

ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОГО УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ НАЛИЧИИ СМАЗКИ НА ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова

С использованием модели больших деформаций, обобщенной на случай учета вязких свойств материалов, получены аналитические решения ряда квазистатических краевых задач о вискозиметрических течениях упруговязкопластического материала в зазоре между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, когда в окрестности одного из жестких цилиндров (как внутреннего, так и внешнего) находится слой эластичной неньютоновской смазки и на граничных поверхностях выполняются условия жесткой спайки. Изучены условия возникновения течения в слое смазки и в основном материале. Указаны значения максимальной скорости поворота, при которой течение не выходит за слой смазки.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

В теории смазки эластичностью смазывающей жидкости обычно пренебрегают, полагая модуль сдвига для нее пренебрежимо малым по сравнению с модулем сдвига трущихся деталей. Вследствие этого смазка моделируется либо вязкой, либо вязкопластической жидкостью, а трущиеся тела чаще всего полагаются жесткими. При этом заметим, что усложнение в модели, связанное с наличием предела текучести, оказалось важным не только потому, что большинство смазывающих материалов проявляет именно такие свойства, но и потому, что сам характер быстрых движений в тонких слоях подразумевает образование застойных зон у неровностей граничных поверхностей. Это приводит к тому, что вязкое сопротивление движению для вязкопластической смазки оказывается меньшим, чем для аналогичной вязкой. Износ и усталостную прочность материалов, соединенных слоем смазки, связывают в таком случае только с непосредственным контактом трущихся деталей при выдавливании смазывающего слоя, т. е., по существу, с нарушениями в смазке. Если бы упругие свойства материала смазки учитывались, то налицо был бы иной эффект в снижении длительной прочности, связанный с передачей деформаций через слой смазки. Тогда в контактирующих телах развивающиеся деформации вызывают поле напряжений, которое при определенных условиях приводит к необратимым деформациям в них, формированию остаточных напряжений. Такие процессы существенно влияют на усталостную прочность движущихся конструктивных элементов, и именно влияние этих процессов призвано уменьшить слой смазки. Учет упругих свойств в слое смазки и упругопластических свойств материалов контактирующих через смазку тел встречает значительные математические трудности. Деформации в слое невозможно считать малыми, следовательно, необходимо привлекать теорию больших деформаций тел с упругими, пластическими и вязкими свойствами [1–11]. То же, при некоторых условиях, оказывается необходимым в моделировании процесса деформирования и контактирующих тел.

Воспользуемся моделью, предложенной нами ранее [10], в которой введены две гипотезы: при разгрузке компоненты тензора необратимых дефор-

маций изменяются так же, как и при жестком движении; обратимые деформации полностью задают поле напряжений в среде. Оказалось [10, 11], что таких естественных для классической упругопластичности [12] положений достаточно для составления математической модели, в рамках которой можно поставить и решить краевые задачи теории [11, 13–15], включая задачи вискозиметрического течения [16].

1. Основные модельные соотношения. В прямоугольной декартовой системе пространственных координат Эйлера кинематика среды определяется зависимостями [11]

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
r_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk}).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

В соотношениях (1.1) d_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} , p_{ij} — их обратимые и необратимые составляющие; u_i , v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; $\frac{D}{Dt}$ — объективная производная тензоров по времени, приведенная для произвольного тензора n_{ij} ; ε_{ij}^p (источник в уравнении переноса для тензора необратимых деформаций) — компоненты тензора скоростей пластических деформаций. Наличие нелинейной составляющей z_{ij} тензора вращений r_{ij} , которая выписана полностью в [10], связано с выполнением требования неизменности тензора пластических деформаций p_{ij} в процессах разгрузки.

Напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и для изотропного несжимаемого материала связаны с ними зависимостями

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \equiv 0, \\
\sigma_{ij} &= -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \neq 0, \\
W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \\
J_k &= \begin{cases} L_k, & p_{ij} \equiv 0 \\ I_k, & p_{ij} \neq 0, \end{cases} \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \\
I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

В зависимостях (1.2) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши; p , p_1 — добавочные гидростатические давления; W — упругий потенциал; μ — модуль сдвига; b , χ — постоянные материала. В качестве пластического потенциала используется функция нагружения Греска [17]:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^p|, \tag{1.3}$$

где k — предел текучести; η — коэффициент вязкости; σ_i , ε_k^p — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций.

Связь скоростей необратимых деформаций с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \quad (1.4)$$

2. Обратимое деформирование и вязкопластическое течение. Рассмотрим случай, когда слой смазки находится у внутреннего жесткого цилиндра, который поворачивается вокруг своей оси. Механические свойства основного материала $r_1 \leq r \leq R$ задаются параметрами $\mu_1, b_1, \chi_1, k_1, \eta_1$; аналогичные механические параметры слоя $r_0 \leq r \leq r_1$ обозначим $\mu_2, b_2, \chi_2, k_2, \eta_2, k_2 < k_1$. Считаем, что на граничных поверхностях выполняются условия прилипания, на внешнем жестком цилиндре краевые условия имеют вид

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (2.1)$$

Компоненты вектора перемещений при движении точек среды по окружностям определяются зависимостями $u_r = r(1 - \cos \theta(r, t))$, $u_\varphi = r \sin \theta(r, t)$, $\theta(r, t)$ — центральный угол закручивания. Отличными от нуля компонентами тензора деформаций Альманси являются: $d_{rr} = -\frac{1}{2}g^2$, $d_{r\varphi} = \frac{1}{2}g$, $g = r \frac{\partial \theta}{\partial r}$.

Из зависимостей (1.2) для компонент напряжений с точностью до слагаемых второго порядка малости по деформациям следуют соотношения

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)g^2 = -s, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -s + \mu g^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu g.$$

При выбранном расположении слоя пластическое течение всегда начинается у внутренней жесткой поверхности $r = r_0$. Это происходит, когда напряженное состояние выходит на поверхность нагружения $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = -k_2$.

Интегрируя уравнения равновесия (квазистатическое приближение)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (2.2)$$

и используя условия совпадения перемещений при $r = r_1$ и $r = R$, получим:

$$\theta = A(c), \quad A(c) = \frac{c}{2\mu_1}(1/R^2 - 1/r^2)$$

в области $r_1 \leq r \leq R$;

$$\theta = A_1(c), \quad A_1(c) = \frac{c}{2\mu_1}(1/R^2 - 1/r_1^2) + \frac{c}{2\mu_2}(1/r_1^2 - 1/r^2)$$

в слое $r_0 \leq r \leq r_1$; здесь c — неизвестная интегрирования.

Используя условие пластичности, найдем, что в момент начала пластического течения $c = -k_2 r_0^2$. Угол поворота, на который необходимо повернуть жесткий цилиндр для начала пластического течения, получаем по формуле

$$\theta_0 = \frac{k_2}{2\mu_2}(1 - r_0^2/r_1^2) + \frac{k_2}{2\mu_1}(r_0^2/r_1^2 - r_0^2/R^2). \quad (2.3)$$

Начиная с момента времени $t = t_0 = 0$ развивается область вязкопластического течения, ограниченная поверхностями $r = r_0$ и $r = x_1(t)$ ($r_0 \leq r \leq x_1(t)$).

Согласно зависимостям (1.1) для компонент вектора скорости и тензора скоростей деформаций справедливы кинематические соотношения

$$\begin{aligned} v_\varphi &= r \frac{\partial \theta}{\partial t} = r\omega, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t}, \quad \varepsilon_{rr}^p = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(r_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(r_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\varepsilon_{r\varphi}^p e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассчитаем параметры напряженно-деформированного состояния в некоторый момент времени $t = t_1 \geq t_0$. В областях упругого деформирования, пренебрегая силами инерции, получим

$$\sigma_{r\varphi} = c_1/r^2, \quad \omega = 0, \quad c_1 = c(t_1), \quad \theta = \begin{cases} A(c_1) & \text{при } r_1 \leq r \leq R, \\ A_1(c_1) & \text{при } x_1(t) \leq r \leq r_1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Из второго соотношения в (1.2) для компонент напряжений в области пластического течения имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -(p_1 + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)e_{r\varphi}^2 = -s_1(t), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s_1(t) + 4\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}. \end{aligned}$$

В то же время интегрированием уравнений равновесия можно получить $\sigma_{r\varphi} = m(t_1)/r^2$, $e_{r\varphi} = m(t_1)/(2\mu r^2)$. Из условий непрерывности компонент напряжений следует, что $m(t_1) = c_1$, $s(t_1) = s_1(t_1)$. Согласно условию пластичности (1.3) и ассоциированному закону пластического течения (1.4) получаем $\sigma_{r\varphi} = -k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p$, $\lambda = -\varepsilon_{r\varphi}^p / (k - \eta \varepsilon_{r\varphi}^p)$.

Используя кинематические зависимости (2.4) и условие непрерывности скоростей и перемещений, в области вязкопластического течения найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_2}(k_2 + c_1/r^2), \quad p_{r\varphi} = \frac{t}{\eta_2}(k_2 + c_1/r^2), \quad c_1 = -k_2 x_1^2, \quad \omega = F(c_1, r, x_1), \\ \theta &= tF(c_1, r, x_1) + A_4(c_1), \quad F(c_1, r, x_1) = \frac{2}{\eta_2} \left(k_2 \ln \frac{r}{x_1} + \frac{c_1}{2} (1/x_1^2 - 1/r^2) \right). \end{aligned}$$

Задавая скорость поворота внутреннего цилиндра, получим уравнение для определения упругопластической границы $x_1(t)$:

$$\omega(r_0, t_1) = F(c_1, r_0, x_1). \quad (2.6)$$

При возрастании скорости вращения жесткого цилиндра область вязкопластического течения увеличивается, и в некоторый момент времени граница x_1 достигает внешней поверхности слоя $r = r_1$. На рис. 1 показано развитие этой области в зависимости от скорости поворота внутреннего жесткого цилиндра.

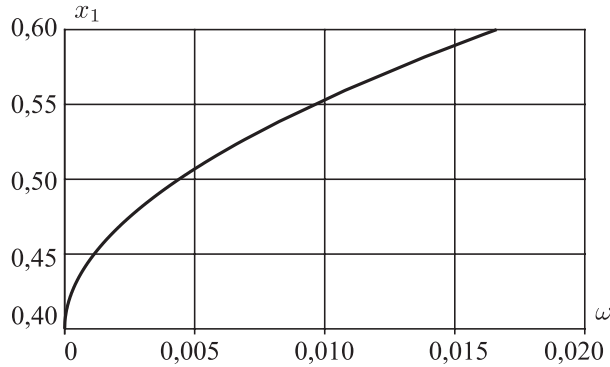


Рис. 1. Развитие области вязкопластического течения

Расчеты проводились при значениях постоянных

$$\begin{aligned} r_0/R = 0,4, \quad r_1/R = 0,6, \quad \alpha\eta_1/\mu_1 = 0,01638, \\ \alpha\eta_2/\mu_2 = 0,2195, \quad k_1/\mu_1 = 0,00165, \quad k_2/\mu_2 = 0,0007. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если скорость вращения увеличивать и дальше, то в некоторый момент времени $t = t'_1$, в который выполнится условие пластичности $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_1} = -k_1$, вязкопластическое течение начнется и в основном материале. Для того чтобы течение было возможно только в слое со смазкой, а основной материал деформировался только упруго, необходимо вращать цилиндр со скоростью, не превышающей значения

$$\omega(r_0, t_1) < \tilde{\omega} = F(-k_1 r_1^2, r_0, r_1). \quad (2.8)$$

Если условие (2.8) не выполняется, то начиная с момента времени $t = t'_1$ в основном материале будет развиваться область вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq x_2(t)$. В этом случае, интегрируя уравнения равновесия и используя условия непрерывности перемещений и скоростей на поверхностях $r = x_2(t)$ и $r = r_1$, получим:

$$\theta = A(c_2), \quad \omega = 0$$

в области $x_2(t) \leq r \leq R$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_1}(k_1 + c_2/r^2), \quad p_{r\varphi} = \frac{t - t'_1}{\eta_1}(k_1 + c_2/r^2), \quad c_2 = -k_1 x_2^2, \\ \theta &= (t - t'_1)F_1(c_2, r, x_2) + A(c_2), \quad \omega = F(c_2, r, x_2), \\ F_1(c_1, r, x_2) &= \frac{2}{\eta_1} \left(k_1 \ln \frac{r}{x_2} + \frac{c_1}{2} (1/x_2^2 - 1/r^2) \right) \end{aligned}$$

в области $r_1 \leq r \leq x_2(t)$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_2}(k_2 + c_2/r^2), \quad p_{r\varphi} = \frac{t}{\eta_2}(k_2 + c_2/r^2), \\ \theta &= (t - t'_1)F_1(c_2, r_1, x_2) + t'_1 F(c_2, r, r_1) + A_1(c_2), \quad \omega = F_1(c_2, r_1, x_2) + F(c_2, r, r_1) \end{aligned}$$

в области $r_0 \leq r \leq r_1$. Положение упругопластической границы $x_2(t)$ определяется из уравнения $\omega(r_0, t_2) = F_1(c_2, r_1, x_2) + F(c_2, r_0, r_1)$.

Рассмотрим, как будет изменяться напряженно-деформированное состояние, если жесткий цилиндр (начиная с момента времени $t = t'_2$) поворачивается в обратную сторону. Сначала напряжения будут уменьшаться по абсолютной величине. В момент полной разгрузки, когда напряжение $\sigma_{r\varphi} = 0$ во всей области деформирования $r_0 \leq r \leq R$, будут справедливы соотношения:

$$\theta = 0, \quad \omega = 0$$

в области $x_2(t'_2) \leq r \leq R$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= 0, \quad p_{r\varphi} = \frac{t'_2 - t'_1}{\eta_1}(k_1 + c_3/r^2), \quad c_3 = -k_1 x_2^2(t'_2), \\ \theta &= (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r, x_2), \quad \omega = 0 \end{aligned}$$

в области $r_1 \leq r \leq x_2(t'_2)$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= 0, \quad p_{r\varphi} = \frac{t'_2}{\eta_2}(k_2 + c_3/r^2), \\ \theta &= (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r_1, x_2) + t'_2 F(c_3, r, r_1), \quad \omega = 0 \end{aligned}$$

в области $r_0 \leq r \leq r_1$.

Далее напряжения увеличиваются, и в момент времени $t = t'_3$ на поверхности $r = r_0$ выполняется условие пластичности $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = -k_2$. Значение угла поворота внутреннего жесткого цилиндра в этот момент времени составляет

$$\theta_2 = \theta(r_0, t'_3) = (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r_1, x_2) + t'_2F(c_3, r, r_1) + A(c_4), \quad c_4 = k_2r_0^2.$$

С момента времени $t = t'_3$ развивается область повторного вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq x_3$. Интегрируя уравнения равновесия, для $\theta(r, t)$ и $\omega(r, t)$ получим:

$$\theta = A(c_5), \quad c_5 = k_2x_3^2, \quad \omega = 0$$

в области $x_2(t'_2) \leq r \leq R$;

$$\theta = (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r, x_2) + A(c_5), \quad \omega = 0$$

в области $r_1 \leq r \leq x_2(t'_2)$;

$$\theta = (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r_1, x_2) + t'_2F(c_3, r, r_1) + A_1(c_5), \quad \omega = 0$$

в области $x_3(t) \leq r \leq r_1$;

$$\theta = (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r_1, x_2) + t'_2F(c_3, r, r_1) + tF(-c_5, x_3, r) + A_1(c_5), \\ \omega = F(-c_5, x_3, r)$$

в области $r_0 \leq r \leq x_3(t)$.

Для определения границы области вязкопластического течения $x_3(t)$ необходимо задавать угловую скорость на внутреннем жестком цилиндре в каждый момент времени t_3 . Тогда получим $\omega(r_0, t_3) = F(-c_5, x_3, r_0)$. Как следует из решения этого уравнения, граница $x_3(t)$ со временем достигает внешней поверхности слоя $r = r_1$. С увеличением скорости поворота внутреннего цилиндра в области $r_0 \leq r \leq x_3 = r_1$ будут накапливаться необратимые деформация, но сама область при этом увеличиваться не будет. Когда напряженное состояние выйдет на поверхность текучести (1.3) (момент времени t'_4), пластическое течение начинается и в основном материале $r_1 \leq r \leq x_4$. В областях $x_2(t'_2) \leq r \leq R$ и $x_4 \leq r \leq x_2(t'_2)$ справедливы те же зависимости, что и ранее, где вместо c_5 следует подставить $c_6 = k_1x_4^2$. В областях вязкопластического течения найдем:

$$p_{r\varphi} = \frac{t - t'_4}{\eta_2}(c_6/r^2 - k_2) + \frac{t'_2 - t'_1}{\eta_1}(k_1 + c_3/r^2), \\ \theta = (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r, x_2) - (t - t'_4)F_1(-c_6, r, x_4) + A(c_6)$$

в области $r_1 \leq r \leq x_4$;

$$\theta = (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r_1, x_2) - (t - t'_4)F_1(-c_6, r_1, x_4) \\ - tF(-c_6, r, r_1) + t'_2F(c_3, r, r_1) + A_1(c_6)$$

в области $r_0 \leq r \leq r_1$. Для упругопластической границы $x_4(t)$ в этом случае следует уравнение $\omega(r_0, t_4) = F_1(-c_6, x_4, r_1) + F(-c_6, r_1, r_0)$.

Если угол поворота внутреннего цилиндра увеличивать и далее, то граница $x_4(t)$ в момент времени $t = t'_5$ достигнет поверхности $r = x_2$ и пластическая область будет развиваться далее. В этом случае получим:

$$\theta = A(c_6)$$

в области $x_4(t) \leq r \leq R$;

$$\theta = (t'_5 - t)F_1(-c_6, r, x_4) + A(c_6)$$

в области $x_2(t'_2) \leq r \leq x_4(t)$;

$$\theta = (t'_5 - t)F_1(-c_6, x_2, x_4) + (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r_1, x_2) - (t - t'_4)F_1(-c_6, r, x_2) + A(c_6)$$

в области $r_1 \leq r \leq x_2(t'_2)$;

$$\theta = (t'_5 - t)F_1(-c_6, x_2, x_4) + (t'_2 - t'_1)F_1(c_3, r_1, x_2) - (t - t'_4)F_1(-c_6, r_1, x_2) + t'_2F(c_3, r, r_1) - tF(-c_6, r, x_3) + A_1(c_6)$$

в области $r_0 \leq r \leq r_1$.

На рис. 2 показано распределение угла поворота в момент t_0 начала пластического течения у поверхности $r = r_0$, в момент времени $t_0 < t_1 < t_1^*$, в момент t_1^* , когда граница $x_1(t)$ достигает поверхности $r = r_1$, в момент времени t'_2 , в момент времени $t'_3 < t_3^* < t'_4$ и в момент времени $t_4 > t'_4$.

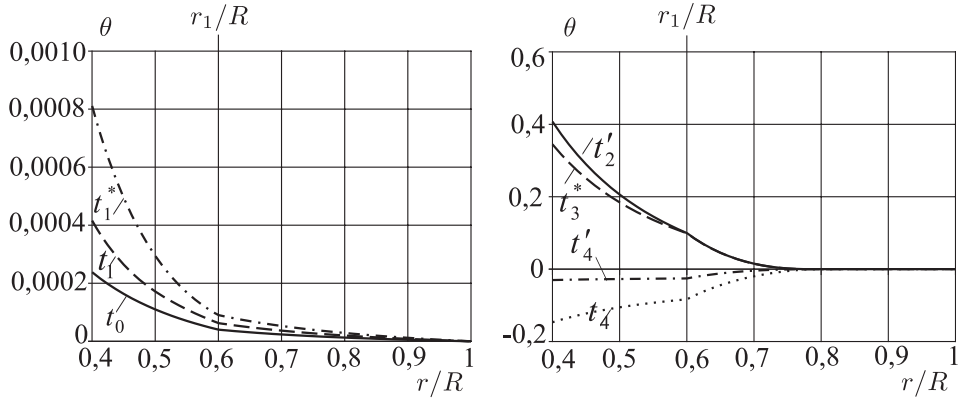


Рис. 2. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса при повороте внутреннего жесткого цилиндра

Аналогичным образом было получено решение задачи, когда поворачивается внешний цилиндр, а внутренний жестко закреплен. В этом случае при обратимом деформировании для функции θ найдем:

$$\theta = A_2(c), \quad A_2(c) = \frac{c}{2\mu_1}(1/r_1^2 - 1/r^2) + \frac{c}{2\mu_2}(1/r_0^2 - 1/r_1^2)$$

в области $r_1 \leq r \leq R$;

$$\theta = A_3(c), \quad A_3(c) = \frac{c}{2\mu_2}(1/r_0^2 - 1/r^2)$$

в слое $r_0 \leq r \leq r_1$.

Начальный параметр $\theta_0 = \theta(R, t_0)$ для пластического течения определяется по формуле (2.3). В условиях развивающего вязкопластического течения имеем:

$$\theta = tF(-c_1, r_0, x_1) + A_2(c_1), \quad \omega = F(-c_1, r_0, x_1)$$

в упругой области $r_1 \leq r \leq R$;

$$\theta = tF(-c_1, r_0, x_1) + A_3(c_1), \quad \omega = F(-c_1, r_0, x_1)$$

в упругой области $x_1 \leq r \leq r_1$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_2}(c_1/r^2 - k_2), & p_{r\varphi} &= \frac{t}{\eta_2}(c_1/r^2 - k_2), \\ c_1 &= k_2 x_1^2, & \theta &= tF(-c_1, r_0, r) + A_3(c_1), & \omega &= F(-c_1, r_0, r) \end{aligned}$$

в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq x_1$. Движущаяся граница $x_1(t)$ находится из решения уравнения

$$\omega(R, t_1) = F(-c_1, r_0, x_1). \quad (2.9)$$

Из сравнения (2.6) и (2.9) следует, что несмотря на различие в перемещениях и скоростях область вязкопластического течения при повороте внешнего цилиндра развивается так же, как и в случае вращения внутреннего.

В момент времени t_1^* граница $x_1(t)$ достигает поверхности $r = r_1$. При дальнейшем увеличении скорости поворота внутреннего цилиндра в области $r_0 \leq r \leq r_1$ накапливаются необратимые деформации. Для функций $\theta(r, t)$ и $\omega(r, t)$ будут справедливы зависимости:

$$\theta = tF(-c_1, r_0, r_1) + A_2(c_1), \quad \omega = F(-c_1, r_0, r_1)$$

в упругой области $r_1 \leq r \leq R$;

$$\theta = tF(-c_1, r_0, r) + A_3(c_1), \quad \omega = F(-c_1, r_0, r)$$

в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1$.

Когда угловая скорость внешнего цилиндра станет равной $\tilde{\omega}$, пластическое течение начнется и в основном материале. В этом случае получаем:

$$\begin{aligned} \theta &= tF(-c_2, r_0, r_1) + (t - t'_1)F_1(-c_2, r_1, x_2) + A_2(c_2), \\ \omega &= F(-c_2, r_0, r_1) + F_1(-c_2, r_1, x_2) \end{aligned}$$

в упругой области $x_2 \leq r \leq R$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_1}(c_2/r^2 - k_1), & p_{r\varphi} &= \frac{t - t'_1}{\eta_1}(c_2/r^2 - k_1), \\ \theta &= tF(-c_2, r_0, r_1) + (t - t'_1)F_1(-c_2, r_1, r) + A_2(c_2), \\ \omega &= F(-c_2, r_0, r_1) + F_1(-c_2, r_1, r) \end{aligned}$$

в области вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq x_2$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_2}(c_2/r^2 - k_2), & p_{r\varphi} &= \frac{t}{\eta_2}(c_2/r^2 - k_2), \\ c_2 &= k_1 x_2^2, & \theta &= tF(-c_2, r_0, r) + A_3(c_2), & \omega &= F(-c_2, r_0, r) \end{aligned}$$

в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1$.

При повороте внешнего цилиндра в обратном направлении наблюдаются те же эффекты, что и при повороте внутреннего. На рис. 3 приведено распределение угла поворота в течение всего процесса деформирования.

3. Слой смазки находится у внешнего жесткого цилиндра. Рассмотрим случай, когда слой неньютоновской смазки находится у внешней жесткой поверхности, т. е. занимает область $r_1 \leq r \leq R$, а деформирование происходит за счет поворота внутренней жесткой поверхности. Для того чтобы пластическое течение началось в слое смазки, необходимо выполнение условия

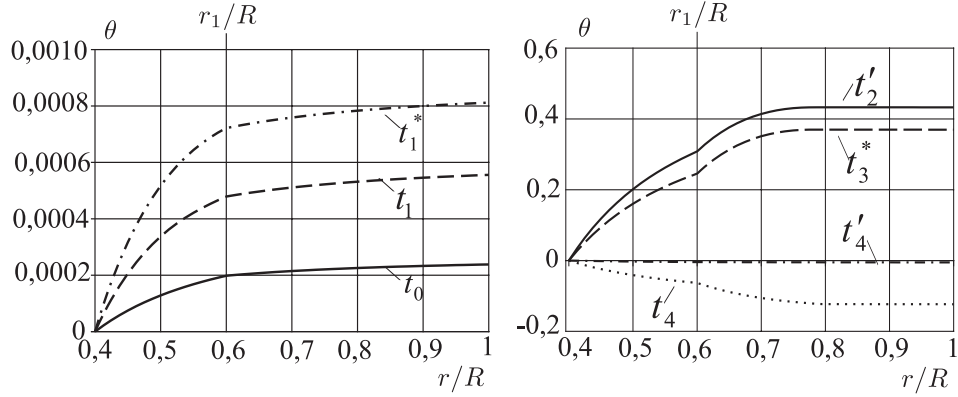


Рис. 3. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса при повороте внешнего жесткого цилиндра

$\sqrt{k_1/k_2} > r_1/r_0$, в противном случае вязкопластическое течение будет развиваться в основном материале, а слой будет деформироваться упруго. Пусть геометрические размеры обеспечивают выполнение неравенства, приведенного выше. Тогда в условиях упругого равновесия поле перемещений определяется по формулам $u_r = r(1 - \cos \theta)$, $u_\varphi = r \sin \theta$ и

$$\theta = A_4(c), \quad A_4(c) = \frac{c}{2\mu_2}(1/R^2 - 1/r^2)$$

в слое $r_1 \leq r \leq R$;

$$\theta = A_5(c), \quad A_5(c) = \frac{c}{2\mu_2}(1/R^2 - 1/r_1^2) + \frac{c}{2\mu_1}(1/r_1^2 - 1/r^2)$$

в области $r_0 \leq r \leq r_1$.

Используя условие пластичности, записанное в форме $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_1} = -k_2$, найдем угол поворота внутреннего жесткого цилиндра, при котором начнется пластическое течение в слое

$$\theta_0 = \frac{k_2}{2\mu_2}(1 - r_1^2/R^2) + \frac{k_2}{2\mu_1}(r_1^2/r_0^2 - 1). \quad (3.1)$$

При дальнейшем повороте внутреннего цилиндра развивается область вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq x_1(t)$. В этом случае, интегрируя уравнения равновесия и используя условие непрерывности перемещений, скоростей и напряжений, имеем:

$$\sigma_{r\varphi} = c_1/r^2, \quad \omega = 0, \quad c_1 = c(t_1), \quad \theta = A_4(c_1)$$

в упругой области $x_1 \leq r \leq R$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_2}(k_2 + c_1/r^2), \quad p_{r\varphi} = \frac{t}{\eta_2}(k_2 + c_1/r^2), \\ c_1 &= -k_2 x_1^2, \quad \theta = tF(c_1, r, x_1) + A_4(c_1), \quad \omega = F(c_1, r, x_1) \end{aligned}$$

в области вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq x_1$;

$$\theta = tF(c_1, r_1, x_1) + A_5(c_1), \quad \omega = F(c_1, r_1, x_1)$$

в упругой области $r_0 \leq r \leq r_1$. Граница области вязкопластического течения находится из решения уравнения $\omega(r_0, t_1) = F(c_1, r_1, x_1)$.

Считаем, что положение и размер слоя смазки выбраны таким образом, что граница $x_1(t)$ достигает поверхности внешнего жестко цилиндра прежде, чем вязкопластическое течение начнется в основном материале, т. е. выполняется условие $F(-k_2 R^2, r_1, R) < F(-k_1 r_0^2, r_1, r_0 \sqrt{k_1/k_2})$. Тогда в материале останутся две области: область упругого деформирования $r_0 \leq r \leq r_1$ и область $r_1 \leq r \leq R$, в которой продолжают накапливаться необратимые деформации. Функции $\theta(r, t)$ и $\omega(r, t)$ в этом случае имеют вид:

$$\theta = tF(c_1, r, R) + A_4(c_1), \quad \omega = F(c_1, r, R)$$

в области вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq R$;

$$\theta = tF(c_1, r_1, R) + A_5(c_1), \quad \omega = F(c_1, r_1, R)$$

в упругой области $r_0 \leq r \leq r_1$.

Предельное значение скорости поворота внутреннего цилиндра, при которой основной материал деформируется упруго, находится по формуле $\tilde{\omega} = F(-k_1 r_0^2, r_1, R)$. Если скорость вращения цилиндра превышает это значение, то в окрестности внутренней жесткой стенки начиная с момента времени t'_1 будет развиваться область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq x_2$. В областях $r_1 \leq r \leq R$ и $x_2 \leq r \leq r_1$ будут справедливы те же соотношения, что и ранее; в области $r_0 \leq r \leq x_2$ найдем

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta_1}(k_1 + c_2/r^2), \quad p_{r\varphi} = \frac{t}{\eta_1}(k_1 + c_2/r^2), \quad c_2 = -k_1 x_2^2,$$

$$\theta = (t - t'_1)F_1(c_2, r, x_2) + tF(c_2, r_1, R) + A_5(c_2), \quad \omega = F_1(c_2, r, x_2) + F(c_2, r_1, R).$$

Для упругопластической границы $x_2(t)$ получим уравнение $\omega(r_0, t_2) = F_1(c_2, r_0, x_2) + F(c_2, r_1, R)$.

Пусть с момента времени t'_2 внутренний жесткий цилиндр поворачивается в обратную сторону. Будем считать, что в этот момент времени весь слой смазки пластически течет, а основной материал деформируется только упруго, т. е. скорость поворота жесткого цилиндра не превышает значения $\tilde{\omega}$. В момент полной разгрузки имеем:

$$\theta = t'_2 F(c_3, r, R), \quad \omega = 0, \quad c_3 = c(t'_2)$$

в области с неизменяющимися пластическими деформациями $r_1 \leq r \leq R$;

$$\theta = t'_2 F(c_3, r_1, R), \quad \omega = 0$$

в упругой области $r_0 \leq r \leq r_1$.

Угол поворота, на который нужно повернуть внутренний цилиндр, чтобы на поверхности $r = r_1$ вновь началось пластическое течение, определяется значением $\theta_2 = \theta(r_0, t'_3) = t'_2 F(c_4, r_1, R)$, $c_4 = k_2 r_1^2$.

Интегрируя уравнения равновесия в трех областях, получим:

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = 0, \quad p_{r\varphi} = \frac{t'_2}{\eta_2}(k_2 + c_3/r^2),$$

$$\theta = t'_2 F(c_3, r, R) + A_4(c_5), \quad \omega = 0, \quad c_5 = k_2 x_3^2$$

в области с неизменяющимися пластическими деформациями $x_3 \leq r \leq R$;

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta_2}(c_5/r^2 - k_2), \quad p_{r\varphi} = \frac{t}{\eta_2}(c_5/r^2 - k_2) + \frac{t'_2}{\eta_2}(k_2 + c_3/r^2),$$

$$\theta = t'_2 F(c_3, r, R) - tF(-c_5, r, x_3) + A_4(c_5), \quad \omega = F(-c_5, x_3, r)$$

в области вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq x_3$;

$$\theta = t'_2 F(c_3, r_1, R) - t F(-c_5, r_1, x_3) + A_5(c_5), \quad \omega = F(-c_5, x_3, r_1)$$

в упругой области $r_0 \leq r \leq r_1$.

С течением времени граница $x_3(t)$ достигает внешней жесткой поверхности $r = R$. Затем в слое $r_1 \leq r \leq R$ накапливаются необратимые деформации. Когда скорость поворота внутреннего жесткого цилиндра станет равна $\hat{\omega} = F(-k_1 r_0^2, R, r_1)$, у внутренней поверхности $r = r_0$ будет развиваться область пластического течения. Абсолютное значение $|\hat{\omega}|$ угловой скорости внутреннего цилиндра, необходимое для начала пластического течения, совпадает с величиной $\tilde{\omega}$ при первом повороте. Графики угла поворота в различные моменты времени приведены на рис. 4 ($r_0/R = 0,5$, $r_1/R = 0,8$).

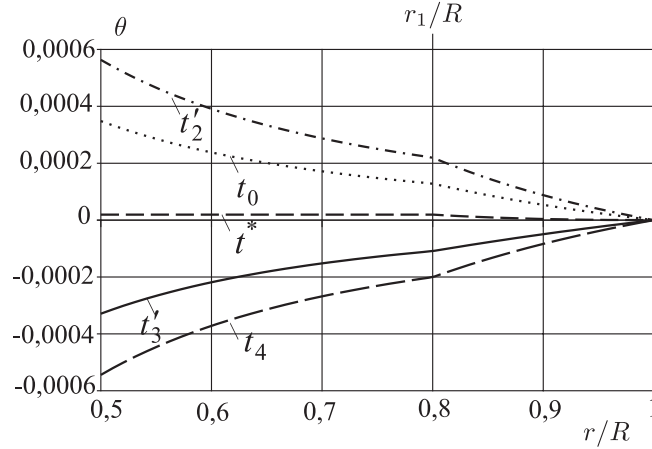


Рис. 4. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса при повороте внутреннего жесткого цилиндра

Пусть теперь вращается внешний цилиндр, внутренний жестко закреплен. При обратимом деформировании, воспользовавшись условием прилипания на неподвижном цилиндре, получим:

$$\theta = A_6(c), \quad A_6(c) = \frac{c}{2\mu_2} (1/r_1^2 - 1/r^2) + \frac{c}{2\mu_1} (1/r_0^2 - 1/r_1^2)$$

в слое $r_1 \leq r \leq R$;

$$\theta = A_7(c), \quad A_7(c) = \frac{c}{2\mu_1} (1/r_0^2 - 1/r^2)$$

в области $r_0 \leq r \leq r_1$.

Значение угла поворота внешнего жесткого цилиндра, при котором на внутренней поверхности слоя $r = r_1$ выполняется условие пластичности и начинается пластическое течение, определяется по формуле (3.1). Развивающаяся область вязкопластического течения будет ограничена поверхностями $r = r_1$ и $r = x_1(t)$. В условиях квазистатического приближения найдем:

$$\theta = t F(-c_1, r_1, x_1) + A_6(c_1), \quad \omega = F(-c_1, r_1, x_1)$$

в упругой области $x_1 \leq r \leq R$;

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta_2} (c_1/r^2 - k_2), \quad p_{r\varphi} = \frac{t}{\eta_2} (c_1/r^2 - k_2), \quad c_1 = k_2 x_1^2, \\ \theta = t F(-c_1, r_1, r) + A_6(c_1), \quad \omega = F(-c_1, r_1, r)$$

в области вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq x_1$;

$$\theta = A_7(c_1), \quad \omega = 0$$

в упругой области $r_0 \leq r \leq r_1$. Для определения упругопластической границы получим уравнение $\omega(R, t_1) = F(-c_1, r_1, x_1)$.

Пусть геометрические размеры выбраны таким образом, что пластическое течение в основном материале начинается, когда граница $x_1(t)$ еще не достигла внешней поверхности $r = R$. В этом случае с момента времени $t = t'_1$ уравнения равновесия необходимо проинтегрировать в четырех областях. Воспользовавшись непрерывностью скоростей и перемещений, получим:

$$\begin{aligned} \theta &= tF(-c_1, r_1, x_1) + (t - t_1)F_1(-c_1, r_0, x_2) + A_6(c_1), \\ \omega &= F(-c_1, r_1, x_1) + F_1(-c_1, r_0, x_2) \end{aligned}$$

в упругой области $x_1 \leq r \leq R$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_2}(c_1/r^2 - k_2), \quad p_{r\varphi} = \frac{t}{\eta_2}(c_1/r^2 - k_2), \quad c_1 = k_2x_1^2, \\ \theta &= tF(-c_1, r_1, r) + (t - t_1)F_1(-c_1, r_0, x_2) + A_6(c_1), \\ \omega &= F(-c_1, r_1, r) + F_1(-c_1, r_0, x_2) \end{aligned}$$

в области вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq x_1$;

$$\theta = (t - t_1)F_1(-c_1, r_0, x_2) + A_7(c_1), \quad \omega = F_1(-c_1, r_0, x_2)$$

в упругой области $x_2 \leq r \leq r_1$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_1}(c_1/r^2 - k_1), \quad p_{r\varphi} = \frac{t - t'_1}{\eta_1}(c_1/r^2 - k_1), \quad c_1 = k_2x_1^2 = k_1x_2^2, \\ \theta &= (t - t_1)F_1(-c_1, r_0, r) + A_7(c_1), \quad \omega = F_1(-c_1, r_0, r) \end{aligned}$$

в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq x_2$.

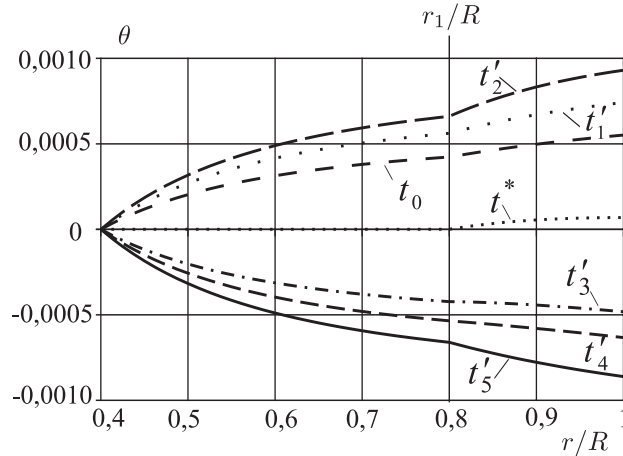


Рис. 5. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса при повороте внешнего жесткого цилиндра

В момент времени $t = t'_2$ граница $x_1(t)$ достигнет внешней поверхности $r = R$. При этом в областях $r_1 \leq r \leq R$, $x_2 \leq r \leq r_1$ и $r_0 \leq r \leq x_2$ справедливы

предыдущие зависимости. Как и в задачах ранее, рассмотрено деформирование материала при повороте жесткого цилиндра в обратную сторону. Распределение угла поворота показано на рис. 5 ($r_0/R = 0,4$, $r_1/R = 0,8$) в моменты времени: начала течения в слое t_0 ; начала течения в основном материале t'_1 ; в момент t'_2 , когда граница x_1 достигает поверхности $r = R$ (с этого же момента времени внешний цилиндр поворачивается в обратную сторону); полной разгрузки t_* ; начала повторного течения t'_3 при $r = r_1$; начала повторного течения t'_4 при $r = r_0$; в момент t'_5 , когда границы новых областей вязкопластического течения достигают соответственно поверхностей $r = R$ и $r = x_2(t'_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee E. N. Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1969. V. 36, N 1. P. 1–6.
2. Кондауров В. И. Об уравнения упруговязкопластической среды с конечными деформациями // Прикл. механика и техн. физика. 1982. № 4. С. 133–139.
3. Nemat-Nasser S. On finite deformation elasto-plasticity // Internat. J. Solids Structures. 1982. V. 18, N 10. P. 857–872.
4. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наук. думка, 1987.
5. Бьковцев Г. И., Шитиков А. В. Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
6. Мясников В. П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
7. Роговой А. А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикл. механика и техн. физика. 2005. Т. 46., № 45. С. 138–149.
8. Чернышев А. Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 120–128.
9. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986.
10. Буренин А. А., Бьковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
11. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2011.
12. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983.
13. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Докл. АН. 2000. Т. 375, № 6. С. 767–769.
14. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, № 2. С. 316–325.
15. Ковтанюк Л. В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 6. С. 764–767.
16. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // Прикл. механика и техн. физика. 2008. Т. 49, № 2. С. 143–151.
17. Знаменский В. А., Ивлев Д. Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.

Статья поступила 18 июля 2011 г.

Буренин Анатолий Александрович
 Ковтанюк Лариса Валентиновна
 Устинова Александра Сергеевна
 Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН
 ул. Радио, 5, 690041 г. Владивосток
 E-mail: burenin@iacp.dvo.ru; lk@iacp.dvo.ru; ustanova@iacp.dvo.ru