УДК 517.9

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ГЕГЕНБАУЭРА

Е.Д. Емцева
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Россия, 690041, Владивосток, Гоголя 41
E-mail: emtseva@mail.ru

Цель данной работы состоит в построении и оценке решения дифференциального уравнения вида

$$B_{\alpha,0}f(r) = \frac{1}{\operatorname{sh}^{2\alpha}(r)} D(\operatorname{sh}^{2\alpha}(r)Df) = \beta^2 f(r), \tag{1}$$

где $D_r = \frac{d}{dr}$, $0 < r < \infty$, $2\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 0$ (оператор $B_{\alpha,\beta}$ введен в [3]). Его решения называются функциями Гегенбауэра. Изучим их, основываясь на сведение уравнения Гегенбауэра к эквивалентному интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, с целью дальнейшего обобщения этого подхода на другие подобные дифференциальные уравнения.

Сначала изучим регулярное решение уравнения (1), т.е. функцию $g^+(r) = g^+_{\alpha,\beta}$, удовлетворяющую задаче Коши

$$B_{\alpha,0}g^+(r) = \beta^2 g^+(r), g^+(0) = 1, Dg^+(0) = 0. \tag{2}$$

Она эквивалентна интегральному уравнению

$$g^+(r) - 1 = \beta^2 \int_0^r \operatorname{sh}^{-2\alpha}(t) \int_0^t \operatorname{sh}^{2\alpha}(\rho) g^+(\rho) d\rho dt = \beta^2 G g^+(r), \tag{3}$$

решение которого может быть представлено с помощью ряда (типа Неймана)

$$g^+(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{2k} \left(G^k \mathbf{1}\right)(r), \tag{4}$$

где G^k обозначает k-ю степень оператора G, а $\mathbf{1}$ - постоянную функцию, равную 1. Так как $\left(\frac{\operatorname{sh}\rho}{\operatorname{sh}t}\right)^{2\alpha} \leqslant 1$ при $0 < \rho \leqslant t < \infty$, то отсюда, например, по индукции следует оценка

$$|G^k \mathbf{1}(r)| \leqslant \frac{r^{2k}}{(2k)!}.$$

Таким образом, ряд (7) сходится при любых $\beta \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r \leqslant \infty$ и справедлива оценка

$$|g^+(r)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta r)^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta r)^k}{k!} = e^{\beta r}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *если для функции $f(r)$ выполняются условия*

1) $B_{\alpha,0}^k f \in C[0,\infty)$, $k = 0, 1, ...,$

2) $DB_{\alpha,0}^k f \in C[0,\infty)$ и $DB_{\alpha,0}^k f(0) = 0$, $k = 0, 1, ...,$

то $f(r) \in C_+^\infty[0,\infty)$.

Изучим некоторые свойства регулярных решений $g^+(r)$. Функция $g^+(r) \in C^\infty[0,\infty)$ и $D^{2l+1}g^+(0) = 0, l = 0, 1, \ldots,$ что следует из (7). В самом деле, функция g^+ непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда (7), то же по общим соображениям можно сказать и о всех ее производных, значит, она из класса $C^\infty(0,\infty)$. Из (6) имеем

$$Dg^+(r) = \beta^2 \operatorname{sh}^{-2\alpha}(r) \int\limits_0^r \operatorname{sh}^{2\alpha}(\rho) g^+(\rho) d\rho \underset{r\to+0}{\longrightarrow} 0, \tag{5}$$

далее

$$D^2 g^+(r) = \beta^2(-2\alpha) \operatorname{sh}^{-2\alpha-1}(r) \operatorname{ch} r \int\limits_0^r \operatorname{sh}^{2\alpha}(\rho) g^+(\rho) d\rho +$$

$$+\beta^2 \operatorname{sh}^{-2\alpha}(r) \operatorname{sh}^{2\alpha}(r) g^+(r) = \beta^2(-2\alpha) \operatorname{sh}^{-2\alpha-1}(r) \operatorname{ch}(r) \int\limits_0^r \frac{D \operatorname{sh}^{2\alpha+1}(\rho)}{2\alpha+1} \frac{g^+(\rho)}{\operatorname{ch}(\rho)} d\rho +$$

$$+\beta^2 g^+(r) = \beta^2(-2\alpha) \operatorname{sh}^{-2\alpha-1}(r) \operatorname{ch}(r) \frac{\operatorname{sh}^{2\alpha+1}(r)}{2\alpha+1} \frac{g^+(r)}{\operatorname{ch}(r)} + \beta^2 g^+(r) -$$

$$-\beta^2(-2\alpha) \operatorname{sh}^{-2\alpha-1}(r) \operatorname{ch}(r) \int\limits_0^r \frac{\operatorname{sh}^{2\alpha+1}(\rho)}{2\alpha+1} D \frac{g^+(\rho)}{\operatorname{ch}(\rho)} d\rho =$$

$$= \frac{\beta^2 g^+(r)}{2\alpha+1} + \frac{2\beta^2\alpha}{2\alpha+1} \operatorname{sh}^{-2\alpha-1}(r) \operatorname{ch}(r) \int\limits_0^r \operatorname{sh}^{2\alpha+1}(\rho) D \frac{g^+(\rho)}{\operatorname{ch}(\rho)} d\rho.$$

При $r \to 0$, а значит и $\rho \to 0$ имеем

$$\operatorname{sh}^{2\alpha+1}(\rho) D \frac{g^+(\rho)}{\operatorname{ch}(\rho)} \sim \rho^{2\alpha+2},$$

следовательно

$$D^2 g^+(r) \underset{r\to+0}{\longrightarrow} \frac{\beta^2 g^+(0)}{2\alpha+1}$$

и т. д. Это, в частности, означает, что функция g^+ бесконечно дифференцируема вплоть до 0. Кроме того, справедлива оценка

$$|Dg^+(r)| \leqslant \beta^2 e^{\beta r}. \tag{6}$$

Действительно,

$$|Dg^+(r)| = |\beta^2 \operatorname{sh}^{-2\alpha}(r) \int\limits_0^r \operatorname{sh}^{2\alpha}(\rho) g^+(\rho) d\rho| \leqslant$$

$$\leqslant \beta^2 \operatorname{sh}^{-2\alpha}(r) \int\limits_0^r \operatorname{sh}^{2\alpha}(\rho) e^{\beta\rho} d\rho \leqslant \beta^2 \int\limits_0^r \left(\frac{\operatorname{sh}(\rho)}{\operatorname{sh}(r)} \right)^{2\alpha} e^{\beta\rho} d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \beta^2 \int\limits_0^r e^{\beta\rho} d\rho = \beta(e^{\beta r} - 1) \leqslant \beta e^{\beta r}.$$

Для нахождения сингулярного решения $g^- = g^-_{\alpha,\beta}$ уравнения (1), т.е. решения, имеющего особенность в точке $r = 0$, воспользуемся известным приемом понижения порядка уравнения, так как известно одно из его решений, а именно g^+. Для этого представим g^- в виде g^+h. Тогда

$$0 = (B_{\alpha,0} - \beta^2)g^- = (B_{\alpha,0} - \beta^2)(g^+h) = (D^2 + 2\alpha \operatorname{cth} D - \beta^2)(g^+h) =$$

$$= D^2(g^+h) + 2\alpha \operatorname{cth} D(g^+h) - \beta^2(g^+h) = hD^2g^+ + 2Dg^+Dh + g^+D^2h +$$

$$+2\alpha \operatorname{cth} hDg^+ + 2\alpha \operatorname{cth} g^+Dh - \beta^2 g^+h = h(B_{\alpha,0} - \beta^2)g^+ + 2Dg^+Dh + g^+B_{\alpha,0}h =$$

$$= 2Dg^+Dh + g^+ \operatorname{sh}^{-2\alpha} D(\operatorname{sh}^{2\alpha} Dh),$$

т.е. для Dh имеем уравнение первого порядка, решение которого имеет вид

$$Dh = c(g^+)^{-2} \operatorname{sh}^{-2\alpha} r,$$

где c - произвольная постоянная. Тогда функция

$$g^-(r) = g^+(r) \int\limits_r^R \operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho)(g^+(\rho))^{-2} d\rho \tag{7}$$

и будет искомым решением краевой задачи

$$B_{\alpha,0}g^-(r) = \beta^2 g^-(r), 0 < r \leqslant R < \infty, \tag{8}$$

$$\lim_{r \to +0} \operatorname{sh}^{2\alpha}(r) Dg^-(r) = -1, \tag{9}$$

$$g^-(R) = 0. \tag{10}$$

Отметим, что вместо весового краевого условия на производную (7) в этой краевой задачи можно поставить и эквивалентное весовое краевое условие на саму функцию:

$$1 = \lim_{r \to +0} g^-(r) \times \begin{cases} (2\alpha - 1) \operatorname{sh}^{2\alpha - 1}(r), & \text{если } 2\alpha > 1, \\ \dfrac{1}{\ln \operatorname{sh}(r)}, & \text{если } 2\alpha = 1. \end{cases} \tag{11}$$

В самом деле, так как g^+ удовлетворяет краевым условиям и является гладкой функцией, то при $r \to 0$ и $2\alpha > 1$ по (6) имеем

$$(2\alpha - 1) \operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r) g^-(r) = (2\alpha - 1) \operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r) g^+(r) \int\limits_r^R \operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho) \left(g^+(\rho)\right)^{-2} d\rho =$$

$$= (2\alpha-1)\operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)g^{+}(r)\int\limits_{r}^{R}\operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho)(1+O(\rho^2))d\rho \sim$$

$$\sim (2\alpha-1)\operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)\int\limits_{r}^{R}\operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho)(1+O(\rho^2))d\rho =$$

$$= (2\alpha-1)\operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)\int\limits_{r}^{R}\operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho)d\rho + (2\alpha-1)\operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)\int\limits_{r}^{R}\operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho)O(\rho^2)d\rho.$$

Используя оценку $\rho \leqslant \operatorname{sh}(\rho) \leqslant \frac{\operatorname{sh}(R)}{R}\rho$, где $\rho \in [0, R]$, преобразуем последнее слагаемое

$$(2\alpha-1)\operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)\int\limits_{r}^{R}\operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho)O(\rho^2)d\rho = (2\alpha-1)\operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)\int\limits_{r}^{R}O(\rho^{-2\alpha+2})d\rho =$$

$$= (2\alpha-1)O(r^2) \underset{r\to+0}{\longrightarrow} 0.$$

Используя правило Лопиталя, вычислим предел первого слагаемого

$$\lim_{r\to+0}(2\alpha-1)\operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)\int\limits_{r}^{R}\operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho)d\rho = \lim_{r\to+0}\frac{-(2\alpha-1)\operatorname{sh}^{-2\alpha}(r)}{(1-2\alpha)\operatorname{sh}^{-2\alpha}(r)\operatorname{ch}(r)} = 1.$$

Аналогично доказывается второе соотношение в (11). Так как $\operatorname{sh} r \sim r$ при $r\to 0$, то (11) можно записать еще в одном эквивалентном виде

$$1 = \lim_{r\to+0} g^{-}(r) \times \begin{cases} (2\alpha-1)r^{2\alpha-1}, & \text{если } 2\alpha > 1, \\ \dfrac{1}{\ln r}, & \text{если } 2\alpha = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Учитывая, что $g^{+}(r) \geqslant 1$, $r \leqslant \operatorname{sh}(r)$ при $r \geqslant 0$ и $\operatorname{sh}(\rho) \geqslant \frac{\operatorname{sh}(r)}{r}\rho$ при $r \leqslant \rho$, получим следующие оценки:

$$0 \leqslant \operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)g^{-}(r) \leqslant \operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)e^{\beta r}\int\limits_{r}^{R}\operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho)d\rho \leqslant$$

$$\leqslant e^{\beta r}\operatorname{sh}^{2\alpha-1}(r)\left(\frac{\operatorname{sh}(r)}{r}\right)^{-2\alpha}\int\limits_{r}^{R}\rho^{-2\alpha}d\rho = e^{\beta r}\operatorname{sh}^{-1}(r)r^{2\alpha}\left.\frac{\rho^{-2\alpha+1}}{-2\alpha+1}\right|_{r}^{R} =$$

$$= \frac{e^{\beta r}r^{2\alpha}}{(-2\alpha+1)\operatorname{sh}(r)}(R^{-2\alpha+1} - r^{-2\alpha+1}) \leqslant \frac{e^{\beta r}r^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\operatorname{sh}(r)}r^{-2\alpha+1} \leqslant \frac{e^{\beta r}}{(2\alpha-1)},$$

где $0 < r \leqslant R, 2\alpha > 1$, и аналогично

$$|\operatorname{sh}^{2\alpha} r Dg^{-}(r)| = \left| Dg^{+}(r)\operatorname{sh}^{2\alpha}(r)\int\limits_{r}^{R}\operatorname{sh}^{-2\alpha}(\rho)(g^{+}(\rho))^{-2}d\rho - (g^{+}(r))^{-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \beta \exp(\beta r) \int\limits_r^R \left(\frac{\operatorname{sh}(r)}{\operatorname{sh}(\rho)} \right)^{2\alpha} d\rho + 1 \leqslant R\beta e^{\beta r} + 1,$$

тогда

$$|\operatorname{sh}^{2\alpha} r D g^-(r)| \leqslant a^\beta$$

при некоторой постоянной $a > 0$.

Построенные два решения $g^+_{\alpha,\beta}$ и $g^-_{\alpha,\beta}$ линейно независимы и, поэтому образуют базис множества всех решений уравнения (1). Их вронскиан имеет вид

$$W(g^+_{\alpha,\beta}, g^-_{\alpha,\beta}) = g^+_{\alpha,\beta} D g^-_{\alpha,\beta} - g^-_{\alpha,\beta} D g^+_{\alpha,\beta} = g^+_{\alpha,\beta}(hDg^+_{\alpha,\beta} + g^+_{\alpha,\beta} Dh) - g^-_{\alpha,\beta} D g^+_{\alpha,\beta} =$$

$$= (g^+_{\alpha,\beta})^2 Dh = -(g^+_{\alpha,\beta})^2 (g^+_{\alpha,\beta})^{-2} \operatorname{sh}^{-2\alpha}(r) = -\operatorname{sh}^{-2\alpha}(r).$$

Цель работы достигнута путем построения двух линейно независимых решений (регулярного и сингулярного), образующих базис множества всех решений изучаемого уравнения. Результаты исследований могут быть использованы при рассмотрении некоторых краевых задач на плоскости Лобачевского а также представлять самостоятельный интерес.

Список литературы

1. Бейтемен Г.,Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.:Наука, Т.1. 1973. 294 с.
2. Бейтемен Г.,Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.:Наука, Т.2. 1974. 294 с.
3. Емцева Е.Д., Катрахов В.В. Об одном классе операторов преобразования //Дальневосточный математ. журнал. 2007. Т.7, № 1-2. С. 62-78.
4. Катрахов В.В., Емцева Е.Д. Сингулярная краевая задача в областях пространства Лобачевского.// ДАН. 2007. Т. 412, № 6. С. 736-738.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марченко О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.:Наука, 1983. 752 с.