УДК 517.956

СИНГУЛЯРНЫЕ СИГМА-СЛЕДЫ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Киселевская Светлана Викторовна, доцент кафедры математики и моделирования, кандидат физико-математических наук
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
г. Владивосток, Россия
Svetlana.kiselevskaya@vvsu.ru

Целью работы является изучение точечных особенностей при решении сингулярной краевой задачи в плоской области с разрезом и одной особой точкой. Здесь рассматривается круговой сектор радиуса R *с центром в точке* ϑ *раствора* α, ϑ*-особая точка. Причём,* α *может принимать любое значение от 0 до* 2π. *Определяются и изучаются новые функциональные пространства, которые будут необходимы для дальнейшей работы, а также вводится понятие* σ*-следа в особой точке и находится явный вид ядра интегрального оператора* σ. *Основной результат состоит в доказательстве прямой и обратной теорем о* σ*-следах.*

Ключевые слова: *эллиптическая краевая задача; функциональные пространста; сигма-следы.*

A SINGULAR σ-TRACE FOR ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEM

Svetlana Kiselevskaya, associate professor of department of mathematics and modellin
Vladivostok State University of Service Economics, Vladivostok, Russia
Svetlana.kiselevskaya@vvsu.ru

The purpose of work is studying dot features at the decision a task in flat area with a cut and one special a point. Here is considered the circular sector of radius R *with the center in a point* ϑ *Solution* α, ϑ*-Special point. And,* α *may accept any value from 0 up to* 2π. *New functional spaces and concept are entered and studied* σ*-trace in special to a point. The obvious kind of a nucleus of the integrated operator* σ *is determined. The basic result consists in the proof of direct and return theorems about* σ*-traces.*

Keywords: *singular elliptic boundary problem; functional Spaces; special points;* σ*-traces.*

1. Функциональные пространства.

Введём некоторые обозначения. Через $C^{\infty}(0,R)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых на интервале $(0,R)$ функций. Через $\dot{C}^{\infty}[0,R)$ обозначаем подмножество функций из $C^{\infty}(0,R)$, имеющих компактный в $[0,R)$ носитель и все производные которых непрерывны вплоть до левого конца. Пусть $\dot{C}^{\infty}_{U}(0,R)$ – множество всех функций f, допускающих представление $f = P_{U}g$, в котором $g \in \dot{C}^{\infty}[0,R)$, то есть $\dot{C}^{\infty}_{U}(0,R) = P_{U}\dot{C}^{\infty}[0,R)$, где P_{U} -оператор Пуассона [см.1]. Обозначим через $\dot{H}^{s}_{U}(0,R)$ (где $s \geq 0$ - целое) пополнение множества $\dot{C}^{\infty}_{U}(0,R)$ по норме: $\|f\|_{\dot{H}^{s}_{U}(0,R)} = \|D^{s}(s_{U}f)\|_{L_2(0,R)}$, где L_2 - лебегово пространство. Пространство $\dot{H}^{s}_{U}(0,R)$ - аналог пространств Соболева-Никольского-Бесова [см.1].

Рассмотрим область Ω с гладкой границей, за исключением особой точки ϑ в некоторой окрестности которой область совпадает с сектором Q_R раствора 2π (то есть с кругом с разрезом), радиуса R. Где R - положительное число или бесконечность. Через $R_* > 0$ обозначим такое число, что открытый круговой сектор Q_{R_0} принадлежит области Ω. Пусть граница $\Gamma_{\vartheta} = \partial\Omega \setminus \vartheta$.

Введём полярные координаты $r > 0$, $\varphi \in Q$. Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} D^2_{\varphi}Y = -\lambda_k^2 Y, \varphi \in [0,2\pi], \\ Y(0) = Y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Найдём её решение:

$D^2_{\varphi}Y + \lambda_k^2 Y = 0,$ $u^2 + \lambda_k^2 = 0$, $u = \pm i\lambda_k^2$, тогда $Y_k = c_1\cos\lambda_k\varphi + c_2\sin\lambda_k\varphi$.

Учитывая краевые условия, получим

$$c_1 = 0\,,\ \lambda_k = \frac{k}{2}\,,\ \ k \in Z\,.$$

Система функций $\{\sin(\lambda_k\varphi)\}$ образует ортогональный базис пространства $L_2[0,2\pi]$, и так как норма $\|\sin(\lambda_k\varphi)\|^2_{L_2} = \pi$, то система функций $\{\sqrt{\pi}\sin(\lambda_k\varphi)\}$ образует ортонормированный базис пространства L_2.

Далее определим новые функциональные пространства, необходимые для дальнейшей работы.

Введём множество H^r_Δ как обобщённое замыкание пространства $C^\infty[0,R)$ в L_2 по норме

$$\|f\|^2_{H^r_\Delta(\Omega)} = \sum_{\substack{\beta+2l\le r,\\ |\beta|\le 1}} \int_\Omega \left|D^{\beta,l} f\right|^2 d\varphi = \sum_{\substack{\beta+2l\le r,\\ |\beta|\le 1}} \left\|D^{\beta,l} f\right\|^2_{L_2}. \qquad (1)$$

Здесь $D^{\beta,l} = D^\beta \Delta^l$. Покажем, что H^r_Δ - гильбертово пространство.

По теореме о существовании обобщённого замыкания (см., например, [2]) достаточно проверить выполнение условия согласования.

Действительно, рассмотрим фундаментальную по норме (1) последовательность функций $f \in C^\infty[0,R)$, тогда $f_n \xrightarrow{L_2} 0$ и последовательность функций $D^{\beta,l} f_n \in C^\infty[0,R)$ сходится к некоторой функции $g \in L_2$, значит, для любой функции φ из $C^\infty[0,R)$ выполняется $\int\limits_\Omega D^{\beta,l} f_n \varphi\, dt = (-1)^{\beta+l} \int\limits_\Omega f_n D^{\beta,l}\varphi\, dt \to \int\limits_\Omega 0\cdot D^{\beta,l}\varphi\, dt = 0$.

С другой стороны, $\int\limits_\Omega D^{\beta,l} f_n \varphi\, dt = \int\limits_\Omega g\varphi\, dt$, значит, $\int\limits_\Omega g\varphi\, dt = 0$ $\forall\, \varphi \in C^\infty[0,R)$. Отсюда следует, что почти всюду $g = 0$.

Таким образом, существует H^r_Δ - обобщённое замыкание пространства $C^\infty[0,R)$ в L_2, и так как норма в $C^\infty[0,R)$ порождена скалярным произведением, то H^r_Δ будет гильбертовым пространством.

Пусть $\dot{T}^{\infty}(\Omega)$ - множество функций $f \in C^{\infty}(0,R)$ для которых справедливо разложение

$$f = f(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{K} f_k(r)\sqrt{2/\alpha}\,\sin(\lambda_k\varphi) = \sum_{k=1}^{K} f_k(r)Y_k(\varphi),$$

где $f_k(r) = \int_0^{\alpha} f(r,\varphi)Y_k(\varphi)d\varphi,$

при этом предполагается, что натуральное число K своё для каждой функции f и, что функции $r^{-\lambda_k}\chi_R c(r) f_k(r)$ принадлежат $\dot{C}_0^{\infty}(0,2R_*)$. Через χ_R обозначена бесконечно дифференцируемая функция равная 1 при $0 \le r \le 1$ и 0 при $r \ge 2$, и положено $\chi_R(r) = \chi(r/R)$.

На $\dot{T}^{\infty}(\Omega)$ определим для целых $s \ge 0$ и $0 < R < R_*$ систему норм

$$\|f\|_{s,R}^2 = \sum \left\|r^{-\lambda_k}\chi_R f_k\right\|_{\dot{H}_0^s(0,2R)}^2 + \left\|(1-\chi_R)f\right\|_{H_\lambda^s(\Omega)}^2. \qquad (2)$$

Через $M^s(\Omega)$ обозначим замыкание $\dot{T}^{\infty}(\Omega)$ по топологии, определяемой системой норм (2), при $0 < R < R_*$.

Введём операцию усреднения по угловой переменной

$$\sigma f(r,\varphi) = \int_0^{\alpha} f(r,\varphi')\Sigma(r,\varphi,\varphi')d\varphi', \qquad (3)$$

где ядро Σ интегрального оператора σ определяется выражением:

$$\Sigma(r,\varphi,\varphi') = \frac{2}{\alpha}\sum_k r^{\lambda_k}\sin(\lambda_k\varphi)\sin(\lambda_k\varphi'),$$

где $\lambda_k = k/2,\ k \in Z.$

Определим σ -след в точке ϑ как предел

$$\sigma f\big|_{\vartheta} = \lim_{r\to 0}\sigma f(r,\varphi), \qquad (4)$$

понимаемый в классическом поточечном смысле.

Далее введём пространство σ -следов $A[0,\alpha]$ как множество функций, определённых на отрезке $[0,\alpha]$ и допускающих разложение в ряд Фурье по синусам $\Psi(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k \sin(\lambda_k\varphi)$, для коэффициентов которого для любого $h>0$ конечны нормы

$$\|\Psi\|_h^2=\sum_k h^{-2k}|\Psi_k|^2. \tag{5}$$

Лемма 1.1 *Пространство* $A[0,\alpha]$ *является полным счётно-нормируемым топологическим пространством, то есть пространством Фреше.*

Отметим, что к $A[0,\alpha]$ относятся те и только те функции, которые допускают гармоническое продолжение на весь сектор Q_∞. Для функции Ψ из пространства $A[0,\alpha]$ такой гармонической функцией будет функция

$$f(r,\varphi)=\sum_k \Psi_k r^{\lambda_k} Y_k. \tag{6}$$

Докажем прямую и обратную теоремы о σ-следах.

Теорема 1.1 (прямая теорема о σ-следах) *Для каждой функции* f *из пространства* M' *существует* σ*-след* $\sigma f|_s \in A[0,\alpha]$. *При этом оператор* $f \mapsto \sigma f|_s$ *непрерывно отображает* $\mathrm{M}'(\Omega)$ *в пространство* $A[0,\alpha]$.

Доказательство. Достаточно показать то, что данный оператор непрерывно отображает пространство $\dot{T}^\infty(\Omega)$ с индуцированной пространством $\mathrm{M}'(\Omega)$ топологией в пространство $A[0,\alpha]$. Для этого необходимо доказать (см. , например [3]), что для любого $h\in(0,1)$ существует такое число $R\in(0,R_*)$ и такая константа $c>0$, что для любой функции $f\in\dot{T}^\infty(\Omega)$ справедлива следующая оценка $\|\sigma f|_s\|_h \le c\|f\|_{s,R}$.

Пусть f_k - коэффициент разложения функции f по сферическим гармоникам Y_k, тогда функции $r^{-\lambda_k}\chi_R f_k$ принадлежат пространству $\dot{C}_u^\infty(0,R)$, а значит и $\dot{H}_u^s(0,R)$. Известно, что для любой функции $g\in\dot{H}_u^s(0,2R)$ справедлива оценка

$\left|\sigma_\upsilon(r)g(r)\right|_{r=0} \le C(s,R)(4R)^\upsilon(\upsilon+1)^{-s}\|g\|_{\dot{H}^s_\alpha(0,2R)}$, если $s \ge 1, \upsilon \ge 0, s+\upsilon > 1$. Здесь $\sigma_\upsilon(r) = r^{2\upsilon}$, при $\upsilon > 0$ и $\sigma_\circ(r) = \ln(1/r)^{-1}$. Полагая в этом неравенстве $g = r^{-\lambda_k} f_k \chi_R$, получим

$$\left|\sigma_\upsilon(r) r^{-\lambda_k} f_k\,|_{r=0}\right| \le C(s,R)(4R)^k(k+1)^{-s}\left\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_k\right\|_{\dot{H}^s_\alpha(0,2R)}.$$

Далее, так как σ -след

$$\sigma f\big|_S = \sum_k \sigma_\upsilon r^{-\lambda_k} f_k(r)\Big|_{r=0} \sin(\lambda_k\varphi),$$

то для любого $h \in (0,1)$ из предыдущей оценки получаем

$$\|\sigma f|_S\|_h^2 = \sum_k \left|\sigma_\upsilon r^{-\lambda_k} f_k\big|_{r=0}\right|^2 h^{-2k} \le C(s,R)\sum_k (4R)^{2k}(k+1)^{-2s}h^{-2k}\left\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_k\right\|^2_{\dot{H}^s_\alpha} \le$$

$$\le C(s,R)\sum_k \left\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_k\right\|^2_{\dot{H}^s_\alpha} \le C(s,R)\|f\|^2_{s,R},$$

где положено $R = \frac{1}{4}h$. Теорема доказана.

Приведём одно известное вспомогательное утверждение.

Лемма 1.2 *Пусть* $\{a_k\}, \{b_k\}$ *-две числовые последовательности;* τ *- некоторое положительное число. Пусть для любых* $t \in (0,\tau)$ *справедлива оценка* $\left|a_k t^k + b_k t^{-k}\right| \le C(t) < \infty$, *где* $k = 1,2,\ldots$ *и* $C(t) > 0$ *не зависит от* k . *Тогда при* $t > 0$ *справедлива следующая оценка* $\left|b_k t^{-k}\right| \le C_1(t) < \infty$, *где* $k = 1,2,\ldots$ *и* $C(t) > 0$ *также не зависит от* k .

Обратное утверждение о σ - следах дает

Теорема 1.2 (обратная теорема о σ - следах). *Отображение* $\Psi \mapsto f$, *задаваемое формулой* (6) *непрерывно из пространства* $A[0,\alpha]$ *в пространство* $\mathrm{M}^s_S(\Omega)$ *и при этом* $\sigma f\big|_S = \Psi$.

Доказательство. Из конечности норм (5) следует то, что при любом $h > 0$ функция f принадлежит пространству $\mathrm{M}^s_S(\Omega)$ и то, что последовательность функций $f^k(\sigma,\varphi) = \sum_{k=1}^{K}\Psi_k r^{-\lambda_k} Y_k$ сходится к функции f

в пространстве $\mathrm{M}_{\vartheta}^{r}(\Omega)$. Тогда по прямой теореме о σ-следах последовательность σ-следов $\sigma f^{k}\big|_{\vartheta}$ сходится к $\sigma f\big|_{\vartheta}$ в пространстве $A[0,\alpha]$.

С другой стороны $f^{k} \in \dot{T}^{\infty}(\Omega)$ и

$$\sigma f^{k}\big|_{\vartheta} = \sum_{k=1}^{K} Y_k \lim_{\sigma \to +0} r^{\lambda_k}(r^{-\lambda_k}\Psi_k) = \sum_{k=1}^{K} \Psi_k Y_k = \Psi^{k},$$

и $\Psi^{k} \to \Psi$ в $A[0,\alpha]$. Тогда $\sigma f\big|_{\vartheta} = \Psi$ и получим оценку

$$\left\| f^{k} \right\|^{2} \le C \sum_{k=1}^{K} \left|\Psi_k\right|^{2} (R-\varepsilon)^{-2k},$$

которая в пределе дает

$$\left\| f \right\|_{r,R}^{2} \le C \sum_{k=1}^{K} \left|\Psi_k\right|^{2} (R-\varepsilon)^{-2k} \le C_1 \left\|\Psi\right\|_{h},$$

где $h < R$. Теорема доказана.

Литература

1. Киселевская С.В. Счётно-нормируемые функциональные пространства в областях с особыми угловыми точками // Вологдинские чтения. Научная конференция, ДВГТУ. Естеств.науки: Материалы научной конференции ДВГТУ/ ДВГТУ – Владивосток, 2003. – С. 15-16.

2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

3. Катрахов В.В. Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона // Математический сборник. – 1991. – Т.182, №6. – С. 849-876.