АНАЛИЗ РАСЧЁТНЫХ СПОСОБОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ О ПАССАЖИРОПОТОКАХ НА МАРШРУТАХ ГОРОДСКОГО ТРАНСПОРТА

В.Н. Ембулаев, Л.А. Николаева, Е.В. Сербина

Аннотация.

Рассмотрены вопросы, характеризующие процессы оказания транспортных услуг в системе пассажиропотоков. Разработана модель расчетного определения маршрутных корреспонденций транспортных потоков. Предложена схема перевозочного процесса и представлен подход к системе обработки информации о пассажиропотоках, что позволит оперативно решать организационно-экономические задачи в системе управления в реальном масштабе времени.

Проблемы управления перевозками пассажиров в настоящее время становятся более актуальными в связи с насыщением транспортных потоков на маршрутах подвижных единиц. Необходимость расширения сферы услуг по перевозке пассажиров и разработка математической модели расчетного определения маршрутных корреспонденций обусловлена не только качественными факторами в системе оказания транспортных услуг, но и процессами активизации туристско-рекреационной сферы в регионах, выступающими потенциальными точками экономического роста. Разработка системы обработки информации о пассажиропотоках и развитие информационного обеспечения решения транспортных задач позволит в оперативном режиме принимать решения для улучшения качества перевозочных процессов на маршрутах городов и обеспечит оперативное решение вопросов организации и управления по обеспечению устойчивых темпов экономического развития субъектов хозяйствования.

Пассажирские потоки между остановочными пунктами (ОП) на маршруте определяются, как правило, при обработке материалов обследования пассажиропотоков ручным способом. В конечном итоге элементы маршрутных корреспонденций пассажиропотоков (МКП) могут быть представлены в виде следующей матрицы (табл.1).

Таблица 1

Матрица элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков

Номера ОП входа	Номера ОП выхода							Вошло в ТС
	1	2	3	4	5	...	n	

1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	...	x_{1n}	a_1
2		x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	...	x_{2n}	a_2
3			x_{33}	x_{34}	x_{35}	...	x_{3n}	a_3
4				x_{44}	x_{45}	...	x_{4n}	a_4
5					x_{55}	...	x_{5n}	a_5
.						...	.	.
.						...	.	.
.						...	.	.
n							x_{nn}	a_n
Вышло	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	...	b_n	

Примечание. n – число ОП на маршруте; a_i – число пассажиров, вошедших в транспортное средство (ТС) на i-м ОП; b_j – число пассажиров, вышедших из ТС на j-м ОП; x_{ij} – число проехавших пассажиров от i-го до j-го ОП на маршруте, $i \le j$.

При обработке материалов обследования пассажиропотоков ручным способом вначале получают элементы МКП, а затем, суммируя их по строчкам и столбцам, определяют данные входа-выхода по каждому ОП на маршруте.

Математическая формулировка обратной задачи, то есть по имеющимся данным входа-выхода определить элементы МКП, сводится к следующему [1].

Задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = a_i; \quad \sum_{i=1}^{i} x_{ij} = b_j; \quad x_{ij} \ge 0, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n. \tag{1}$$

Причем a_i и b_j удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2}$$

Так как система (1) состоит из 2n уравнений с n(n+1)/2 неизвестными, то единственное решение системы возможно только при $n \le 3$. При n>3 существует, в принципе, бесчисленное множество решений и без дополнительного предположения относительно распределения пассажиропотоков между ОП маршрута нельзя однозначно определять элементы МКП.

В работах [1, 2, 3] при различных дополнительных предположениях относительно распределения пассажиропотоков между ОП маршрута разработаны различные модели расчётного определения МКП по данным входа-выхода. Однако практические расчёты показывают, что численные значения при этом остаются неизменными. Почему так происходит и анализируется в данной работе.

Для объяснения решения задачи определения элементов МКП по данным входа-выхода рассмотрим следующую схему перевозочного процесса на маршруте городского транспорта (см. рис. 1).

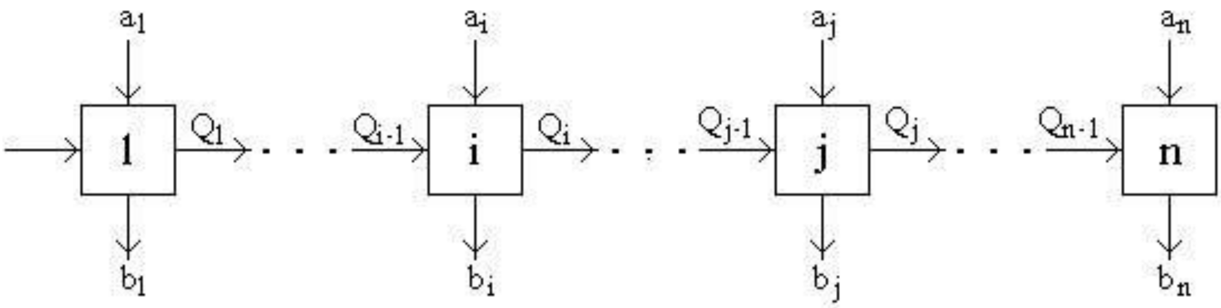

Рис. 1. Схема перевозочного процесса на маршруте городского транспорта

Данная схема описывает следующие ситуации перевозочного процесса. К j-му ОП подъезжает ТС. В салоне находится Q_{j-1} пассажиров, среди которых a_{ij} вошли на i-м ОП с намерением выйти из ТС не ранее j-го ОП на маршруте

$$a_{ij} = a_i - \sum_{r=i+1}^{j-1} x_{ir} , \qquad (3)$$

причем для j=i+1 $a_{ij} = a_i$.

Другими словами, a_{ij} – это число пассажиров, вошедших в салон ТС на i-м ОП и не вышедших из ТС ранее j-го ОП, то есть оставшихся в салоне ТС из a_i пассажиров за вычетом всех тех, которые проехали от i-го до (i+1), от i-го до (i+2),..., от i-го до (j-1) ОП по маршруту.

Во время стоянки ТС на j-м ОП вначале из салона выходит группа в количестве b_j пассажиров, а затем в салон входит группа из a_j пассажиров. Данные a_j и b_j фиксируются во время обследования пассажиропотоков подсчётом вошедших и вышедших пассажиров на каждом ОП маршрута. При отправлении ТС от j-го ОП в салоне будет находиться Q_j пассажиров:

$$Q_j = (Q_{j-1} - b_j) + a_j = \sum_{r=1}^{j} (a_r - b_r) . \qquad (4)$$

Следовательно, для любого $1 < j \le n$ имеется множество Q_{j-1} пассажиров, среди которых a_{ij} потенциально корреспондирующие от i-го до j-го ОП, где $1 \le i < j$. Из множества Q_{j-1} выходит группа в количестве b_j пассажиров. Число x_{ij} пассажиров, одновременно принадлежащие a_{ij} и b_j, является искомой величиной при решении задачи (1)–(2).

При таком описании перевозочного процесса на маршруте следует, что выход любого пассажира на j-м ОП из всех подъехавших Q_{j-1} есть независимое событие, вероятность которого равна $1/Q_{j-1}$. Из этого следует, что выход любой группы пассажиров из ТС в количестве b_j человек на j-м ОП является равновероятным событием. Общее число событий, когда из Q_{j-1} пассажиров может выйти различных групп в количестве b_j человек равно числу сочетаний из Q_{j-1} пассажиров по b_j, то есть $C_{Q_{j-1}}^{b_j}$.

Но вместе с Q_{j-1} пассажирами подъехали и a_{ij}, из которых некоторые могут выйти на j-м ОП в группе с b_j, - обозначим их через λ_{ij}. Безусловно, что λ_{ij} является случайной величиной. Группу λ_{ij} человек из a_{ij} можно выбрать $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}}$ различными способами. Но для каждой определенной группы λ_{ij} остальных пассажиров $(b_j - \lambda_{ij})$ при этом можно выбрать $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$ различными способами, и общее число благоприятствующих случаев будет $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$.

Следовательно, решение задачи определения элементов МКП по данным входа-выхода требует вероятностной интерпретации. Так, например, в работе [1] показан вывод формулы расчёта вероятности события, что на j-ом ОП выйдет вместе с b_j ровно λ_{ij} человек, принадлежащих a_{ij}:

$$p_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}}, \tag{5}$$

где

$$\max[0, (a_{ij} + b_j - Q_{j-1})] \le \lambda_{ij} \le \min[a_{ij}, b_j]. \tag{6}$$

А такое распределение случайной величины называется гипергеометрическим [4].

Из всех допустимых значений λ_{ij} на отрезке (6) её максимальное значение принимается в качестве искомой величины

$$x_{ij} = \arg\max_{\lambda_{ij}} p_{b_j}(\lambda_{ij}). \qquad (7)$$

Отметим, что x_{ij}, определяемые по формуле (7), имеют максимальные значения для конкретных i и j, поэтому должны выполняться следующие условия:

$$p_{b_j}(x_{ij}-1)/p_{b_j}(x_{ij}) \le 1 \text{ и } p_{b_j}(x_{ij})/p_{b_j}(x_{ij}+1) \ge 1. \qquad (8)$$

Решая эти неравенства относительно x_{ij} при допущении, что $Q_{j-1} \to \infty$ и $b_j \to \infty$, получим

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} b_j}{Q_{j-1}}, \qquad (9)$$

то есть максимум вероятности достигается при том значении x_{ij}, которое равно математическому ожиданию случайной величины λ_{ij} на отрезке (6).

Как следует из постановки задачи (1)–(2), единственное решение возможно только при n=3, которое можно представить в следующем виде [3]:

$$x_{11} = x_{22} = x_{33} = 0, \quad x_{12} = \frac{a_1 b_2}{Q_1}, \quad x_{13} = \frac{(Q_1 - b_2) a_1 b_3}{Q_1 Q_2}, \quad x_{23} = \frac{a_2 b_3}{Q_2}. \qquad (10)$$

Для рассмотрения решения системы (1) при n=4 сделаем следующее допущение: предположим, что структура формул определения идентичных элементов МКП при n=3 и n=4 остается неизменной. В этом случае система (1) при n=4 имеет следующее решение: x_{ij} для $1 \le i, j \le 3$ и $i \le j$ представлены в виде (10), а остальные x_{ij} для $1 \le i \le 4$ и j=4 определяются следующим образом с учётом того, что $b_4 = Q_3$:

$$x_{14} = a_{14} - x_{11} - x_{12} - x_{13} = a_1 - \frac{a_1 b_2}{Q_1} - \frac{(Q_1 - b_2) a_1 b_3}{Q_1 Q_2} = \frac{(Q_1 - b_2)(Q_2 - b_3) a_1}{Q_1 Q_2} =$$

$$= \frac{(Q_1 - b_2)(Q_2 - b_3) a_1 b_4}{Q_1 Q_2 Q_3};$$

$$x_{24} = a_2 - x_{22} - x_{23} = a_2 - \frac{a_2 b_3}{Q_2} = \frac{(Q_2 - b_3) a_2}{Q_2} = \frac{(Q_2 - b_3) a_2 b_4}{Q_2 Q_3};$$

$$x_{34} = a_3 - x_{33} = a_3 = \frac{a_3 b_4}{Q_3}; \quad x_{44} = 0.$$

Аналогичный анализ решения поставленной задачи в условиях предположения, что структура формул определения идентичных элементов МКП при n=4 и n=5, затем при n=5 и n=6 и т.д., остаётся неизменной, приводит к следующей общей формуле определения элементов МКП по данным входа-выхода:

$$x_{ij} = \prod_{r=i+1}^{j-1}(1-\frac{b_r}{Q_{r-1}})\frac{a_i\, b_j}{Q_{j\text{-}1}}\,. \tag{11}$$

Подробный вывод формулы (11) приводится в работе [2].

Простыми преобразованиями формулу (11) можно привести к следующему виду:

$$x_{ij} = \prod_{r=i+1}^{j-1}(1-\frac{b_r}{Q_{r-1}})\frac{a_i\, b_j}{Q_{j\text{-}1}} = (1-\frac{b_{i+1}}{Q_i})(1-\frac{b_{i+2}}{Q_{i+1}})\ldots(1-\frac{b_{j-1}}{Q_{j-2}})\frac{a_i b_j}{Q_{j-1}}$$

$$= [1-\frac{b_{i+1}}{Q_i} - (\frac{b_{i+2}}{Q_{i+1}} - \frac{b_{i+1}\, b_{i+2}}{Q_i\, Q_{i+1}}) - \ldots - \frac{b_{i+1} b_{i+2} \ldots b_{j-1}}{Q_1 Q_2 \ldots Q_{j-2}}]\ \frac{a_i b_j}{Q_{j-1}} = [a_1 - \frac{a_i b_{i+1}}{Q_i} - (1-\frac{b_{i+1}}{Q_i})\frac{a_i b_{i+2}}{Q_{i+1}} - \ldots$$

$$- \prod_{r=i+1}^{j-1}(1-\frac{b_r}{Q_{r-1}})\frac{a_i b_{j-1}}{Q_{j-2}}]\frac{b_j}{Q_{j\text{-}1}} = (a_i - x_{i,i+1} - x_{i,i+2} - \ldots - x_{i,j-1})\frac{b_j}{Q_{j\text{-}1}} = (a_i - \sum_{r=i+1}^{j-1} x_{ir})\frac{b_j}{Q_{j-1}} = \frac{a_{ij}\, b_j}{Q_{j\text{-}1}}\,.$$

Таким образом, с учетом формулы (3) равенство (11) преобразуется в равенство (9), то есть формулы (11) и (9) идентичны для вычисления элементов МКП.

В работе [3] Крупником В.Ш. приводится еще одна формула определения элементов МКП, которая получена в результате анализа решения поставленной задачи в условиях предположения о неизменности структуры формул вычисления идентичных элементов МКП с любым числом ОП на маршруте:

$$x_{ij} = \frac{(a_i - \sum_{r=i+1}^{j-1} x_{ir})\, b_j}{c_{j-1}}\,, \tag{12}$$

где $c_{j-1} = \sum_{t=1}^{j-2}(a_t - \sum_{r=t+1}^{j-1} x_{tr}) + a_{j\text{-}1}\,.$

Преобразуем выражение для c_{j-1}:

$$c_{j-1} = \sum_{t=1}^{j-2}(a_t - \sum_{r=t+1}^{j-1} x_{tr}) + a_{j\text{-}1} = \sum_{t=1}^{j-2} a_{t,j-1} + a_{j-1} = Q_{j-1}\,.$$

С другой стороны:

$$c_{j-1} = \sum_{t=1}^{j-2}(a_t - \sum_{r=t+1}^{j-1} x_{tr}) + a_{j\text{-}1} = \sum_{t=1}^{j-1} a_t - \sum_{t=1}^{j-2}(\sum_{r=t+1}^{j-1} x_{tr}) = \sum_{t=1}^{j-1} a_t - \sum_{r=t+1}^{j-1}(\sum_{t=1}^{j-2} x_{tr}) = \sum_{t=1}^{j-1} a_t - \sum_{r=2}^{j-1} b_r$$

$$= \sum_{t=1}^{j-1}(a_t - b_t) = Q_{j-1}\,.$$

Таким образом, c_{j-1} в формуле (12) идентично Q_{j-1} в формуле (4). А с учетом формулы (3) равенство (12) преобразуется в равенство (9), то есть формулы (12) и (9) также идентичны для вычисления элементов МКП.

Из описания перевозочного процесса по маршруту (см. рис. 1) получено следующее: имеется множество Q_{j-1} пассажиров, среди которых a_{ij} потенциально корреспондирующие из i в j. Из множества Q_{j-1} выходит группа из b_j пассажиров. Число λ_{ij} пассажиров, одновременно принадлежащих a_{ij} и b_j, является искомой величиной.

Рассмотрим два случая: 1 – когда $a_{ij} \ge b_j$; 2 – когда $a_{ij} \le b_j$.

Случай 1. $a_{ij} \ge b_j$. Возможны следующие события и соответственно число их сочетаний:

$b_j \in a_{ij}$ и $0 \in (Q_{j-1} - a_{ij})$, $\quad C_{a_{ij}}^{b_j}$ и $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{0}$;

$(b_j - 1) \in a_{ij}$ и $1 \in (Q_{j-1} - a_{ij})$, $\quad C_{a_{ij}}^{b_j-1}$ и $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{1}$;

. .

. .

. .

$(b_j - k) \in a_{ij}$ и $k \in (Q_{j-1} - a_{ij})$, $\quad C_{a_{ij}}^{b_j-k}$ и $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{k}$,

где $k = \min\,[b_j, (Q_{j-1} - a_{ij})]$.

В этом случае величина λ_{ij} принимает целочисленные значения на интервале $(b_j - k) \le \lambda_{ij} \le b_j$, распределение вероятностей которой имеет следующий вид:

$$p_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{\lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}}.$$

Случай 2. $a_{ij} \le b_j$. Возможны следующие события и соответственно число их сочетаний:

$a_{ij} \in a_{ij}$ и $(b_{j-1} - a_{ij}) \in (Q_{j-1} - a_{ij})$, $\quad C_{a_{ij}}^{a_{ij}}$ и $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-a_{ij}}$;

$(a_{ij} - 1) \in a_{ij}$ и $(b_{j-1} - a_{ij} + 1) \in (Q_{j-1} - a_{ij})$, $\quad C_{a_{ij}}^{a_{ij}-1}$ и $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-a_{ij}+1}$;

. .

. .

. .

$(a_{ij} - k) \in a_{ij}$ и $(b_{j-1} - a_{ij} + k) \in (Q_{j-1} - a_{ij})$, $\quad C_{a_{ij}}^{a_{ij}-k}$ и $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-a_{ij}+k}$,

где $k = \min\,[a_{ij}, (Q_{j-1} - a_{ij}) - (b_j - a_{ij})] = \min\,[a_{ij}, (Q_{j-1} - b_j)]$.

В этом случае величина λ_{ij} принимает целочисленные значения на интервале $(a_{ij} - k) \le \lambda_{ij} \le a_{ij}$, распределение вероятностей которой имеет следующий вид:

$$p_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{a_{ij}-\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j - a_{ij} + \lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}}.$$

Обобщение полученных результатов приводит к следующему распределению вероятностей случайной величины λ_{ij}:

$$p_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j - \lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}},$$

где $[b_j - \min[b_j, (Q_{j-1} - a_{ij})]] \le \lambda_{ij} \le b_j$, если $a_{ij} \ge b_j$;

или $[a_{ij} - \min[a_{ij}, (Q_{j-1} - b_j)]] \le \lambda_{ij} \le a_{ij}$, если $a_{ij} \le b_j$.

Эти два выражения можно записать в одном:

$$\max[0, (a_{ij} + b_j - Q_{j-1})] \le \lambda_{ij} \le \min[a_{ij}, b_j].$$

А это есть соответственно формулы (5) и (6). И вычисление элементов МКП осуществляется по формуле (9).

Таким образом, предложенные различными авторами математические модели расчётного определения элементов МКП по данным входа-выхода есть одна и та же формула, представленная в разных видах. **Авторы статьи не претендуют на оригинальность подхода, вместе с тем, представленная модель позволит автоматизировать процессы информационного обеспечения при решении транспортных задач в управлении перевозки пассажиров в условиях инновационных преобразований экономики.**

ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматизация управления транспортными системами / А. Артынов, В. Ембулаев, А. Пупышев, В. Скалецкий. – М.: Наука, 1984. – 272 с.

2. Вентцель Е.С. – Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964г.

3. Ембулаев В.Н. Теоретические основы и методы управления транспортной системой крупного города / Владивосток, Изд-во Дальнаука, 2004. – 212 с.

4. Крупник В.Ш. Структура рейсовой матрицы корреспонденций и энтропия в системе городского пассажирского транспорта // Методы оптимального планирования и управления в городском хозяйстве (пассажирский транспорт): Сб. – Владивосток, 1976. –

С. 45–49.

5. Николаева Л.А., Лайчук О. В. Инновационный процесс как фактор структурных преобразований экономики (теоретико-методологический аспект) // New tendencies in the development of international business. Proceedings of the 5 International Joint Conference/ Part I . Seoul 2007, с 116.