – из q спинов его первой координационной сферы. Кластерный гамильтониан $H_c(c,r) = -J\sigma_0 H_{вх}$, где h – сумма значений спинов, принадлежащих r, то есть сумма спинов, непосредственно взаимодействующих с σ_0 (спины первой координационной сферы). Будем называть эту сумму «полем взаимодействия», «кластерное среднее» (2) некоторой функции $\varphi(c)$, которая в этом случае зависит только от σ_0:

$$\langle\varphi\rangle_r = \frac{\varphi(+1)\exp(Kh + h_{вх}) + \varphi(-1)\exp(-Kh - h_{вх})}{\exp(Kh + h_{вх}) + \exp(-Kh - h_{вх})}, \quad (4)$$

где $K = \frac{J}{kT}$ и $h_{вх} = \frac{H_{вх}}{kT}$.

Рассмотрим случай, когда функция $f(r)$ является функцией только поля взаимодействия h. Тогда, поскольку среднее (4) зависит только от h, усреднение в формуле (1) является в сущности усреднением по функции распределения $W(h)$ этого поля взаимодействия:

$$\langle f\varphi\rangle = \sum_h f(h)\langle\varphi\rangle_r W(h). \quad (5)$$

Среднее значение любого спина решетки одинаково и равно M – средней намагниченности в системе. При отсутствии внешнего поля из выражений (4) и (5) при $f(h)$ = 1 и $\varphi = \sigma_0$ получим

$$M = \sum_h W(h) th(Kh) . \qquad (6)$$

Поскольку намагниченность M принимает значения от 0 до 1, для любой функции распределения $W(h)$ существует такое значение $h = \chi_1$ для которого

$$M = th(K\chi_1) . \qquad (7)$$

Возьмем кластер из двух соседних спинов σ_1 и σ_2 (димер). Средняя намагниченность, вычисленная по спинам этого кластера, равна

$$M = \sum_{h_1,h_2} W(h_1,h_2) \frac{sh\big(K(h_1+h_2)\big)}{ch\big((K(h_1+h_2)\big)+ch\big(K(h_1-h_2)\big)\exp(-2K)} , \qquad (8)$$

где h_1 и h_2 – поля взаимодействия, связанные с σ_1 и σ_2; $W(h_1,h_2)$ – их совместная функция распределения. Из условия нормировки для $W(h_1,h_2)$ следует, что существует такое значение $h_1 = h_2 = \chi_2$, при котором

$$M = \frac{sh(2K\chi_2)}{ch(2K\chi_2)+x} , \qquad (9)$$

где $x = \exp(-2K)$.

Введенные указанным выше способом величины χ_1 и χ_2 будем называть эффективными полями для кластеров из одного и двух узлов соответственно. Из выражений (7) и (9) найдем χ_1 и χ_2 как функции M и x:

$$\frac{\chi_1 = -\dfrac{1}{Inx} In(1+M)}{1-M} , \quad \frac{\chi_2 = -\dfrac{1}{Inx}\left(xM + \sqrt{(xM)^2 + \left((1-M)^2\right)}\right)}{1-M} . \qquad (10)$$

Используя низкотемпературное разложение статсуммы [1], можно показать, что для простых решеток с координационным числом q $\chi_1 \to q$ и $\chi_2 \to q-1$ при $x \to 0$, то есть в пределе низких температур.

Из выражений (7) и (9) получим

$$th(K\chi_1) = \frac{sh(2K\chi_2)}{ch(1K\chi_2)+x} . \qquad (11)$$

При $x = x_c$ (то есть при критической температуре) дифференциалы левой и правой частей (11) равны, что приводит к условию

$$\frac{2}{1+x_c} = \left(\frac{d\chi_2}{d\chi_1}\right)^{-1} , \qquad (12)$$

из которого находится x_c.

В случае немагнитного разбавления (по связям) выражение (7) не меняется, а формула (9) принимает вид

$$M = (1-b)th(K\chi_2) + b\frac{sh(2K\chi_2)}{ch(2K\chi_2)+x},$$

где b – концентрация магнитных связей.

Предположим, что $\frac{d\chi_2}{d\chi_2}$ не зависит от b (это верно для приближения Бете и, возможно, приближенно верно в других случаях). Тогда $x_c(b)$ находится из уравнения

$$(1-b) + b\frac{2}{1+x_c(b)} = \left(\frac{d\chi_2}{d\chi_1}\right)^{-1} = \frac{2}{1+x_c(1)},$$

то есть

$$x_c(b) = \frac{x_c(1)-\beta}{1-\beta x_c(1)}, \quad \beta = \frac{1-b}{1+b}.$$

Порог протекания примет вид

$$b_c = \frac{1-x_c(1)}{1+x_c(1)}.$$

При $M \to 0$ $(x \to x_c)$ поля χ_1 и χ_2 тоже стремятся к нулю, причем производные $\frac{d\chi_1}{dM}$ и $\frac{d\chi_2}{dM}$ бесконечны. Поэтому удобно ввести функцию $y(M,x) = \frac{\chi_2}{\chi_1}$, которую будем называть функцией отношения. Из выражения (10) получим

$$y(M,x) = \frac{In\left(xM + \sqrt{(xM)^2 + \left((1-M)\right)^2}\right) - In(1-M)}{In(1+M) - In(1-M)}. \tag{13}$$

Если известно точное или приближенное значение спонтанной намагниченности как функции температуры $M = M(x)$ или обратной функции $x = x(M)$, функцию отношения $y(M,x)$ можно представить как функцию одной переменной M или x. И наоборот, если из каких-либо соображений известна функция $y(M)$, то из формулы (13) можно найти соответствующую этой функции зависимость $x(M)$:

$$x(M) = \frac{sh\left(\psi(M)\right)}{M} + \frac{1}{2}Me^{-\psi(M)}, \tag{14}$$

где $\psi(M) = y(M)(In(1+M) - In(1-M)) + In(1-M)$.

Функция отношения для квадратной и других простых решеток

Для плоской квадратной решетки (q = 4) известно точное решение для спонтанной намагниченности M (решение Онзагера [1])

$$M^{g} = 1 - \frac{1}{sh^4(2K)}, \tag{15}$$

из которого получим

$$x(M) = \delta^{\frac{1}{2}} R_1(M),$$

где $\delta = \sqrt{1 - M^2}$ и $R_1(M) = \dfrac{\sqrt[4]{(1+M^2)(1+M^4)}}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 - M^g}}}$.

Легко показать, что в приближении Бете при $q = 4$

$$x(M) = \delta^{\frac{1}{2}} R_2(M),$$

где $R_2(M) = \dfrac{1}{\sqrt{1+M} + \sqrt{1-M}}$ (16)

Подставив выражение (16) в формулу (14), получим, что в приближении Бете функция отношения не зависит от M и x и равна ¾ для $q = 4$. Это означает, что приближение Бете можно трактовать как приближение, в котором функция отношения считается постоянной (что было показано в [3]).

В работе [7] построено обобщение приближения Бете на некоторый класс рекурсивных решеток. Это обобщение для квадратной решетки приводит к

$$x(M) = \delta^{\frac{1}{2}} R_3(M),$$

где $R_3(M) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \delta + \sqrt{1 + 2\delta + 2\delta^2}}}$. (17)

Во всех этих случаях функция отношения (13) представима в виде

$$y(M) = \left(In\left((1+M)(MR + \sqrt{((MR)^t 2 + \delta)} \right) - 3/2In\delta \right) / 2In(1+M) - 2In\delta /. \quad (18)$$

Все функции $R_{1-2}(M)$, входящие в выражения (15) – (17), при $M = 1$ равны $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (При $M = 0$ $R_1(0) = \sqrt{2} - 1$, $R_2(0) = \dfrac{1}{2}$ и $R_3(0) = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$; эти значения определяются температурами Кюри в точном решении (15) в приближении Бете (16) и для рекурсивной решетки (17) соответственно.) Поэтому при $M \to 1$ ($\delta \to 0$) функция отношения (18) во всех случаях стремится к $\dfrac{3}{4}$, как и должно быть для решетки с координационным числом 4.

Вблизи $M = 0$ $x_c - x \sim M^{\frac{1}{\beta}}$, где β – критический показатель температурной зависимости спонтанной намагниченности [1]. Рассмотрим разложение x(M) (выражение (14)) в ряд по степеням M вблизи M = 0. Функция отношения y(M), входящая в формулу (14), является четной функцией M, поскольку поля χ_1 и χ_2 меняют знак при замене M на –M. Поэтому разложение x(M) вблизи M = 0 будет содержать только четные степени M, то есть выражение (14) можно разложить по степеням $\mu = M^2$ до квадратичного по M слагаемого

$$x = (2y(0)-1) + \frac{1}{6}\left(12\frac{dy}{d\mu}\Big|_{\mu=0} + (2y(0)-1)^3 - (2y(0)-1)\right)M^2 + \ldots \tag{19}$$

Отсюда видно, что критическое значение x_c связано со значением функции отношения при $M = 0$:

$$x_c = 2y(0) - 1. \tag{20}$$

Кроме того, поскольку в области существования спонтанной намагниченности $x < x_c$, должно выполняться неравенство

$$12\frac{dy}{d\mu}\Big|_{\mu=0} + x_c^{\,3} - x_c \le 0\,. \tag{21}$$

Если функция отношения $y(M)$ такова, что для нее вместо выражения (21) выполняется строгое неравенство, критический показатель $\beta = \frac{1}{2}$. Если же неравенство (21) становится равенством, то разложение (19) начинается с более высоких степеней M и критический показатель $\beta < \frac{1}{2}$. В этом случае критический показатель температурной зависимости спонтанной намагниченности определяется первым ненулевым (зависящим от M) членом разложения (19), коэффициент в котором, конечно, должен быть отрицательным.

На рис. 1 показаны функции отношения (18) в зависимости от $\mu = M^2$, вычисленные для точного решения Онзагера (15) (кривая 1), для решения Бете (16) при q = 4 (кривая 5) и для рекурсивной решетки (17) при N = 4 и q = 4 (кривая 4). Видно, что во всех этих случаях зависимость $y(\mu)$ близка к линейной. В связи с этим полагаем, что для решетки с координационным числом q функцию отношения можно приближенно представить линейной функцией μ:

$$y(\mu) = y(0) + A\mu\,. \tag{22}$$

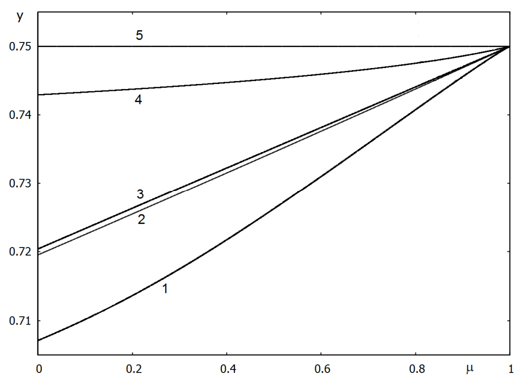

Рис. 1. Функция отношения для точного и приближенных решений на квадратной решетке: кривая 1 – точное значение (15); кривая 2 – приближение (25); кривая 3 – приближение (22); кривая 4 – рекурсивное приближение (17); кривая 5 – приближение Бете (16)

При этом по указанным выше соображениям будем считать, что $y(1)=\frac{q-1}{q}$. Тогда неравенство (21) приводит к условию

$$\frac{6(q-2)}{q}+x_c^{\ 3}-7x_c\geq 0\,, \tag{23}$$

то есть $\tilde{x}_c \leq x_c \leq 1$, где $\tilde{x}_c$ – корень левой части выражения (23).

В таблице приведены значения критических температурных параметров $K_c=-\frac{1}{2}In\tilde{x}_c$.

Значения критических температурных параметров в различных приближениях

q	Точные значения K_c для простых решеток	Метод среднего поля	K_c для решетки Бете	Приближение (22)	Приближение (25)
3	0,658	0,333	0,549	0,620	0,625
4	0,370 (тет.) 0,441 (кв.)	0,250	0,347	0,410	0,412
6	0,214 (куб.) 0,275 (тр.)	0,167	0,203	0,253	0,252

Если принять $x_c=\tilde{x}_c$, то, как видно из таблицы, получим более точное приближение к критическим температурным параметрам, чем то, что получается в приближении Бете. Кроме того, как было сказано выше, критический показатель $\beta=\frac{1}{4}$. А если в выражении (14) взять линейную функцию отношения (22) с соответствующими значениями $y(0)$ и A, то при q = 4 получим температурную зависимость спонтанной намагниченности $M(x)$ (кривая 2 на рис. 2).

Можно предложить другой способ приближенного определения функции отношения $y(\mu)$. Приравняем к нулю коэффициент перед M^2 в разложении (19):

$$12\frac{dy}{d\mu}\Big|_{\mu=0}=(2н(0)-1)-(2н(0)-1)^3\,. \tag{24}$$

Будем считать, что равенство (24) выполняется не только при $\mu=0$ но и при других значениях μ. Тогда для функции $y(\mu)$ получим дифференциальное уравнение, которое можно представить в виде, где $t=2y-1$. Решая это уравнение, получим

$$y(\mu)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{Be^{\frac{\mu}{6}}}{\sqrt{1+B^2e^{\frac{\mu}{3}}}}\right). \tag{25}$$

Постоянную интегрирования B найдем из условия $y(1)=\frac{q-1}{q}$:

$$B=\frac{1}{2}\frac{q-2}{\sqrt{q-1}}e^{-\frac{1}{6}}. \tag{26}$$

Отсюда

$$K_c=\frac{1}{4}In\left(1+\frac{4(q-1)\sqrt[3]{e}}{(q-2)^2}\right). \tag{27}$$

Значения K_c для простых решеток, вычисленные по формуле (27), приведены в таблице.

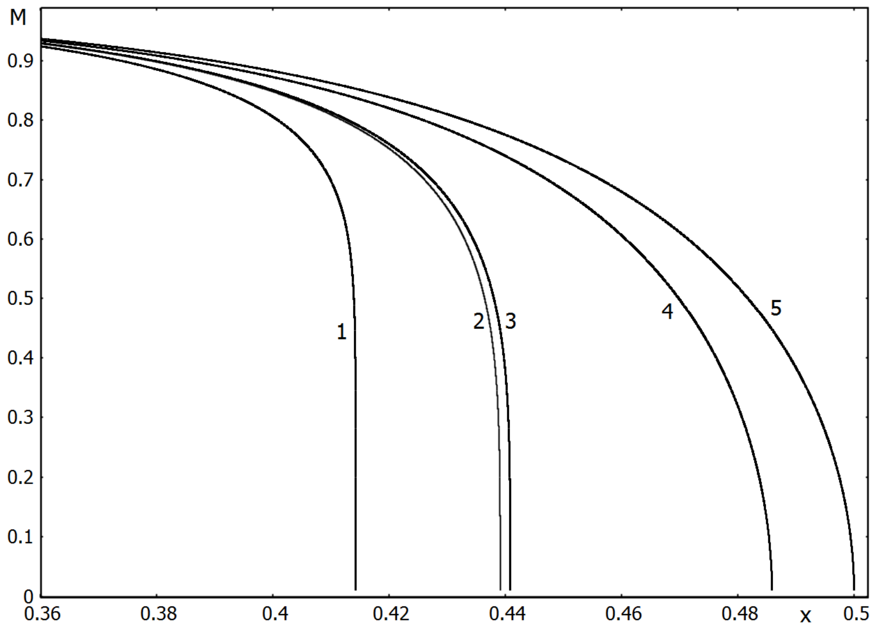

Рис. 2. Температурная зависимость спонтанной намагниченности для точного и приближенных решений на квадратной решетке: кривая 1 – точное значение (15); кривая 2 – приближение (25); кривая 3 – приближение (22); кривая 4 – рекурсивное приближение (17); кривая (5) – приближение Бете (16)

Заключение

В работе построена функция отношения $y(M, x)$, связывающая эффективные поля одноатомного и двухатомного кластеров. Эта функция зависит от спонтанной намагниченности M и температурного параметра $x=\exp(-2K)$, то есть связь между M и x, полученная из точного или приближенного решения, определяет функцию отношения. И наоборот, задание $y(M)$ определяет температурную зависимость спонтанной намагниченности $M(x)$.

Для модели Изинга на квадратной решетке с помощью решения Онзагера построено точное значение функции отношения (кривая 1 на рис. 1). Для этой же решетки построены приближенные значения функции отношения (кривые 2–5 на рис. 1) и проведено сравнение их между собой и с точным значением.

В работе показано, что функция отношения для решетки с координационным числом q стремится при $M \to 1$ к отношению $\frac{q-1}{q}$.

Значение функции отношения $y(M)$ при $M = 0$ определяет критический температурный параметр $K_c = \frac{1}{2} In(2y(0)-1$, а поведение кривой $y(M)$ вблизи $M = 0$ связано с величиной критического показателя температурной зависимости спонтанной намагниченности β.

Таким образом, выбирая вид функции $y(M)$, получим набор значений β, допустимых при этом выборе. Выбирая β из этого набора, получим соответствующее значение K_c.

Список источников

1. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. Москва: Мир, 1985.
2. Strecka Jozef, Jascur Michal. A brief account of the Ising and Ising-like models: mean-field, effective-field and exact results // Acta physica slovaca. 2015. Vol. 65, № 4. P. 235–367.
3. Сёмкин С.В., Смагин В.П. Приближенные методы в теории чистых и разбавленных магнетиков. Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2019. 220 с.
4. Сёмкин С.В., Смагин В.П., Юдин П.В. Самосогласованное приближение в модели Изинга чистого и разбавленного магнетика с использованием парной корреляции // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 205, № 1. С. 138–146.
5. Сёмкин С.В., Смагин В.П. Приближенный учет спиновых корреляций в модели Изинга // Физика твердого тела. 2021. Т. 63, вып. 8. С. 1084–1089.
6. Сёмкин С.В., Смагин В.П., Люлько В.И. Использование усреднения по полям взаимодействия для построения приближенных методов в модели Изинга разбавленного магнетика // Физика твердого тела. 2020. Т. 62, вып. 8. С. 1209–1214.
7. Сёмкин С.В., Смагин В.П., Гусев Е.Г. Модель Изинга с немагнитным разбавлением на рекурсивных решетках // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 202, № 2. С. 304–311.

References

1. Baxter R. Exactly solved models in statistical mechanics. Moscow: Mir; 1985.
2. Strecka Jozef, Jascur Michal. A brief account of the Ising and Ising-like models: mean-field, effective-field and exact results. *Acta physica slovaca*. 2015; 65 (4): 235–367.
3. Semkin S.V., Smagin V.P. Approximate methods in the theory of pure and dilute magnets. Vladivostok: Publishing House of VSUES; 2019. 220 p.
4. Semkin S.V., Smagin V.P., Yudin P.Y. Self-consistent approximation in the Ising model of pure and dilute magnets using a pair correlation. *Theoretical and Mathematical Physics.* 2020; 205 (1): 138–146.
5. Semkin S.V., Smagin V.P. Approximate Accounting of Spin Correlations in the Ising Model. *Physics of the Solid State*. 2021; 63 (8): 1084–1089.

6. Semkin S.V., Smagin V.P., Lyul'ko V.I. Construction of Approximate Methods within the Ising Model of a Diluted Magnet Using Averaging over Interaction Fields. *Physics of the Solid State*. 2020; 62 (8): 1209–1214.
7. Semkin S.V., Smagin V.P., Gusev E.G. Ising model with nonmagnetic dilution on recursive lattices. *Theoretical and Mathematical Physics.* 2020; 202 (2): 304–311.

Информация об авторах:

Сёмкин Сергей Викторович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры информационных технологий и систем ВГУЭС, г. Владивосток. E-mail: Li15@rambler.ru.

Смагин Виктор Павлович, д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией фундаментальной и прикладной физики ВГУЭС, г. Владивосток. E-mail: Li15@rambler.ru.

DOI: https://doi.org/10.24866/VVSU/2073-3984/2022-3/146-157

Дата поступления: 22.07.2022
Одобрена после рецензирования: 27.07.2022
Принята к публикации: 27.08.2022