УДК 004.023

Семенов Сергей Максимович

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Россия. Владивосток

Об одном способе решения систем логических уравнений

Рассматривается способ определения количества решений системы логических уравнений. Способ основан на построении дерева решений и определении рекуррентных соотношений для уровня N. Применение разработанного способа обеспечивает конструктивный подход к решению задачи В15 ЕГЭ.

Ключевые слова и словосочетания: системы логических уравнений, дерево решений, рекуррентные соотношения, В15, ЕГЭ.

На практике системы логических уравнений [1] полезны при разработке цифровых логических устройств [2]. Решению систем логических уравнений посвящена одна из задач ЕГЭ по информатике. К сожалению, различные известные способы решения этой задачи не позволяют сформировать какой-то один подход к решению этой задачи. В результате решение задачи вызывает большие затруднения у выпускников. Мы предлагаем способ решения систем логических уравнений, который позволяет выпускнику следовать вполне определенному алгоритму. Идея этого способа изложена в [2]. Мы применили и развили данную идею (построение дерева решений), почти не используя таблицы истинности для всего дерева. При решении различных задач выяснилось, что количество решений многих систем логических уравнений подчиняется рекуррентным соотношениям, таким, как числа Фибоначчи и др.

Системы логических уравнений. Будем придерживаться следующих обозначений: дизъюнкция (+), конъюнкция (·), исключающее ИЛИ ($\oplus$), импликация ($\rightarrow$), эквивалентность ($\equiv$), отрицание ($\neg$). На рисунках темный кружок обозначает 1, а светлый кружок – 0. F_1 – количество решений при X_1, равном 1. F_0 – количество решений при X_1, равном 0. N – число переменных в системе уравнений. $F(N) = F_1(N) + F_0(N)$ – общее число решений.

Задание 1. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], тест № 2)

$X_1+X_2{\cdot}X_3=1$
$X_2+X_3{\cdot}X_4=1$
.....
$X_7+X_8{\cdot}X_9=1$

Вначале полагаем $X_1 = 1$. Тогда для первого уравнения значения X_2 и X_3 могут быть любыми. Таким образом, дерево построено до третьего уровня. Далее с учетом X_2 и X_3 выбираем X_4. После этого алгоритм повторяется для каждой тройки переменных (рис. 1). Начиная с четвертого уровня можно заметить, что $F_1(4)=F_1(3)+F_1(1)$, $F_1(5)=F_1(4)+F_1(2)$. Таким образом, получаем

$$F_1(N) = F_1(N-1) + F_1(N-3) \qquad (1)$$

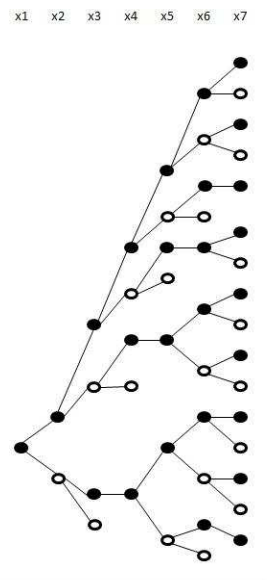


Рис. 1. Задание 1

Из уравнения (1) следует:

$F_1(8) = 16 + 7 = 23$,

$F_1(9) = 23 + 11 = 34$.

Чтобы построить дерево из нуля, можно воспользоваться нижней ветвью из рис. 1. Легко видеть, что она повторяет основное дерево, но со сдвигом вправо на 2, то есть

$F_0(9)=F_1(7)=16$.

Итого, $F(9) = F_1(9) + F_0(9) = 34 + 16 = 50$.

При построении дерева решений можно визуально установить рекуррентные соотношения для определения количества решений на уровне N.

Принцип математической индукции гласит: пусть имеется последовательность утверждений F_1, F_2, F_3 и пусть первое утверждение F_1 верно. Мы можем доказать, что из верности утверждения F_N следует верность F_{N+1}. Тогда все утверждения в этой последовательности верны.

Рассмотрим рис. 2 для задания 1.

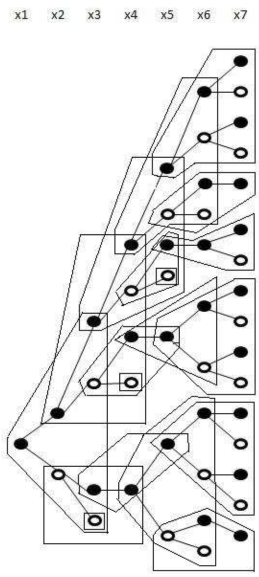


Рис. 2. Анализ дерева решений

На рисунке 2 выделены фигуры, имеющие общую вершину (комбинации значений переменных) для первых пяти уравнений системы. В каждом уравнении задействованы три переменных, поэтому фигуры составляются из значений трех переменных (трех уровней дерева). Для того чтобы идентифицировать фигуры, можно было бы ввести обозначения. Однако мы поступим следующим образом: каждой фигуре поставим в соответствие количество составляющих ее кружков (значений переменных). Тогда получим для последовательности следующие уравнения:

1. 7
2. 7, 4
3. 7, 4, 4, 1
4. 7, 4, 4, 1, 7
5. 7, 4, 4, 1, 7, 7, 4.

С уравнения 4 можно видеть, что фигуры для уравнения N состоят из фигур уравнения N-1 и фигур уравнения N-3. Важно, что других фигур нет и быть не может для данного типа уравнений, то есть переход от одного уравнения к другому производится путем увеличения числа фигур из ограниченного набора по строго определенным правилам. Этот факт и является основным для того, чтобы утверждать по индукции, что для уравнения N+1 набор фигур будет состоять из фигур уравнения N и фигур уравнения N-2.

Другим способом идентификации фигур является определение количества значений переменных на последнем уровне для данного уравнения, то есть нужно перейти от номера уравнения к номеру уровня дерева, поскольку нам нужно определить количество решений для системы уравнений, Тогда для построенного дерева получим последовательность: 1, 2, 4, 5, 7, 11, 16.

Для этой последовательности справедлива формула:

$F_N = F_{N-1} + F_{N-3}$.

В соответствии с нашими рассуждениями эта формула будет верна для N+1, а по индукции и для любого N.

Приведенный способ доказательства можно использовать для любых систем подобного типа. На практике достаточно определять рекуррентное соотношение для уровня N, поскольку в основе его лежит ограниченный набор фигур и способов их преобразований при переходе от уравнения, соответствующего уровню N, к уравнению, соответствующему уровню N+1.

Задание 2. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], 4.16)

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$

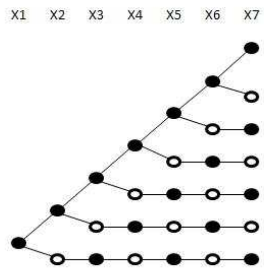


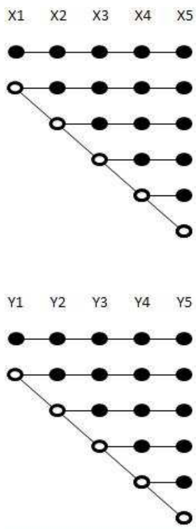
Рис. 3. Задание 2

Для получения числа решений задания 2 можно было не строить дерево решений полностью (рис. 3), так как очевидно, что $F_1(N) = N$. Аналогично, $F_0(N) = N$. Итого $F(7) = 7 + 7 = 14$.

Задание 3. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], тест № 1)

$(X_1 \rightarrow X_2) \cdot (X_2 \rightarrow X_3) \cdot (X_3 \rightarrow X_4) \cdot (X_4 \rightarrow X_5) = 1$
$(Y_1 \rightarrow Y_2) \cdot (Y_2 \rightarrow Y_3) \cdot (Y_3 \rightarrow Y_4) \cdot (Y_4 \rightarrow Y_5) = 1$
$(Y_1 \rightarrow X_1) \cdot (Y_2 \rightarrow X_2) \cdot (Y_3 \rightarrow X_3) \cdot (Y_4 \rightarrow X_4) \cdot (Y_5 \rightarrow X_5) = 1$

На рисунке 4 показаны деревья решений для X и Y и приведены соответствующие таблицы истинности.



X1	X2	X3	X4	X5
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Рис. 4. Задание 3

Из первых двух уравнений, поскольку X и Y независимы, следует, что общее число решений F(5) = 6 * 6 = 36. Для того чтобы учесть третье уравнение, нужно для каждой переменной Y подсчитать, какое число наборов из таблицы X не удовлетворяет уравнению. Импликация $Y_i \to X_i = 0$, если $Y_i = 1$, а $X_i = 0$. Иначе говоря, для $Y_1 = 1$ третьему уравнению не удовлетворяют все строки из таблицы X, где $X_1 = 0$. Число таких строк равно 5. Для $Y_2 = 1$ таких строк – 4 и т.д. Общее число строк, которые не удовлетворяют третьему уравнению, равно 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.

Таким образом, общее число допустимых решений равно 36 – 15 = 21.

Задание 4. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], 4.17.a)

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$

$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$

$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$

$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$

$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$

$(X_5 \equiv X_6) = 0$

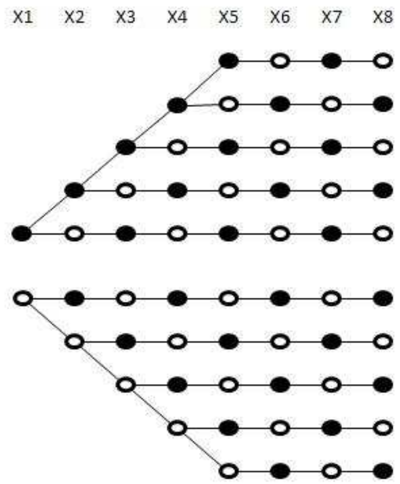


Рис. 5. Задание 4

Для данного примера сложно определить конечную формулу F(N), проще построить дерево решений до конца (или хотя бы до X6). На рисунке 5 показано построенное дерево решений. В результате получаем $F(8) = F_1(8) + F_0(8) = 5 + 5 = 10$.

Задание 5. Необходимо найти количество решений системы уравнений ([1], 4.17.б)

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \equiv X_8) = 1$

Для этого примера, так же как и для предыдущего, проще построить дерево решений до конца (рис. 6). В результате получаем $F(8) = F_1(8) + F_0(8) = 7 + 7 = 14$.

Задание 6. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], 4.17.в)

$(X_1 \oplus X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \oplus X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \oplus X_4) + (X_4 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \oplus X_5) + (X_5 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \oplus X_6) + (X_6 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \oplus X_7) + (X_7 \equiv X_8) = 1$

Дерево решений показано на рис. 7.

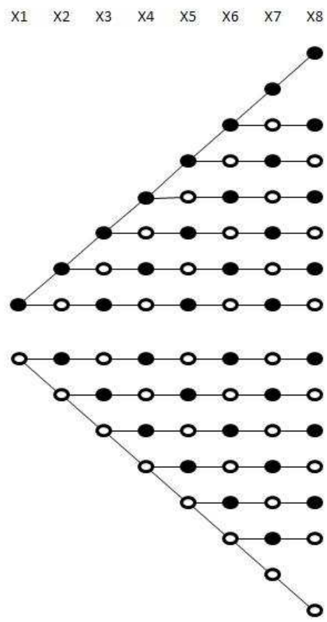


Рис. 6. Задание 5

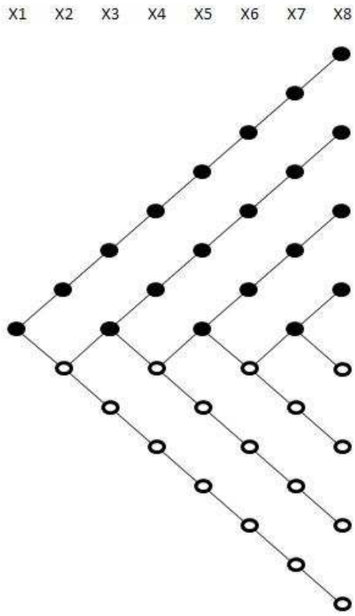


Рис. 7. Задание 6

Для данной системы уравнений можно было не строить полное дерево решений, так как уже с третьего – четвертого шага понятно, что $F_1(N) = N$. Легко увидеть, что $F_0(N)$ можно получить из дерева, начинающегося на втором уровне из нуля. Тогда $F_0(N) = N$. Итого, $F(8) = F_1(8) + F_0(8) = 8 + 8 = 16$.

Задание 7. Нужно найти количество решений системы уравнений ([1], 4.17 г)

$(X_1 \oplus X_2) + (X_1 \oplus X_3) = 1$

$(X_2 \oplus X_3) + (X_2 \oplus X_4) = 1$

$(X_3 \oplus X_4) + (X_3 \oplus X_5) = 1$

$(X_4 \oplus X_5) + (X_4 \oplus X_6) = 1$

$(X_5 \oplus X_6) + (X_5 \oplus X_7) = 1$

$(X_6 \oplus X_7) + (X_6 \oplus X_8) = 1$

Заметим, что если $X_1 = X_2 = 1$, то первое уравнение выполняется при $X_3 = 0$. Построим сначала дерево для $X_1 = X_2 = 1$ (рис. 8). Тогда число решений $F_1(N) = F_{11}(N) + F_{10}(N)$.

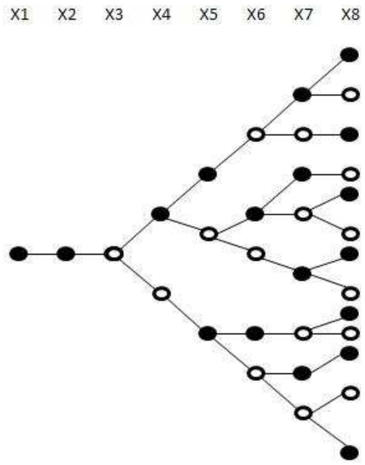


Рис. 8. Задание 7

Из рисунка 8 видно, что число решений $F_{11}(N) = F_{11}(N-1) + F_{11}(N-2)$. Иначе говоря, число решений описывается числами Фибоначчи. Вторую ветку дерева для F_{10} можно не строить, так как она получается из рис. 1, начиная со второго уровня. Тогда $F_{10}(N) = F_{11}(N+1)$. Окончательно получаем, что $F_{11}(8) = 13$ и $F_{10}(8) = F_{11}(9) = 13 + 8 = 21$. Тогда $F_1(8) = F_{11}(8) + F_{10}(8) = 13 + 21 = 34$.

Для того чтобы получить $F_0(N)$, также необязательно строить дерево решений, поскольку оно получается из рис. 1 начиная с третьего уровня. Тогда $F_0(N) = F_{11}(N+2)$. Отсюда получаем, что $F_0(8) = F_{11}(10) = F_{11}(9) + F_{11}(8) = 21 + 13 = 34$. Таким образом, общее число решений $F(8)= F_1(8) + F_0(8) = 34 + 34 = 68$.

Задание 8. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Задание 2)

$(X_1 + X_2) \to (X_3 + X_4) = 1$

$(X_3 + X_4) \to (X_5 + X_6) = 1$

$(X_5 + X_6) \to (X_7 + X_8) = 1$

$(X_7 + X_8) \to (X_9 + X_{10}) = 1$

Сделаем подстановку $(X_1 + X_2) = Y_1$ и т.д. и получим систему уравнений:

$Y_1 \to Y_2 = 1$

$Y_2 \to Y_3 = 1$

$Y_3 \to Y_4 = 1$

$Y_4 \to Y_5 = 1$

Дерево решений и таблица истинности для этой системы в точности совпадают с деревом и таблицей, изображенными на рис. 4. С учетом подстановки отметим, что выражение $(X_1 + X_2)$ равно единице в трех случаях (за исключением варианта, когда обе переменные равны нулю).

Поскольку переменные Y независимы, то для первой строки таблицы истинности, показанной на рис. 4, число различных комбинаций равно 3^5, для второй строки – 3^4 и т.д. Общее число различных комбинаций равно $3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 = 364$.

Задание 9. Нужно найти количество решений системы уравнений ([3], Задание 4)

$(X_1 \to X_2) \cdot (\neg X_1 \to X_3) \cdot (X_1 \to X_4) \cdot (\neg X_1 \to X_5) = 1$

$(\neg Y_1 \to Y_2) \cdot (Y_1 \to Y_3) \cdot (\neg Y_1 \to Y_4) \cdot (Y_1 \to Y_5) = 1$

$(\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = 1$

Для X и Y имеем следующие деревья решений

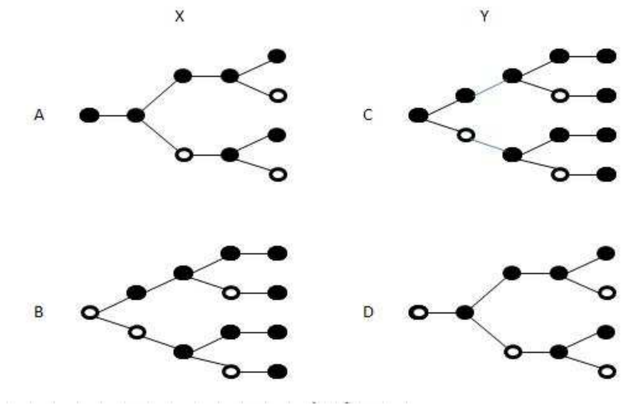


Рис. 9. Задание 8

С учетом третьего уравнения получаем следующие четыре набора комбинаций:

A – C: 4 * 4 = 16 $((\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = (0 + 1) \cdot (0 + 1) = 1)$

B – C: 4 * 4 = 16 $((\neg X_1 + Y_1) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1)$

A – D: = 0 $(0 + 0) \cdot (\neg X_1 + Y_5) = 0)$

B – D: 4 * 4 = 16 $(1 + 0) \cdot (1 + Y_5) = 1)$

Всего получается 48 наборов решений.

Задание 10. Нужно найти количество решений системы уравнений [4]

$((X_1 \equiv X_2) + (X_3 \equiv X_4)) \cdot (\neg(X_1 \equiv X_2) + \neg(X_3 \equiv X_4)) =1$

$((X_3 \equiv X_4) + (X_5 \equiv X_6)) \cdot (\neg(X_3 \equiv X_4) + \neg(X_5 \equiv X_6)) =1$

$((X_5 \equiv X_6) + (X_7 \equiv X_8)) \cdot (\neg(X_5 \equiv X_6) + \neg(X_7 \equiv X_8)) =1$

$((X_7 \equiv X_8) + (X_9 \equiv X_{10})) \cdot (\neg(X_7 \equiv X_8) + \neg(X_9 \equiv X_{10})) =1$

Проведем замену:

$(X_1 \equiv X_2) = Y_1$

$(X_3 \equiv X_4) = Y_2$

$(X_5 \equiv X_6) = Y_3$

$(X_7 \equiv X_8) = Y_4$

$(X_9 \equiv X_{10}) = Y_5$

Перепишем систему уравнений с учетом замены:

$(Y_1+Y_2) \cdot (\neg Y_1 + \neg Y_2)=1$

$(Y_2+Y_3) \cdot (\neg Y_2 + \neg Y_3)=1$

$(Y_3+Y_4) \cdot (\neg Y_3 + \neg Y_4)=1$

$(Y_4+Y_5) \cdot (\neg Y_4 + \neg Y_5)=1$

На рисунке 10 показано дерево решений

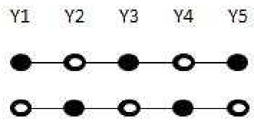


Рис. 10. Задание 10

С учетом подстановки отметим, что выражение $(X_1 \equiv X_2)$ равно единице (или нулю) в двух случаях (когда значения переменных совпадают). С учетом независимости переменных для каждого дерева получаем, что число наборов решений равно $2^5 = 32$. Общее число наборов решений равно 64.

Задание 11. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Пример 2)

$\neg X_1 + X_2 = 1$

$\neg X_2 + X_3 = 1$

. . . . .

$\neg X_9 + X_{10} = 1$

На рисунке 11 показано дерево решений. Мы ограничились четырьмя уровнями вместо десяти, так как очевидно, что $F_1(N) = 1$ и $F_0(N) = N$. Тогда $F(N) = F_1(N) + F_0(N) = 1 + N$. В нашем случае $F(10) = 1 + 10 = 11$.

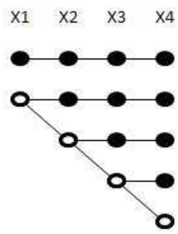


Рис. 11. Задание 11

Задание 12. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Пример 3)

$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$

$(X_1 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$
$(X_1 \equiv X_4) + (X_4 \equiv X_5) = 1$
$(X_1 \equiv X_5) + (X_5 \equiv X_6) = 1$
$(X_1 \equiv X_6) + (X_6 \equiv X_7) = 1$
$(X_1 \equiv X_7) + (X_7 \equiv X_8) = 1$
$(X_1 \equiv X_8) + (X_8 \equiv X_9) = 1$
$(X_1 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_1 \equiv X_{10}) = 0$

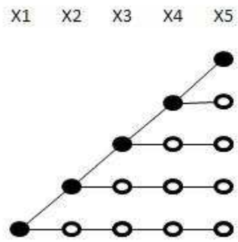


Рис. 12. Задание 12

Построив дерево решений из «1» (ограничимся пятью уровнями), заметим, что $F_1(N) = N$. Причем значения X_N состоят из N-1 значений «0» и одного значения «1». Однако последнее уравнение в нашей системе запрещает значение «1» для X_{10}. Поэтому число решений $F_1(10) = 10 - 1$. Нетрудно заметить, что дерево решений из «0» будет симметричным (вместо нулей будут единицы). Поэтому $F_0 = 10 - 1$. Окончательно

$F(N) = 2 \times 9 = 18.$

Задание 13. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Пример 4)

$\neg (X_1 \equiv X_2) + (X_3 \equiv X_4) = 1$
$\neg (X_3 \equiv X_4) + (X_5 \equiv X_6) = 1$
$\neg (X_5 \equiv X_6) + (X_7 \equiv X_8) = 1$
$\neg (X_7 \equiv X_8) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$

Проведем замену:

$(X_1 \equiv X_2) = Y_1$
$(X_3 \equiv X_4) = Y_2$
$(X_5 \equiv X_6) = Y_3$
$(X_7 \equiv X_8) = Y_4$
$(X_9 \equiv X_{10}) = Y_5$

Перепишем систему уравнений с учетом замены:

$\neg Y_1 + Y_2 =1$

$\neg Y_2 + Y_3 = 1$

$\neg Y_3 + Y_4 = 1$

$\neg Y_4 + Y_5 = 1$

Из задания 11 видно, что F(5) = 5 + 1 = 6. Таблица истинности представлена на рис. 13.

Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

Рис. 13. Задание 13

С учетом подстановки отметим, что выражение ($X_1 \equiv X_2$) равно единице (или нулю) в двух случаях (когда значения переменных совпадают). С учетом независимости переменных для каждой строки таблицы получаем, что число наборов решений равно $2^5 = 32$. Общее число наборов решений равно 6 * 32 = 192.

Задание 14. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Задание 1)

$((X_1 \equiv X_2) \cdot (X_3 \equiv X_4)) + (\neg(X_1 \equiv X_2) \cdot \neg(X_3 \equiv X_4)) = 0$

$((X_3 \equiv X_4) \cdot (X_5 \equiv X_6)) + (\neg(X_3 \equiv X_4) \cdot \neg(X_5 \equiv X_6)) = 0$

$((X_5 \equiv X_6) \cdot (X_7 \equiv X_8)) + (\neg(X_5 \equiv X_6) \cdot \neg(X_7 \equiv X_8)) = 0$

$((X_7 \equiv X_8) \cdot (X_9 \equiv X_{10})) + (\neg(X_7 \equiv X_8) \cdot \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 0$

Проведем замену:

$(X_1 \equiv X_2) = Y_1$

$(X_3 \equiv X_4) = Y_2$

$(X_5 \equiv X_6) = Y_3$

$(X_7 \equiv X_8) = Y_4$

$(X_9 \equiv X_{10}) = Y_5$

Перепишем систему уравнений с учетом замены:

$(Y_1 \cdot Y_2) + (\neg Y_1 \cdot \neg Y_2) = 0$

$(Y_2 \cdot Y_3) + (\neg Y_2 \cdot \neg Y_3) = 0$

$(Y_3 \cdot Y_4) + (\neg Y_3 \cdot \neg Y_4) = 0$

$(Y_4 \cdot Y_5) + (\neg Y_4 \cdot \neg Y_5) = 0$

$(Y_1 \equiv Y_2) = 0$

$(Y_2 \equiv Y_3) = 0$
$(Y_3 \equiv Y_4) = 0$
$(Y_4 \equiv Y_5) = 0$

На рисунке 14 показано дерево решений

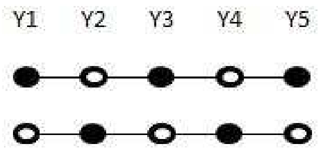


Рис. 14. Задание 14

С учетом подстановки отметим, что выражение $(X_1 \equiv X_2)$ равно единице (или нулю) в двух случаях (когда значения переменных совпадают). С учетом независимости переменных для каждого дерева получаем, что число наборов решений равно $2^5 = 32$. Общее число наборов решений равно 64.

Задание 15. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Задание 2)

$(X_1 \cdot X_2) + (\neg X_1 \cdot \neg X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) + (X_7 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$

Заметим, что систему уравнений можно переписать в виде:

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \equiv X_8) + (X_7 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$

Но эта система повторяет систему из задания 5, только без условия ограничения и для $N = 10$. Тогда число решений равно $F(N) = F_1(N) + F_0(N) = N + N$. При $N = 10$ получаем $F(N)= 20$.

Задание 16. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Задание 3)

$(X_1 \cdot X_2) + (\neg X_1 \cdot \neg X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) + (X_7 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 0$

Эту систему уравнений, как и в предыдущем задании, можно переписать в виде:

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \equiv X_8) + (X_7 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 0$

Из последнего уравнения легко проверить, что после $N = 8$ число решений перестает возрастать. Тогда $F(10) = F(8) = 8 + 8 = 16$.

Задание 17. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Задание 4)

$(X_1 \cdot X_2) + (\neg X_1 \cdot \neg X_2) + (X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) = 1$
$(X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) + (X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) = 1$
$(X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) + (X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) = 1$
$(X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) + (X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) = 1$
$(X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) + (X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) = 1$
$(X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) + (X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) = 1$
$(X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) + (X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) = 1$
$(X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) + (X_9 \cdot X_{10}) + (\neg X_9 \cdot \neg X_{10}) = 1$

Заметим, что систему уравнений можно переписать в виде:

$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_4 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_5 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_6 \equiv X_7) = 1$

$(X_6 \equiv X_7) + (X_7 \equiv X_8) = 1$

$(X_7 \equiv X_8) + (X_8 \equiv X_9) = 1$

$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$

На рисунке 15 дерево построено до пятого уровня и видно, что число решений описывается числами Фибоначчи, то есть $F_1(N) = F_1(N\text{-}1) + F_1(N\text{-}2)$. Тогда $F_1(10) = 89$. Легко проверить, что для $F_0(N)$ дерево будет симметрично. Поэтому $F_0(10) = 89$. $F(10) = F_1(10) + F_0(10) = 89 + 89 = 178$.

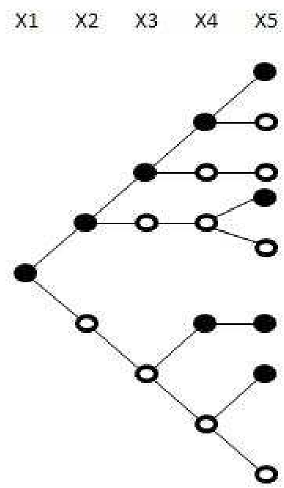


Рис. 15. Задание 17

Задание 18. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Задание 5)

$(X_1 \cdot X_2) + (\neg X_1 \cdot \neg X_2) + (X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) = 1$

$(X_2 \cdot X_3) + (\neg X_2 \cdot \neg X_3) + (X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) = 1$

$(X_3 \cdot X_4) + (\neg X_3 \cdot \neg X_4) + (X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) = 1$

$(X_4 \cdot X_5) + (\neg X_4 \cdot \neg X_5) + (X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) = 1$

$(X_5 \cdot X_6) + (\neg X_5 \cdot \neg X_6) + (X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) = 1$

$(X_6 \cdot X_7) + (\neg X_6 \cdot \neg X_7) + (X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) = 1$

$(X_7 \cdot X_8) + (\neg X_7 \cdot \neg X_8) + (X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) = 1$

$(X_8 \cdot X_9) + (\neg X_8 \cdot \neg X_9) + (X_9 \cdot X_{10}) + (\neg X_9 \cdot \neg X_{10}) = 0$

Заметим, что систему уравнений можно переписать в виде:

$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$

$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$

$(X_3 \equiv X_4) + (X_4 \equiv X_5) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_5 \equiv X_6) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_6 \equiv X_7) = 1$
$(X_6 \equiv X_7) + (X_7 \equiv X_8) = 1$
$(X_7 \equiv X_8) + (X_8 \equiv X_9) = 1$
$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 0$

Задание 18 похоже на задание 17, однако последнее уравнение приводит к тому, что начиная с седьмого уровня число решений не увеличивается. В результате $F(10) = F_1(10) + F_0(10) = F_1(7) + F_0(7) = 21 + 21 = 42$.

Задание 19. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Задание 6)

$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_3 \equiv X_4) + (X_3 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_4 \equiv X_5) + (X_4 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_5 \equiv X_6) + (X_5 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_6 \equiv X_7) + (X_6 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_7 \equiv X_8) + (X_7 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_9 \equiv X_{10}) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$
$(X_1 \equiv X_{10}) = 0$

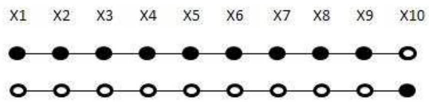


Рис. 16. Задание 19

Деревья решений для получения $F_1(N)$ и $F_0(N)$ показаны на рис. 16. Однако уравнение $(X_9 \equiv X_{10}) = 1$ не может быть выполнено. Поэтому система уравнений не имеет решений.

Задание 20. Нужно найти количество решений системы уравнений ([2], Задание 7)

$(X_1 \to X_2) + (X_1 \to X_3) = 1$
$(X_2 \to X_3) + (X_2 \to X_4) = 1$
$(X_3 \to X_4) + (X_3 \to X_5) = 1$
$(X_4 \to X_5) + (X_4 \to X_6) = 1$
$(X_5 \to X_6) + (X_5 \to X_7) = 1$
$(X_6 \to X_7) + (X_6 \to X_8) = 1$

$(X_7 \to X_8) + (X_7 \to X_9) = 1$

$(X_8 \to X_9) + (X_8 \to X_{10}) = 1$

На рисунке 17 показано дерево решений из «1».

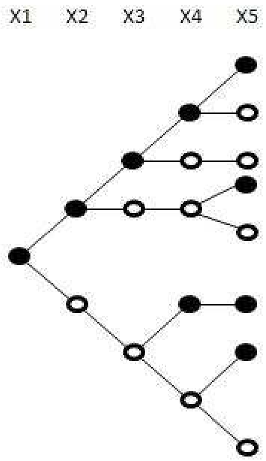


Рис. 17. Задание 20

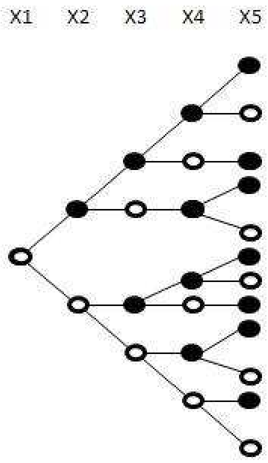


Рис. 18. Задание 20

Вместо десяти уровней мы ограничились пятью, так как задача схожа с заданием 17. Однако из «0» дерево будет выглядеть иначе (рис. 18).

Заметим, что $F_0(N) = F_1(N+1) - 1$. Тогда $F_1(10) = 89$, а $F_0(10) = F_1(11) - 1 = 144 - 1$. Итого, $F(10) = F_1(10) + F_0(10) = 89 + 143 = 232$.

В заключение приведем программу на бейсике VBA, с помощью которой можно решать системы логических уравнений. Программа может понадобиться при составлении новых систем уравнений. На рисунке 19 показана программа, с помощью которой решается система уравнений из задания 7.

В программе, показанной на рис. 19, массив *m* и переменная *c* содержат значения переменных, удовлетворяющих системе уравнений из задания 7. Программа выдает ответ 68. В программе используется факт, что число различных наборов значений n логических переменных равно 2^n. Для получения всех наборов нужно выполнить цикл от 0 до 2^n-1. Переменная цикла на каждом шаге переводится в двоичную систему, результат записывается в массив *m*, и затем уже проверяются условия из системы уравнений. Для решения другой системы уравнений достаточно поменять размерность массива *m*, изменить значение переменной *vg* (равна размерности) и поменять условия проверки.

```
Sub calc()
  Dim m(8) As Integer, k As Integer, i As Integer, _
  j As Integer, N As Integer, vg As Integer
  Dim c As String
  vg = 8
  j = 0
  For i = 1 To 2 ^ vg       'Цикл по i от 1 до 2n, где n=vg
    For k = 1 To vg
      m(k) = 0
    Next k
    N = i – 1     'Двоичное представление начинается с нуля
    k = 1
    Do While N > 0       'Перевод в двоичную систему
      m(k) = N Mod 2
      N = N \ 2
      k = k + 1
    Loop
    If (m(1) <> m(2) Or m(1) <> m(3)) And _ 'Условия уравнений
      (m(2) <> m(3) Or m(2) <> m(4)) And _
      (m(3) <> m(4) Or m(3) <> m(5)) And _
      (m(4) <> m(5) Or m(4) <> m(6)) And _
      (m(5) <> m(6) Or m(5) <> m(7)) And _
      (m(6) <> m(7) Or m(6) <> m(8)) Then
      c = ""      'Переменная с на каждом шаге будет содержать решение системы
      For k = 1 To vg
        c = c + Format(m(k))
      Next k
      j = j + 1
    End If
  Next i
  MsgBox j      'Количество решений
End Sub
```

Рис. 19. Программа для задания 7

1. Крылов С.С. ЕГЭ 2014. Информатика. Тематические тестовые задания / С.С. Крылов, Д.М. Ушаков. – М.: Изд-во «Экзамен». – 245 с.
2. Сайт К.Ю. Полякова. Режим доступа: http://kpolyakov.narod.-ru/download/inf-2011-14.pdf
3. Методический сертифицированный курс фирмы «1С» «Подготовка к ЕГЭ по информатике. Модуль 1». – М.: Изд-во «1С». – 218 с.
4. Успешно сдать ЕГЕ по информатике. Режим доступа: http://infoegehelp.ru/index.php?Itemid=77&id=103&option=com_con-tent&view=article.